



Прогрессии в окружающей нас жизни

Актуальность исследования (Почему это важно для нас?)

В 9 классе мы изучаем прогрессии: дали определение, научились находить по формулам любой член прогрессии, сумму первых членов прогрессии. Найдя ответы на вопросы: имеет ли это какое - либо практическое значение и как давно люди знают последовательности, как возникло это понятие, мы подтвердим или опровергнем утверждение о том, что математика – наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека, что алгебра является частью общечеловеческой культуры.

- ✓ **Объект исследования:**
последовательности: арифметическая и геометрическая прогрессии
- ✓ **Предмет исследования:**
использование теоретического материала для решения задач о прогрессиях; интересные жизненные примеры и практическое применение этих прогрессий
- ✓ **Гипотеза исследования:**
прогрессии имеют определенное практическое значение: сфер жизни человека, где встречаются прогрессии бесчисленное множество

Цель исследования:

- ✓ Установить картину возникновения понятия прогрессии
- ✓ Выявление интересных фактов о прогрессиях
- ✓ Применение прогрессий в жизненных ситуациях

Методы исследования:

- ✓ Поиск и анализ различных источников информации.
- ✓ Систематизация и обобщение материалов исследования.

Исторические сведения

Прогрессия – «движение вперед»

Первые теоретические сведения, связанные с прогрессиями, дошли до нас в документах Древней Греции.

Пифагор (IV в. до н. э.) и его ученики рассматривали последовательности, связанные с геометрическими фигурами.

Подсчитывая число кружков в треугольниках, квадратах, пятиугольниках, они получали:

- последовательность (a_n) треугольных чисел 1; 3; 6; 10; 15; ... ;
- последовательность (b_n) квадратных чисел 1; 4; 9; 16; 25; ... ;
- последовательность (c_n) пятиугольных чисел 1; 5; 12; 22; 35; ... ;

Последовательность Фибоначчи

У европейцев правило для нахождения суммы членов любой арифметической прогрессии встречается впервые в сочинении Леонардо Пизанского (Фибоначчи)

«Книга об абак» (1202 г.)



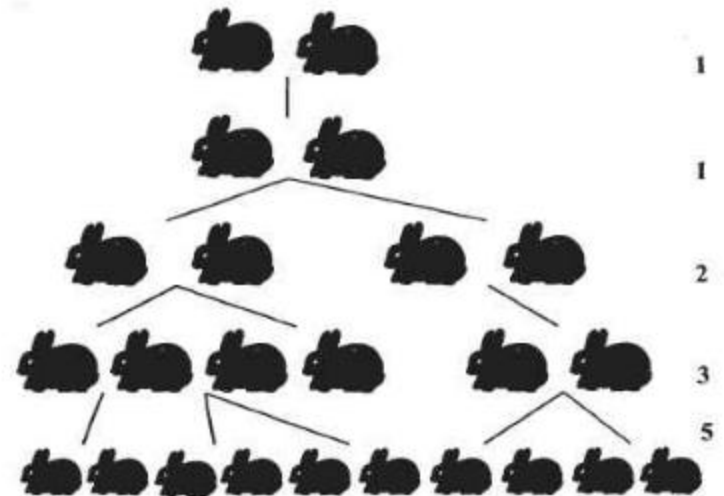
Леонардо Пизанский
(Фибоначчи)



Задача Фибоначчи:

В место, огороженное со всех сторон стеной, поместили пару кроликов, природа которых такова, что любая пара кроликов производит на свет другую пару каждый месяц, начиная со второго месяца своего существования. Сколько пар кроликов

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |



«Сколько пар кроликов в один год от одной пары родится».

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|
| Месяцы | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Пары кроликов | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |

- Ряд чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и т.д. известен как ряд Фибоначчи. Особенность последовательности чисел состоит в том, что каждый ее член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих $2 + 3 = 5$; $3 + 5 = 8$; $5 + 8 = 13$, $8 + 13 = 21$; $13 + 21 = 34$ и т.д.,

Сведения из истории








Сами по себе прогрессии известны так давно, что конечно, нельзя говорить о том, кто их открыл. Ведь уже натуральный ряд есть арифметическая прогрессия с первым членом и разностью, равными 1.

О том, как давно была известна геометрическая прогрессия, свидетельствует знаменитое предание о создании шахмат.

Индийский принц решил наградить изобретателя шахмат и предложил ему самому выбрать себе награду.

Изобретатель попросил в награду за первую клетку шахматной доски 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Каково же было удивление принца, когда он узнал, что такую, казалось бы, скромную просьбу невозможно выполнить.

Для того чтобы подсчитать величину награды, надо сложить зерна, лежащие на всех клеточках доски.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|-------|
|  |  |  |  |  |  |  | 128 |
| 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 | 8192 | 16384 | 32768 |
| 65K | 131K | 262K | 524K | 1M | 2M | 4M | 8M |
| 16M | 33M | 67M | 134M | 268M | 536M | 1G | 2G |
| 4G | 8G | 17G | 34G | 68G | 137G | 274G | 549G |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63}$$

Решение:

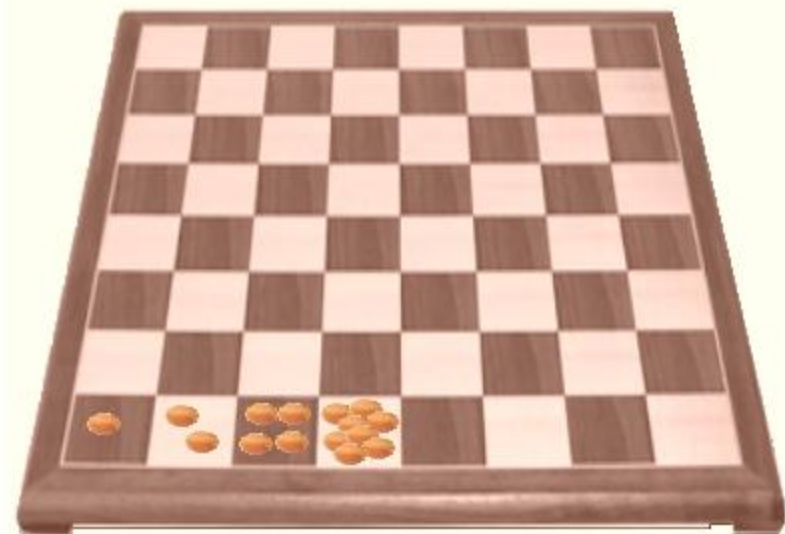
Дано: 1; 2; 4; 8; 16; ...;

$b_1=1$; $n=64$; $q=2$

Найти: S_{64} - ?

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

Сумма равна: 18 446 744 073 709 551 615 -
восемнадцать квинтильонов четыреста сорок шесть
квадрильонов семьсот сорок четыре триллиона семьдесят
три биллиона семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят
одна тысяча шестьсот пятнадцать



Можно подсчитать, что масса такого числа пшеничных зёрен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени. Такое количество пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 квадратных километров на поверхности Земли.



Арифметическая прогрессия – последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

$$1. a_n = a_1 + d(n-1);$$

$$2. a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

$$3. d = a_{n+1} - a_n;$$

$$4. S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$5. S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия –

последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

$$1. b_n = b_1 q^{(n-1)};$$

$$2. b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}};$$

$$3. q = \frac{b_{n+1}}{b_n};$$

$$4. S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1};$$

$$5. S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1;$$

$$6. S_n = \frac{b_1}{1 - q}, |q| < 1.$$



**Задачи на применение
прогрессий встречаются
в старых учебниках
по математике**

Задача из арифметики Магницкого

Некто продал лошадь за 156 рублей. Но покупатель, обретя лошадь, раздумал и возвратил продавцу, говоря: «Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит». Тогда продавец предложил другие условия: «Если по-твоему цена лошади высока, то купи ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне $\frac{1}{4}$ коп., за второй - $\frac{1}{2}$ коп., за третий - 1 коп., и т.д.»

Покупатель, соблазненный низкой ценой, и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.



Решение:

1. Составим последовательность чисел $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 2^2; \dots 2^{21}$.

2. Данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q = 2$; $b_1 = \frac{1}{4}$; $n = 24$.

3. Попробуем подсчитать сумму $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 2^2; \dots 2^{21}$.

4. Зная формулу
$$S_n = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1}$$

5. Имеем
$$S_{24} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 2^{24} - \frac{1}{4}}{2 - 1} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{24} - \frac{1}{4} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303 \frac{3}{4} \approx 42000(p)$$

Кому ВЫГОДНА сделка?

Приходит как-то раз к одному богатому купцу мужик и предлагает сделку.

«Давай, говорит, в течение месяца я буду приносить тебе каждое утро по 100 000 руб., а ты мне взамен в первый день отдашь 1 коп., а в каждый последующий в 2 раза больше. Во второй день - 2 коп., в третий - 4 коп. и т.д.»

Подумал купец и подписал договор.

Сумма, которую получит купец

$$S=100\ 000\text{руб} \cdot 30\text{дней}=3\ 000\ 000\text{руб}$$

Сумма, которую получит мужик

1-ый день-1 коп

2-ой день-2 коп

3-ий день-4 коп

4-ый день-8 коп

5-ый день-16 коп

6-ой день-32 коп

7-ой день-64 коп

8-ой день-128 коп

9-ый день-256 коп

10-ый день-512 коп

11-ый день-1 024 коп

12-ый день-2 048 коп

13-ый день-4 096 коп

14-ый день-8 192 коп

15-ый день-16 384 коп

.....

.....

Путь не рациональный.

Дано: $b_1=1$; $q=2$

Найти: S_{30} - ?

Решение

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{30} = \frac{1 * (2^{30} - 1)}{2 - 1} = 10\,737\,418 \text{ руб. } 23 \text{ коп.}$$

Сравним доходы

Купец получил – 3 000 000 р.

Мужик – 10 737 418 р. 23 к.

Разница составляет – 7 737 418 руб. 23 коп.

A vertical decorative bar on the left side of the slide, featuring a light gray background with a fine grid pattern. It contains several overlapping circles of varying shades of gray, some partially cut off by the edge of the frame.

**Имеют ли
арифметическая и
геометрическая прогрессии
прикладное значение?**

Задача № 614.

Алгебра. 9 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений/
Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Суворова С.Б. . - М.: Просвещение,
2009, -271с. (с.152)

При свободном падении тело прошло в первую секунду 5м, а в каждую следующую на 10м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло его дна через 5с после начала падения.

Решение: Составим математическую модель задачи:

- в первую секунду - 5м,
- во вторую секунду - 15м,
- в третью секунду - 25м,
- в четвертую секунду - 35м,
- в пятую секунду - 45м.

Всего за пять секунд - $5+15+25+35+45=125$ (м).

Ответ: глубина шахты 125м.

Задача № 471

Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений/
Мордкович А.Г., Семенов П.В., - М.: Мнемозина, 2010, -224с. (с.100)

Альпинисты в первый день восхождения поднялись на высоту 1400м, а затем каждый следующий день они проходили на 100м меньше, чем в предыдущий. За сколько дней они покорили высоту в 5000м?

Дано: 1400; 1300; ...; $a_1=1400$; $d=-100$; $S_n=5000$

Найти: n

Решение

$$S_n = (2a_1 + d(n-1))n/2;$$

$$5000 = (2 \cdot 1400 - 100 \cdot (n-1))n/2;$$

$$10000 = (2800 - 100n + 100)n;$$

$$10000 = (2900 - 100n)n;$$

$$100n^2 - 2900n + 10000 = 0;$$

$$n^2 - 29n + 100 = 0;$$

$n=25$. $n=4$ – условию задачи удовлетворяет $n=4$ (при $n=25$. $a_n=-1000$. но

Задачи на прогрессии

Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день — на 5 капель больше, чем в предыдущий. Приняв 40 капель, он 3 дня пьет по 40 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель, доведя его до 5 капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?

Дано: 5; 10; 15; ...; 40; 40; 40; 35; 30; ...; 5

$a_1=5$; $d=5$ (возрастающая ар. пр.); $a_1=5$; $d=-5$ (убывающая ар. пр.)

Решение

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$40 = 5 + 5(n-1)$$

$$n = 8$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_8 = \frac{(5 + 40) \cdot 8}{2} = 180$$

Ответ: 2 пузырька лекарства

Как сосчитать количество бревен?

Представьте, что вы – учетчик на стройке. Привезли большое количество бревен строевого леса. Нужно быстро определить, сколько бревен привезли, чтобы закрыть наряд шоферу.

В данном случае, чтобы подсчет бревен осуществлялся по простым формулам, один из способов – использовать естественное расположение бревен так, чтобы в каждом верхнем ряду их оказалось на единицу меньше, чем в нижнем. Тогда число бревен ряда образует арифметическую прогрессию и общее количество легко подсчитывается по формуле суммы арифметической прогрессии с разностью, равной единице.

Задача. При хранении бревен строевого леса их укладывают как показано на рисунке. Сколько брёвен находится в одной кладке, если в ее основании положено 12 бревен?

Решение. Составим математическую модель задачи: 1, 2, 3, 4, ..., 12. Это арифметическая прогрессия, $a_1=1$, $d=1$, $a_n=12$. Надо найти n .

$$a_n = a_1 + d(n-1); 12 = 1 + 1(n-1); n = 12.$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot n : 2; S_n = (1 + 12) \cdot 12 : 2; S_n = 78.$$

В одной кладке находится 78 бревен.

Ответ: 78 бревен.



Интересные факты

- 1) **Химия.** При повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.
- 2) **Геометрия.** Вписанные друг в друга правильные треугольники образуют геометрическую прогрессию.
- 3) **Физика.** И в физических процессах встречается эта закономерность. Нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на две части. Получаются два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывает их еще на 4 части и т.д. – это геометрическая прогрессия.
- 4) **Биология.** Микроорганизмы размножаются делением пополам, поэтому при благоприятных условиях, через одинаковый промежуток времени их число удваивается.
- 5) **Экономика.** Вклады в банках увеличиваются по схемам сложных и простых процентов. Простые проценты – увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии, сложные проценты – увеличение в геометрической прогрессии.

Прогрессии и банковские расчеты

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть вклад составлял 10 000 р., банк дает 10% годовых, срок хранения вклада - 5 лет. Если вы выбрали стратегию простых процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную $10\,000 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 10}{100}\right)$, т. е. 15 000 р. Если же вы выбрали стратегию сложных процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную $10\,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5$ е. 16 105,1 р.

Как говорится в одном рекламном слогане, почувствуйте разницу.

Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.1. Учебник для
общеобразовательных учреждений/ Мордкович А.Г.,
П.В. Семенов, -М.:Мнемозина,2010,-224с.(с.169-171)

В каких процессах ещё встречаются такие закономерности?

- ✓ Возведение многоэтажного здания — пример арифметической прогрессии. Каждый раз высота здания увеличивается на 3 метра.
- ✓ Равноускоренное движение — арифметическая прогрессия, т.к. за каждые промежутки времени тело увеличивает скорость в одинаковое число раз.
- ✓ Технические задачи: После каждого движения поршня разрежающего насоса из сосуда удаляется 20% находящегося в нём воздуха. Определите давление воздуха внутри сосуда, после 6 движений поршня, если первоначально давление было 760 мм. рт. ст.

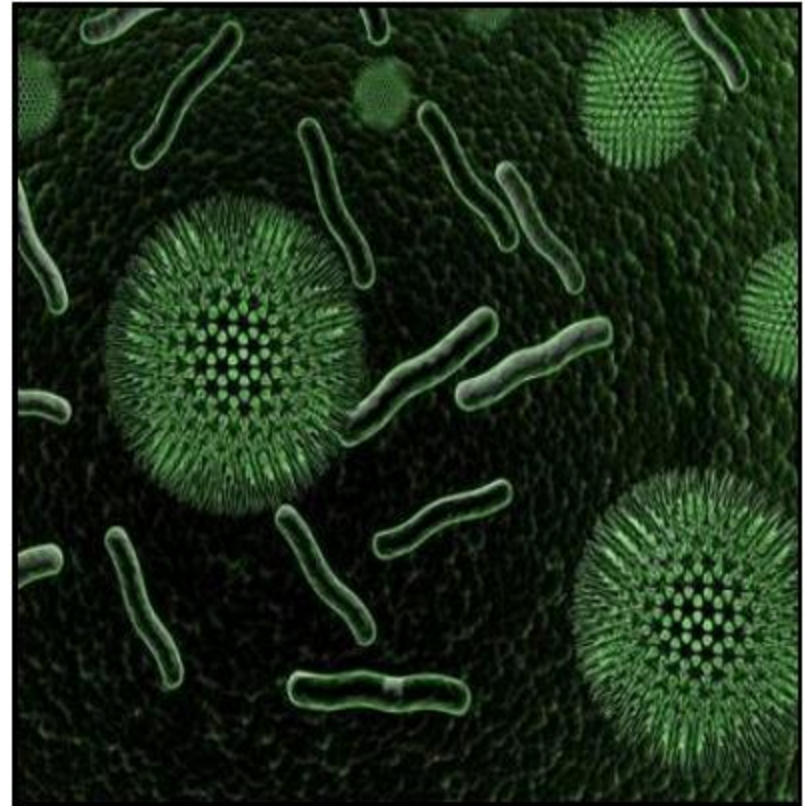
О финансовых пирамидах:

- Разберёмся в механизмах этих организаций. Организатор начинает вовлекать в свою организацию и говорит, что, если внести указанную плату по указанным адресам по 1 рублю, а затем заплатить ещё по 5 таким же адресам, вычеркнув первый адрес и дописав свой последним, то через некоторое время вы получите уйму денег. Хотя желающих разбогатеть по щучьему веленью немало, но в выигрыше оказываются только учредители такой игры.
- **Решение.** Дело в том, что число участников увеличивается в 5 раз с каждым кругом. Если пятёрка устроителей подпишет, допустим, 120 человек со своими адресами, то в первом круге участвуют 120 человек, во втором – 600, в третьем – 3 000, ..., в десятом – 234 375 000 человек; это намного больше населения страны. Так что участник, включившийся в восьмом или девятом круге, уже ничего не получит.

Прогрессии в природе

Известно, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две; каждая из этих двух в свою очередь тоже делится на две, и получаются четыре бактерии; из этих четырех в результате деления получаются восемь бактерий и т. д. Результат каждого удвоения будем называть поколением.

Способность к размножению у бактерий настолько велика, что если бы они не гибли от разных причин, а беспрерывно размножались, то за трое суток общая масса потомства одной только бактерии могла бы составить 7500 тонн. Таким громадным количеством бактерий можно было бы заполнить около 375 железнодорожных вагонов.



Задача №17.51

Алгебра. 9 класс, Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений/ Мордкович А.Г., Семенов П.В., -М.: Мнемозина, 2010

Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

Решение:

В сутках 1 440 минут, каждые двадцать минут появляется новое поколение - за сутки 72 поколения. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=2$, $n=72$, находим, что $S_{72}=2^{72}-1=4\ 722\ 366\ 482\ 869\ 645\ 213\ 696 - 1=$

$$= 4\ 722\ 366\ 482\ 869\ 645\ 213\ 695.$$

Интенсивность размножения бактерий используют...



В пищевой
промышленности

В фармацевтической
промышленности



В сельском
хозяйстве

В коммунальном
хозяйстве и
природоохранных
мероприятиях



ВЫВОДЫ: В ходе выполнения данного исследования я:

- ✓ установила, что сами по себе прогрессии известны так давно, что нельзя говорить о том, кто их открыл;
- ✓ убедилась в том, что задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, также как и многие другие знания по математике, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и др.;
- ✓ выяснила, что в развитие теории о прогрессиях внесли ученые Архимед, Пифагор и его ученики, французский математик Леонард Фибоначчи;
- ✓ нашла много задач на арифметическую и геометрическую прогрессию в старых и в современных учебниках по математике. Заметили, что арифметическая прогрессия в практических задачах встречается чаще геометрической;
- ✓ сделав анализ задач на прогрессии с практическим содержанием я увидела, что прогрессии встречаются при решении задач в медицине, в строительстве, в банковских расчетах, в живой природе, в спортивных соревнованиях и в других жизненных ситуациях;
- ✓ следовательно, нам необходим навык применения знаний, связанных с прогрессиями.



Таким образом, поставленная цель проекта установить картину возникновения понятия прогрессии; выявление интересных фактов о прогрессиях; применение прогрессий в жизненных ситуациях достигнута, проблема решена.