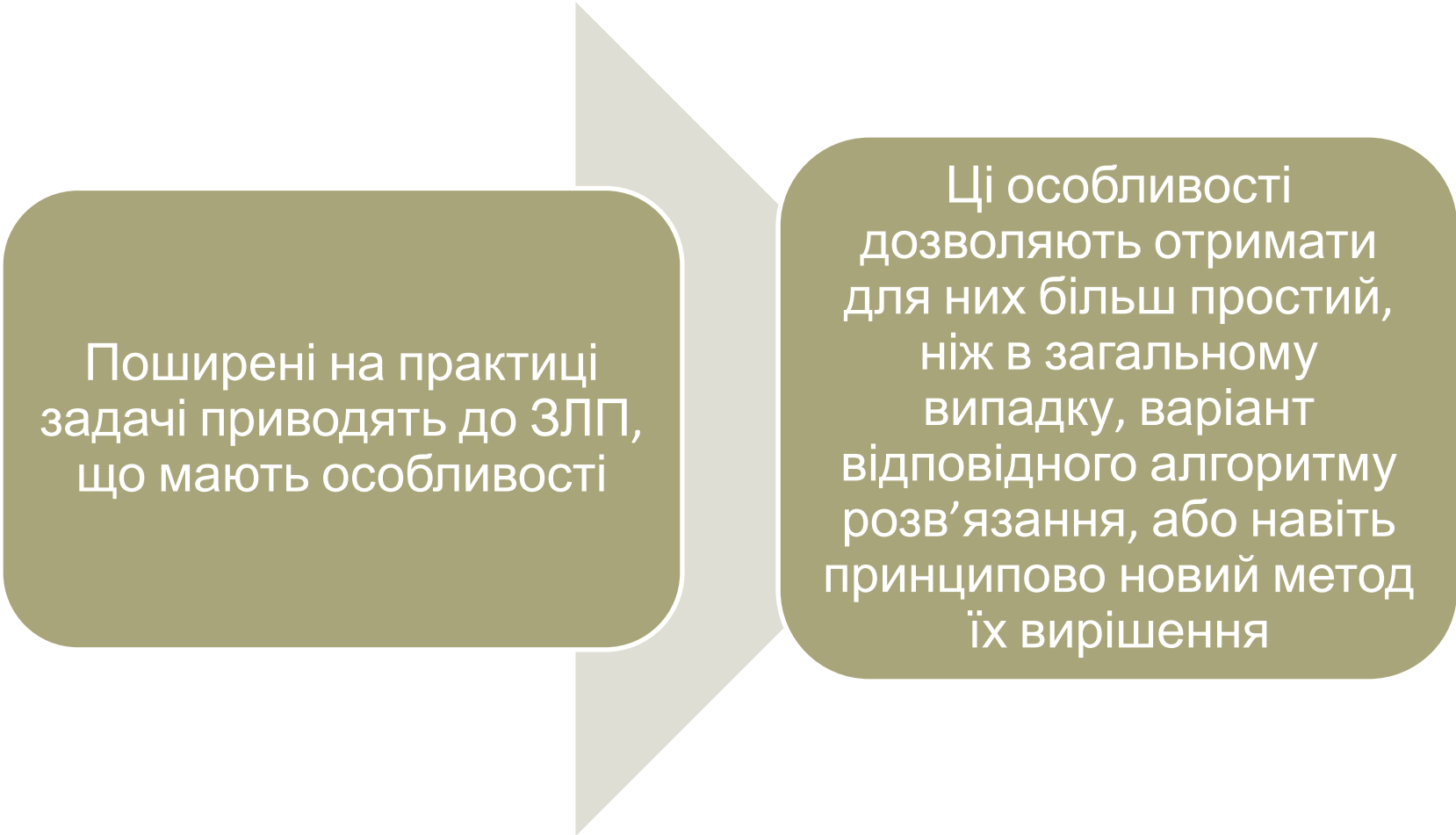


Транспортна Задача Лінійного Програмування (ТЗЛП)

Частина 1

ТЗЛП – підклас ЗЛП



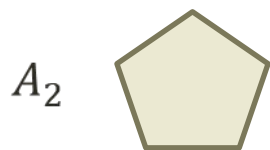
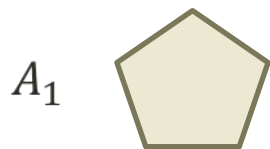
Поширені на практиці
задачі приводять до ЗЛП,
що мають особливості

Ці особливості
дозволяють отримати
для них більш простий,
ніж в загальному
випадку, варіант
відповідного алгоритму
розв'язання, або навіть
принципово новий метод
їх вирішення

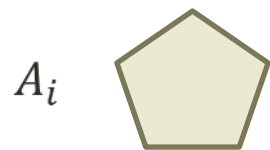
Тема 1. ТЗЛП

- ▣ 1. Змістовна постановка і формальна модель ТЗЛП
- ▣ 2. Умова існування розв'язку ТЗЛП
- ▣ 3. Побудова формальної моделі ТЗЛП при порушенні умови балансу
- ▣ 4. Властивості ТЗЛП
- ▣ 5. Метод потенціалів
 - 5.1. Методи побудови початкового ДБР
 - 5.1.1. Метод північно-західного кута
 - 5.1.2. Метод найменшої вартості
 - 5.1.3. Наближений метод Фогеля
 - 5.2. Виродженість ТЗЛП
 - 5.3. Етапи методу потенціалів
 - 5.3.1. Вибір змінної, що вводиться в базис
 - 5.3.2. Вибір змінної, що виводиться з базису
 - 5.3.3. Перехід до нового ДБР
 - 5.4. Схема алгоритму методу потенціалів
- ▣ 6. Транспортна модель з проміжними пунктами

Змістовна постановка задачі



...



...



Змістовна постановка задачі

A_1 

A_2 

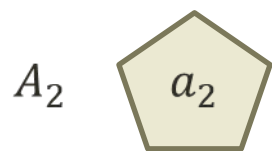
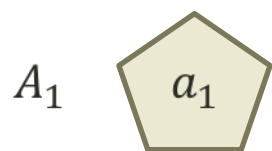
...

A_i 

...

A_m 

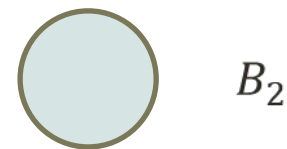
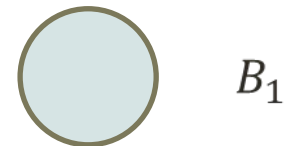
Змістовна постановка задачі



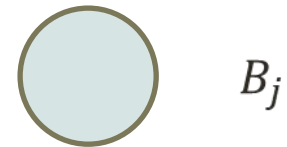
...



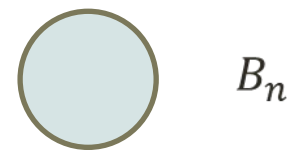
...



...



...



Змістовна постановка задачі

A_1  a_1

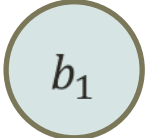
A_2  a_2

...

A_i  a_i

...

A_m  a_m

 b_1 B_1

 b_2 B_2

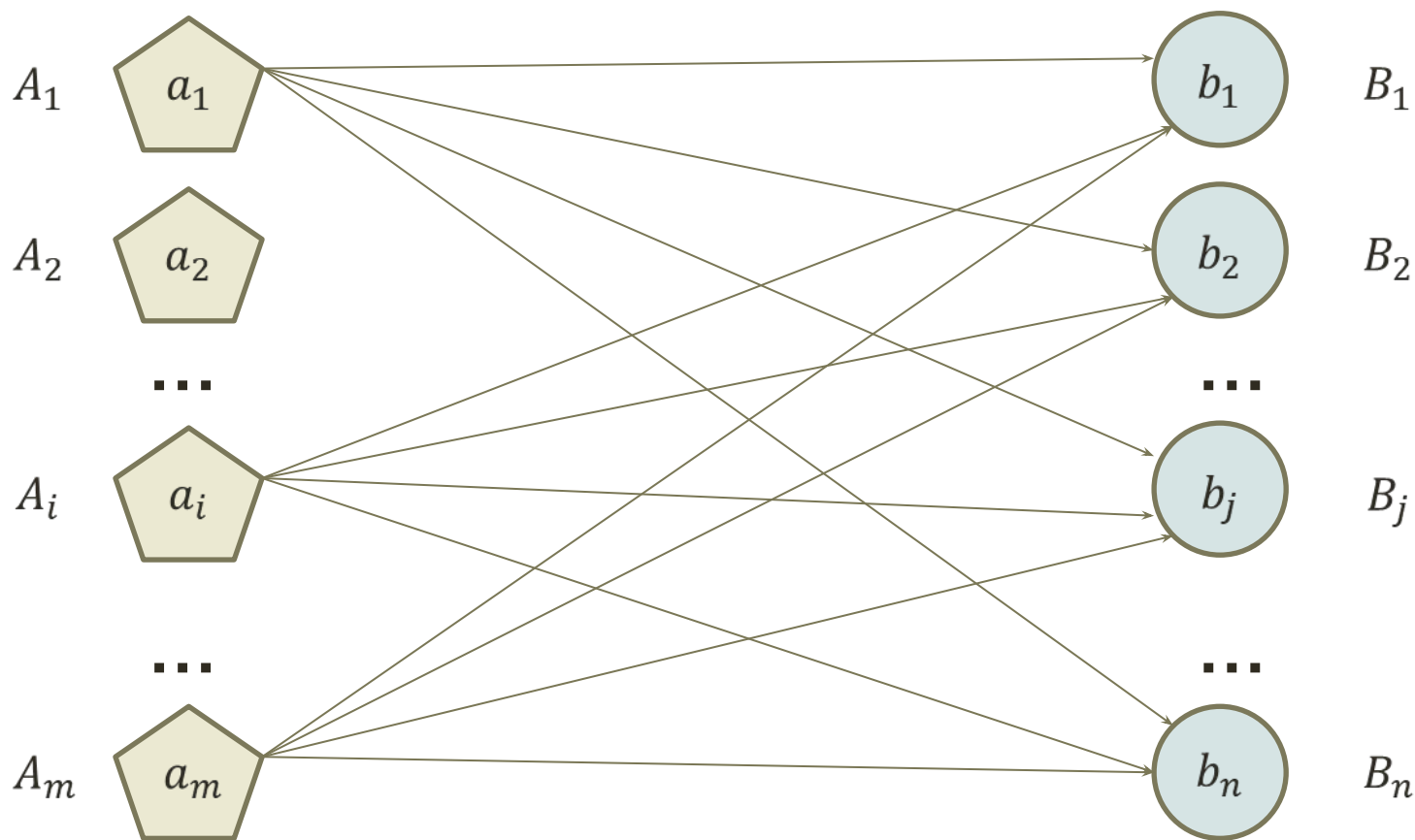
...

 b_j B_j

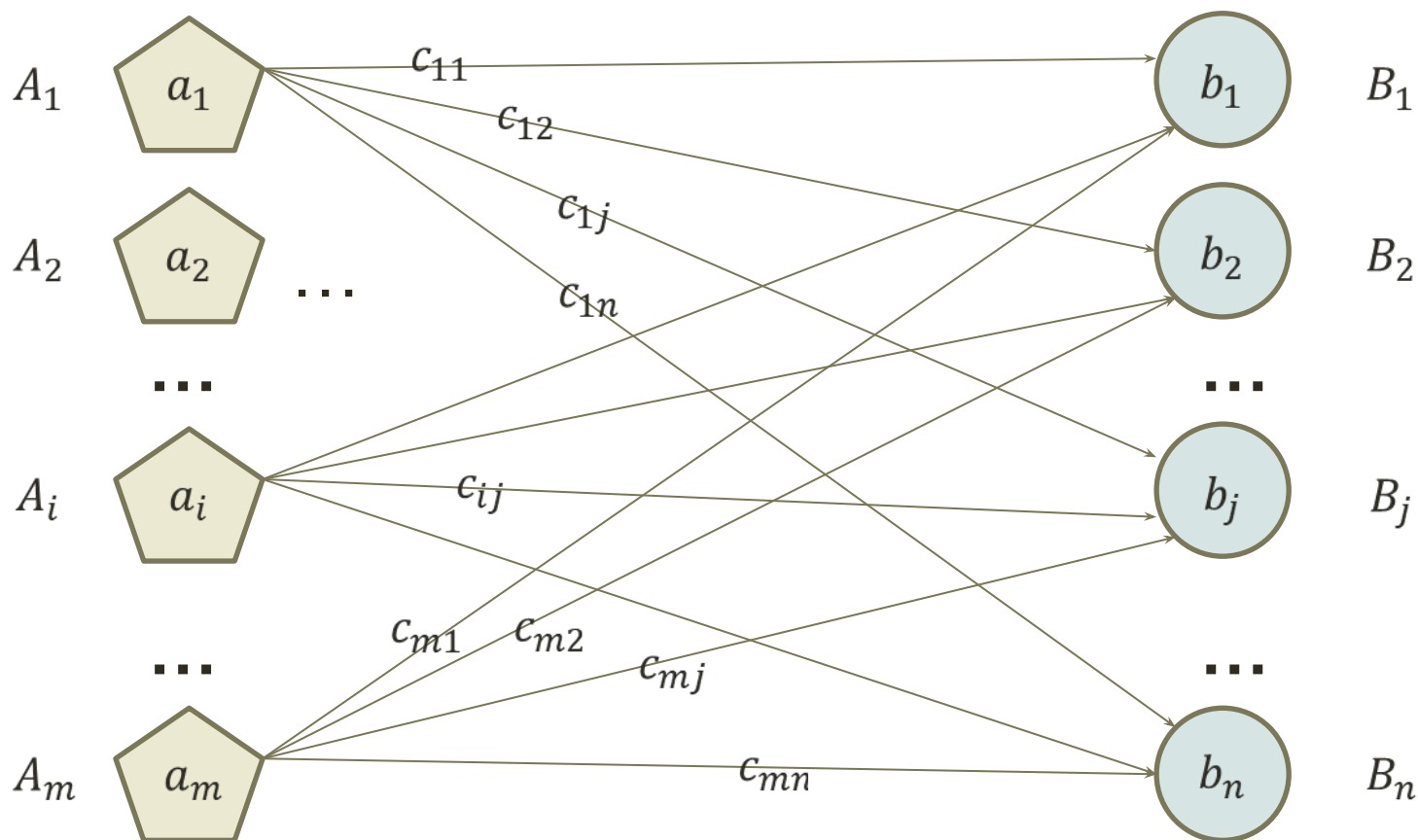
...

 b_n B_n

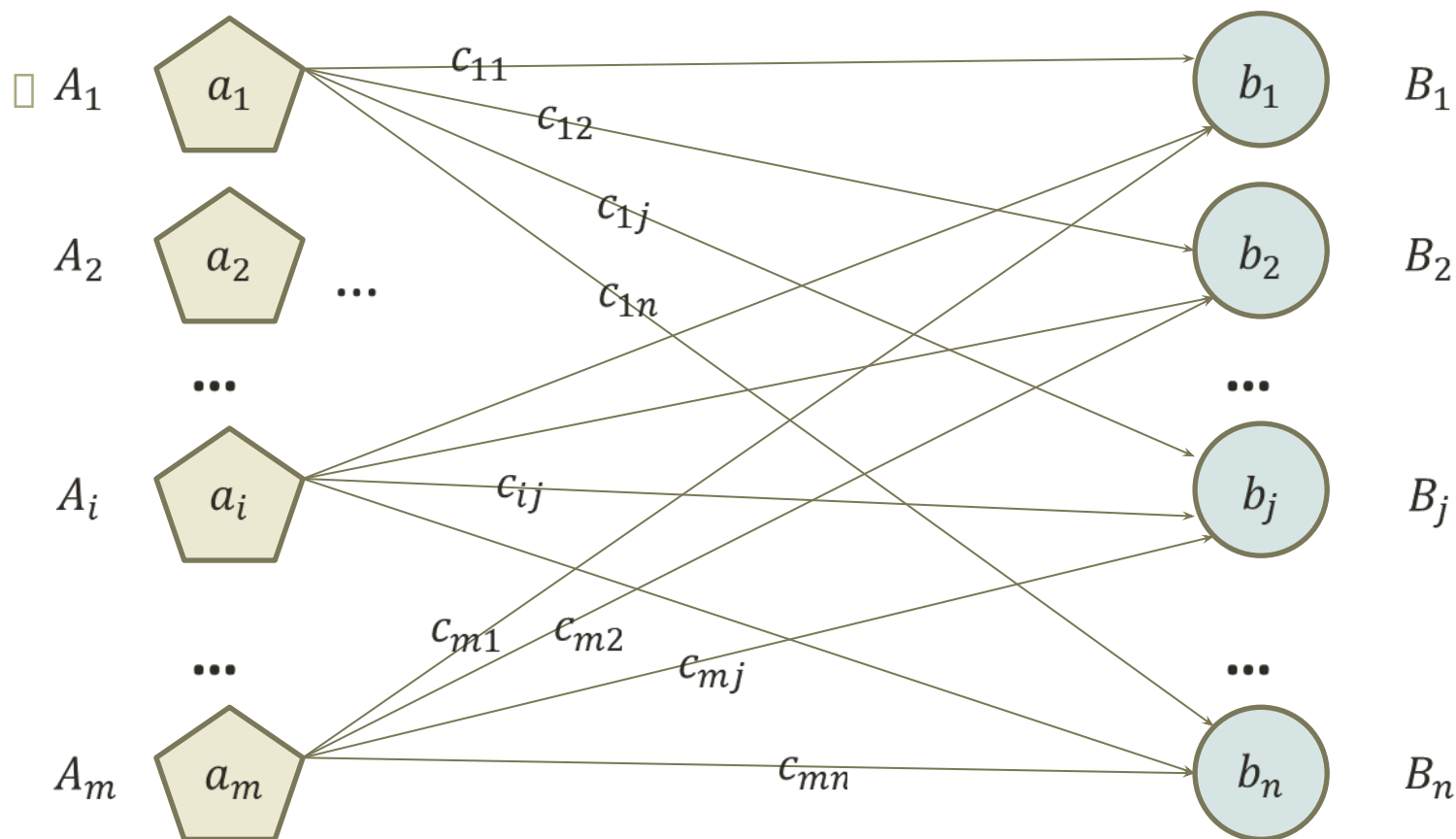
Змістовна постановка задачі



Змістовна постановка задачі



Змістовна постановка задачі



Змінні: x_{ij} - обсяг перевезень продукції по маршруту $A_i - B_j$

Математична модель ТЗЛП

Цільова функція

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}; \quad (1)$$

Обмеження

по виробниках:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (2)$$

по споживачах:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Умова існування розв'язку ТЗЛП

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$$

сумарний об'єм
виробництва

сумарний об'єм
споживання

Балансування ТЗЛП

ТЗЛП називається **збалансованою**, якщо для неї виконується умова балансу:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

The diagram illustrates the balance condition equation $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Two callout boxes are connected to the equation by lines. The left box, pointing to the left-hand side $\sum_{i=1}^m a_i$, contains the text "сумарний об'єм виробництва" (total production volume). The right box, pointing to the right-hand side $\sum_{j=1}^n b_j$, contains the text "сумарний об'єм споживання" (total consumption volume).

сумарний об'єм
виробництва

сумарний об'єм
споживання

Метод потенціалів застосовний тільки для збалансованої ТЗЛП.

Математична модель збалансованої ТЗЛП

(алгебраїчна форма представлення)

Цільова функція

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}; \quad (5)$$

Обмеження

по виробниках:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (6)$$

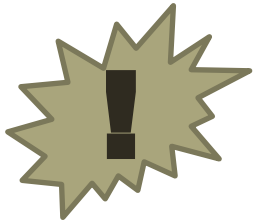
по споживачах:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad (7)$$

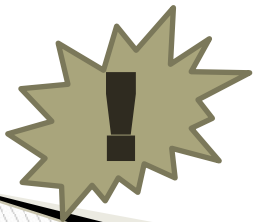
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Теорема 1.

□ Для того, щоб задача (5)-(8) мала допустимий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова балансу.

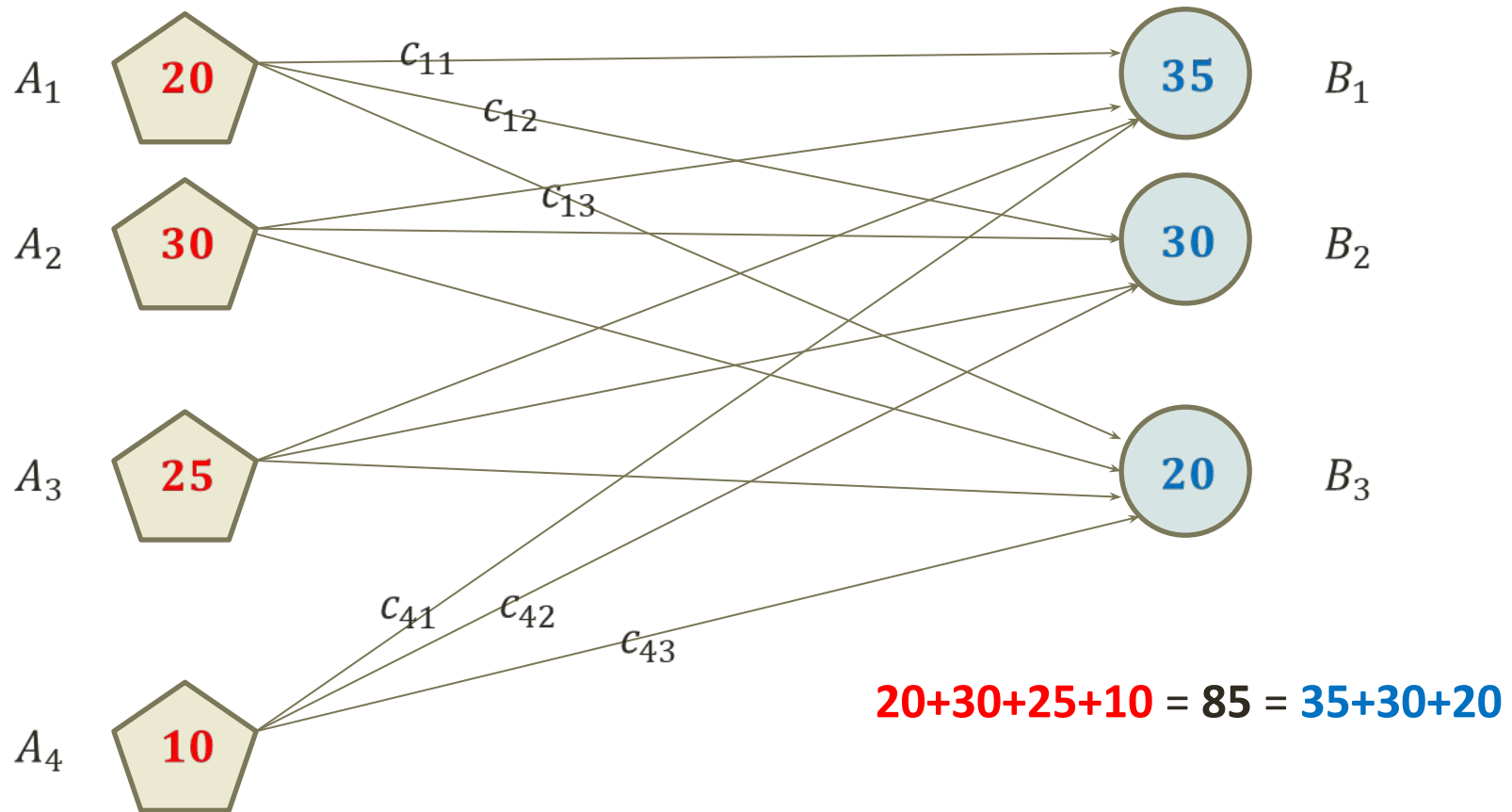


Будь-яка транспортна модель може бути збалансована

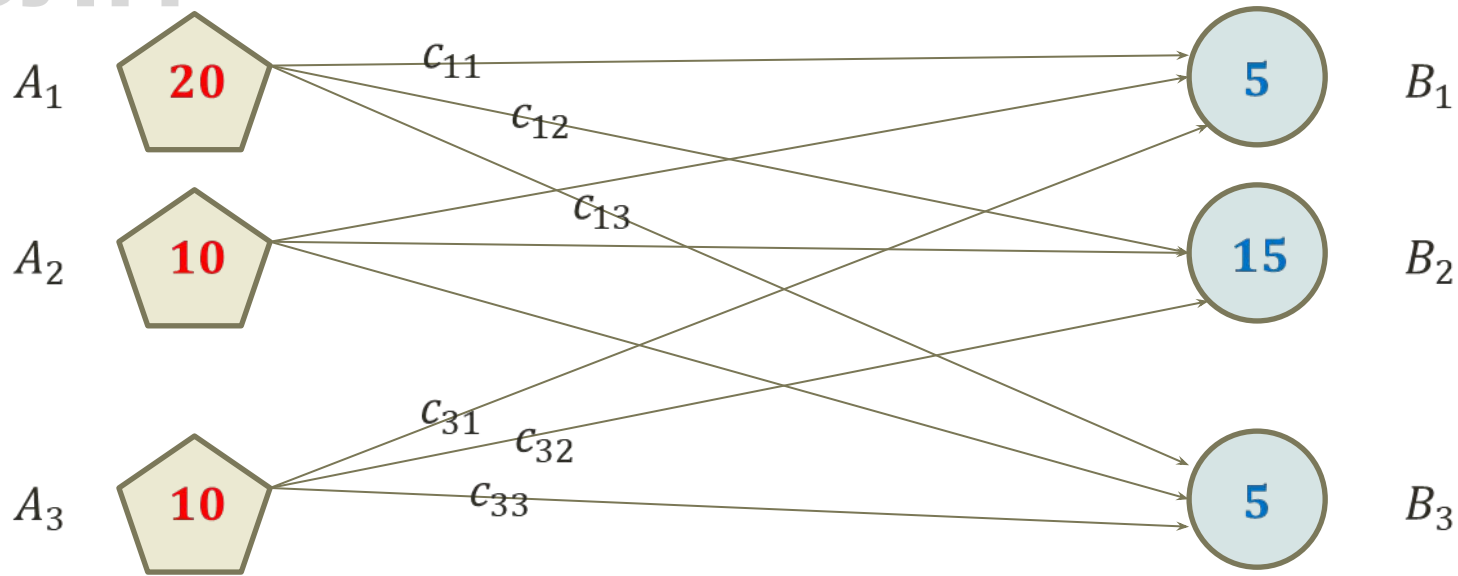


Прагнення збалансувати транспортну задачу (тобто перетворити всі її обмеження на рівність) обумовлене можливістю застосувати в цьому випадку ефективний обчислювальний метод.

Приклад збалансованої ЗЛП

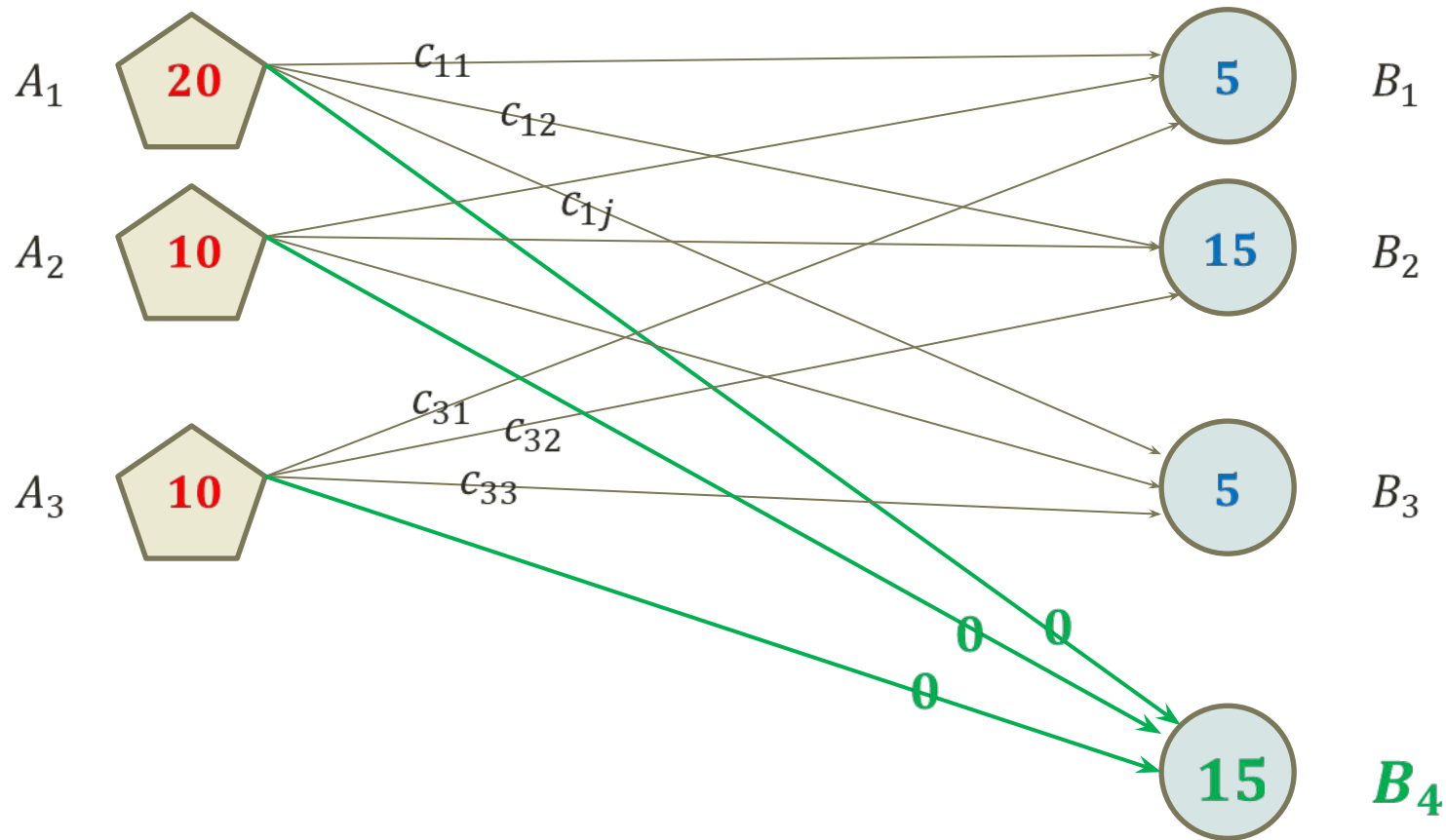


Приклад 1 незбалансованої ЗЛП



$$20+10+10=40 > 25 = 5+15+5$$

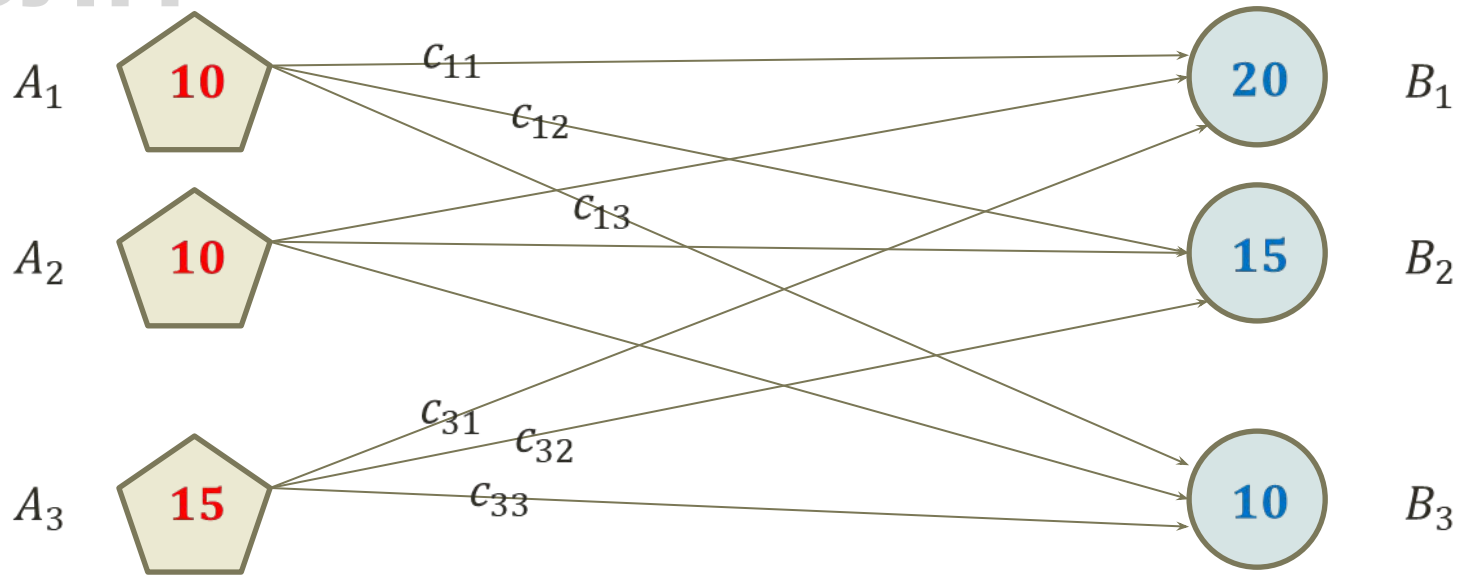
Балансування ТЗЛП (1)



$$20+10+10=40 > 25 = 5+15+5$$

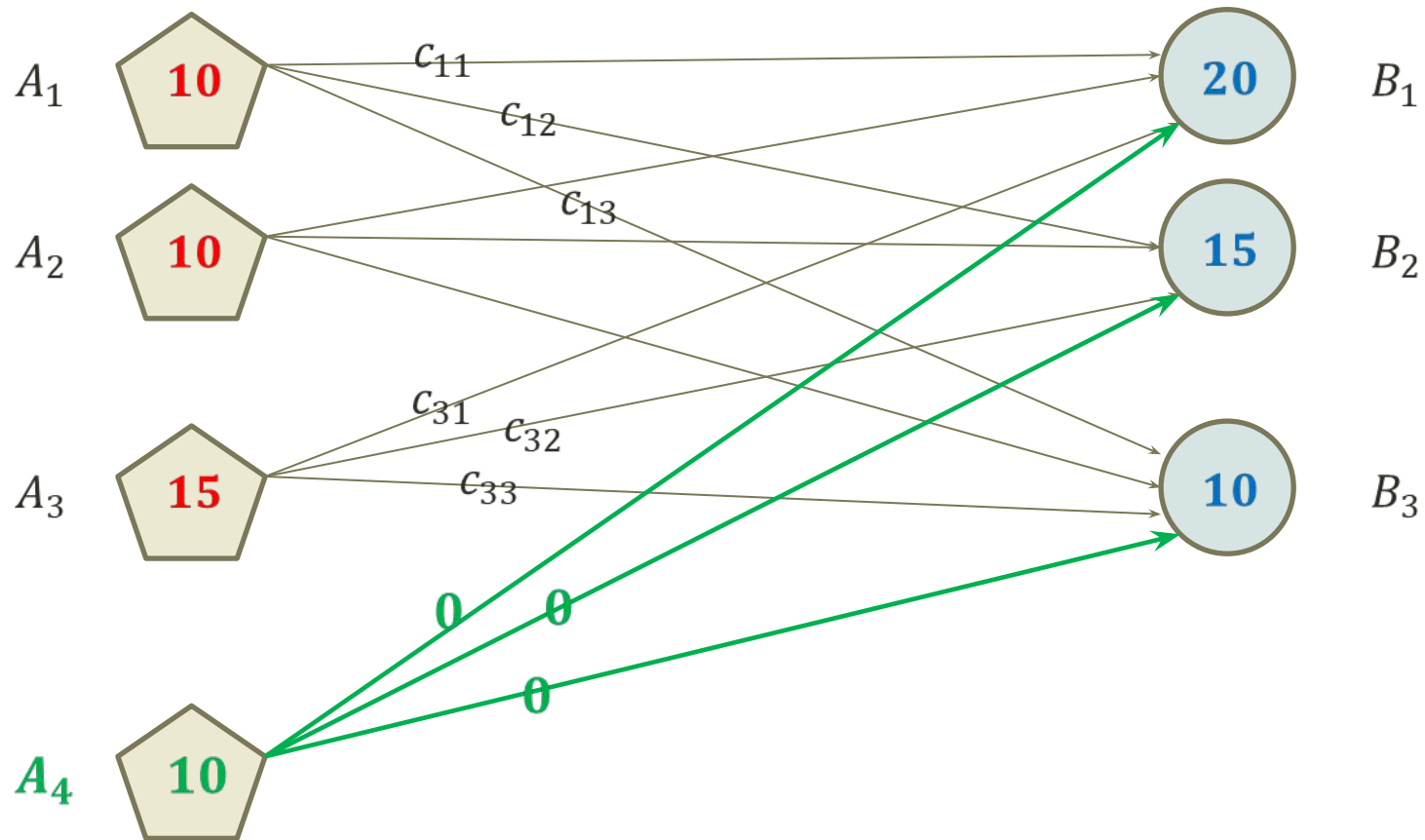
$$b_{\text{фікт}} = 40 - 25 = 15$$

Приклад 2 незбалансованої ЗЛП



$$10+10+15=35 < 45 = 20+15+10$$

Балансування ТЗЛП (2)



$$10+10+15=35 < 45 = 20+15+10$$

$$a_{\text{фікт}} = 45 - 35 = 10$$

Транспортна таблица

c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	
c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	
...	...	...	...	
c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	
b_1	b_2		b_n	

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m};$$

Транспортна таблиця

c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	
c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	
...	...	...	...	
c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	
b_1	b_2		b_n	

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n};$$

Транспортна таблица

c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	
c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	
...	...	...	...	a_m
c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	
x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	
b_1	b_2		b_n	

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij};$$

Приклади збалансованої та незбалансованої ТЗЛП

□ Збалансована ТЗЛП:

			20
			30
			25
			10
35	30	20	

$$20+30+25+10=35+30+20$$

□ Не збалансована ТЗЛП:

			50
			30
			45
			15
20	60	10	

$$50+30+45+15 \neq 20+60+10$$

Балансування ТЗЛП

Якщо не виконується умова балансу, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

			20
			10
			10
5	15	5	

$$b_{\text{фікт}} = 40 - 25 = 15$$

			0	20
			0	10
			0	10
5	15	5	15	40=40

Балансування ТЗЛП

Якщо не виконується умова балансу, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$

			20
			10
			10
5	15	5	

$$b_{\text{фікт}} = 40 - 25 = 15$$

			0	20
			0	10
			0	10
5	15	5	15	40=40

$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$

			10
			10
			15
20	15	10	35<45

$$a_{\text{фікт}} = 45 - 35 = 10$$

			10
			10
			15
0	0	0	10
20	15	10	45=45

Структура матриці обмежень ($Px = p_0$)

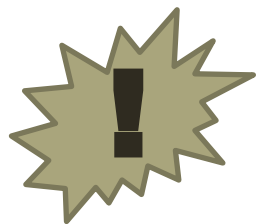
$$x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1n} \ x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2n} \ x_{31} \ x_{32} \ \dots \ x_{3n} \qquad x_{m1} \ x_{m2} \ \dots \ x_{mn}$$

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{1j} = a_1 \\ \\ \sum_{i=1}^m x_{i1} = b_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & :A_m \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & :B_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & :B_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & :B_n \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_m \\ \hline b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \right)$$

Структура векторів системи обмежень

Вектор змінної x_{ij} :

Права частина системи
(стовпець вільних членів):



Кожен вектор містить рівно дві одиниці

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \dots \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \leftarrow i+1 \\ \dots \\ \leftarrow m \\ \text{-----} \\ \leftarrow m+1 \\ \dots \\ \leftarrow m+j-1 \\ \leftarrow m+j \\ 0 \leftarrow m+j+1 \\ \dots \\ \leftarrow m+n \end{matrix}$$

$$p_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \dots \\ a_m \\ \hline b_1 \\ \dots \\ b_{j-1} \\ b_j \\ b_{j+1} \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \dots \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \leftarrow i+1 \\ \dots \\ \leftarrow m \\ \text{-----} \\ \leftarrow m+1 \\ \dots \\ \leftarrow m+j-1 \\ \leftarrow m+j \\ \leftarrow m+j+1 \\ \dots \\ \leftarrow m+n \end{matrix}$$

Математична модель збалансованої ТЗЛП

(векторна форма представлення)

Цільова функція

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}; \quad (5)$$

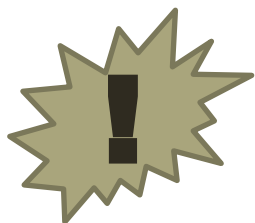
Обмеження

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} = p_0; \quad (6)$$

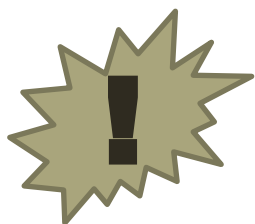
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Властивості ТЗЛП

▣ **Теорема 2.** Ранг матриці P рівний $m + n - 1$.



Перед розв'язанням ТЗЛП (5)-(7) симплекс-методом одне (будь-яке) з обмежень системи (6) повинно бути видаленим (домовимось, що ми видаляємо перше з обмежень)



ДБР містить $m + n - 1$ базисних змінних

Властивості ТЗЛП

Теорема 3. *Будь-який мінор матриці P транспортної задачі приймає одне з трьох числових значень 0, 1 або -1.*

Доведення теореми 3

Властивості матриці P :

1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1

1	1	..	1	0	0	..	0	0	0	..	0	..	0	0	0	..	0	A_1
0	0	..	0	1	1	..	1	0	0	..	0	..	0	0	0	..	0	A_2
0	0	..	0	0	0	..	0	1	1	..	1	..	0	0	0	..	0	A_3
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	0	0	0	..	0	0	0	..	0	..	0	1	1	..	1	A_m
1	0	..	0	1	0	..	0	1	0	..	0	..	0	1	0	..	0	B_1
0	1	..	0	0	1	..	0	0	1	..	0	..	0	0	1	..	0	B_2
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	1	0	0	..	1	0	0	..	1	..	0	0	0	..	1	B_n

Доведення теореми 3

Властивості матриці P :

- 1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1
- 2 Кожен стовець містить не більше двох ненульових елементів

1	1	..	1	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	: A_1
0	0	..	0	1	1	..	1	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	: A_2
0	0	..	0	0	0	..	0	1	1	..	1	..	..	0	0	..	0	: A_3
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	0	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	1	1	..	1	: A_m
1	0	..	0	1	0	..	0	1	0	..	0	..	..	1	0	..	0	: B_1
0	1	..	0	0	1	..	0	0	1	..	0	..	..	0	1	..	0	: B_2
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	1	0	0	..	1	0	0	..	1	..	..	0	0	..	1	: B_n

Доведення теореми 3

Властивості матриці P :

- 1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1
- 2 Кожен стовпець містить не більше двох ненульових елементів

1	1	..	1	0	0	..	0	0	0	..	0	..	0	0	0	..	0	: A_1
0	0	..	0	1	1	..	1	0	0	..	0	..	0	0	0	..	0	: A_2
0	0	..	0	0	0	..	0	1	1	..	1	..	0	0	0	..	0	: A_3
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	0	0	0	..	0	0	0	..	0	..	1	1	..	1	: A_m	
1	0	..	0	1	0	..	0	1	0	..	0	..	1	0	..	0	: B_1	
0	1	..	0	0	1	..	0	0	1	..	0	..	0	1	..	0	: B_2	
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	1	0	0	..	1	0	0	..	1	..	0	0	..	1	: B_n	

3 Множину всіх рядків матриці можна розбити на дві множини M і N , де M складається з перших рядків (відповідних A_i), а N - з останніх (відповідних B_j).

При цьому, якщо два ненульові елементи лежать в одному стовпці матриці, то рядки, що містять ці елементи, належать різним множинам.

Доведення теореми 3

Властивості матриці P :

- 1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1
- 2 Кожен стовець містить не більше двох ненульових елементів

1	1	..	1	0	0	..	0	0	0	..	0	..	0	0	0	..	0	: A_1
0	0	..	0	1	1	..	1	0	0	..	0	..	0	0	0	..	0	: A_2
0	0	..	0	0	0	..	0	1	1	..	1	..	0	0	0	..	0	: A_3
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	0	0	0	..	0	0	0	..	0	..	0	1	1	..	1	: A_m
1	0	..	0	1	0	..	0	1	0	..	0	..	0	1	0	..	0	: B_1
0	1	..	0	0	1	..	0	0	1	..	0	..	0	0	1	..	0	: B_2
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	1	0	0	..	1	0	0	..	1	..	0	0	0	..	1	: B_n

- 3 Множину всіх рядків матриці можна розбити на дві множини M і N , де M складається з перших рядків (відповідних A_i), а N - з останніх (відповідних B_j).

При цьому, якщо два ненульові елементи лежать в одному стовпці матриці, то рядки, що містять ці елементи, належать різним множинам.

- 4 Будь-яка підматриця P' матриці P володіє властивостями 1-3

Доведення теореми 3

Властивості матриці P :

- 1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1
- 2 Кожен стовпець містить не більше двох ненульових елементів

1	1	..	1	0	0	..	0	0	0	..	0	..	0	0	0	..	0	0	..	0	: A_1
0	0	..	0	1	1	..	1	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	0	0	..	: A_2
0	0	..	0	0	0	..	0	1	1	..	1	..	..	0	0	..	0	0	0	..	: A_3
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	0	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	1	1	..	1	0	0	..	: A_m
1	0	..	0	1	0	..	0	1	0	..	0	..	..	1	0	..	0	0	0	..	: B_1
0	1	..	0	0	1	..	0	0	1	..	0	..	..	0	1	..	0	0	0	..	: B_2
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	1	0	0	..	1	0	0	..	1	..	..	0	0	..	1	0	0	..	: B_n

- 3 Множину всіх рядків матриці можна розбити на дві множини M і N , де M складається з перших рядків (відповідних A_i), а N - з останніх (відповідних B_j).

При цьому, якщо два ненульові елементи лежать в одному стовпці матриці, то рядки, що містять ці елементи, належать різним множинам.

- 4 Будь-яка підматриця P' матриці P володіє властивостями 1-3 (достатньо показати, що будь-яка матриця P' , що володіє цими властивостями, має визначник, рівний 0, ± 1)

Доведення теореми 3

□ Доведемо методом індукції за порядком k квадратної -матриці P' .

Доведення теореми 3

Доведемо методом індукції за порядком k квадратної -матриці P' .

Для $k = 1$ теорема справедлива.

1	1	..	1	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	:A ₁
0	0	..	0	1	1	..	1	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	:A ₂
0	0	..	0	0	0	..	0	1	1	..	1	..	..	0	0	..	0	:A ₃
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	0	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	1	1	..	1	:A _m
1	0	..	0	1	0	..	0	1	0	..	0	..	..	1	0	..	0	:B ₁
0	1	..	0	0	1	..	0	0	1	..	0	..	..	0	1	..	0	:B ₂
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	1	0	0	..	1	0	0	..	1	..	..	0	0	..	1	:B _n

Доведення теореми 3

Доведемо методом індукції за порядком k квадратної -матриці P' .

Для $k = 1$ теорема справедлива.

Нехай твердження вірне для матриць порядку $k - 1$.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|c}
 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_1 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_2 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_3 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & :A_m \\
 \hline
 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & :B_1 \\
 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & :B_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & :B_n
 \end{array}$$

Доведення теореми 3

Доведемо методом індукції за порядком k квадратної -матриці P' .

Для $k = 1$ теорема справедлива.

Нехай твердження вірне для матриць порядку $k - 1$.

Нехай P' - квадратна матриця порядку k .

1	1	..	1	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	:A ₁
0	0	..	0	1	1	..	1	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	:A ₂
0	0	..	0	0	0	..	0	1	1	..	1	..	..	0	0	..	0	:A ₃
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	0	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	1	1	..	1	:A _m
1	0	..	0	1	0	..	0	1	0	..	0	..	..	1	0	..	0	:B ₁
0	1	..	0	0	1	..	0	0	1	..	0	..	..	0	1	..	0	:B ₂
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	1	0	0	..	1	0	0	..	1	..	..	0	0	..	1	:B _l

Доведення теореми 3

Можливі три випадки:

а) Кожен стовпець матриці P' має рівно два ненульові елементи

Із властивості 3) $\Rightarrow$ що сума всіх рядків з множини M дорівнює сумі всіх рядків з множини $N \Rightarrow |P'|=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & A_2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & B_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & B_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & :A_m \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & :B_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & :B_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & :B_n \end{array}$$

Доведення теореми 3

Можливі три випадки:

а) Кожен стовпець матриці P' має рівно два ненульові елементи

Із властивості 3) $\Rightarrow$ що сума всіх рядків з множини M дорівнює сумі всіх рядків з множини $N \Rightarrow |P'|=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & A_2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & B_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & B_2 \end{array}$$

б) У деякому стовпці всі елементи дорівнюють нулю $\Rightarrow |P'|=0$

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & :A_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & :A_m \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & :B_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & :B_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & :B_n \end{array}$$

Доведення теореми 3

в) Не всі стовпці містять рівно два ненульових елементи і немає нульових стовпців (в якому-небудь стовпці матриці P' є рівно один ненульовий елемент)

Знайдемо визначник матриці P' розкладенням по цьому стовпцю:

$$|P'| = |P''|,$$

де P'' - підматриця порядку $k - 1$, що отримується викреслюванням в матриці виділеного стовпця і рядка, що містить ненульовий елемент цього стовпця.

$$|P''| = 0, \pm 1$$

Отже

$$|P'| = 0, \pm 1.$$

1	1	..	1	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	:A ₁
0	0	..	0	1	1	..	1	0	0	..	0	..	..	0	0	..	0	:A ₂
0	0	..	0	0	0	..	0	1	1	..	1	..	..	0	0	..	0	:A ₃
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	0	0	0	..	0	0	0	..	0	..	..	1	1	..	1	:A _m
1	0	..	0	1	0	..	0	1	0	..	0	..	..	1	0	..	0	:B ₁
0	1	..	0	0	1	..	0	0	1	..	0	..	..	0	1	..	0	:B ₂
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	..	1	0	0	..	1	0	0	..	1	..	..	0	0	..	1	:B _n

Базисні змінні	$(x_B)_1$	...	$(x_B)_m$	$(x_N)_1$		$(x_N)_j$		$(x_N)_{n-m}$	Розв'язок
z									
$(x_B)_1$	1			0	1	-1	0	1	
...				1	0	1	-1	1	
$(x_B)_i$		1		-1	1	-1	1	0	
...				1	-1	-1	1	0	
$(x_B)_m$			1	-1	0	0	0	-1	

Властивості ТЗЛП

Теорема 4. Якщо усі a_i і b_j у ТЗЛП - цілі, то всі x_{ij} у будь-якому ДБР (в т.ч. і оптимальному) також будуть цілими числами.

Доведення теореми 4

Нехай $x = \{x_{ij}\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ - ДБР ТЗЛП:

$$Px = p_0,$$

І нехай B - відповідна базисна матриця, x_B - вектор базисних змінних ДБР x . Тоді

$$Bx_B = p_0.$$

Розв'язуючи цю квадратну систему рівнянь за методом Крамера, отримуємо, що

$$x_{ij} = \frac{|B_{ij}|}{|B|},$$

де B_{ij} - матриця, отримана з B заміною стовпця p_{ij} на вектор p_0 .

Визначник $|B_{ij}|$ - ціле число і $|B| = \pm 1$ (за теоремою 3) $\Rightarrow x_{ij}$ цілі. ■