Научно-практическая конференция школьников «Вектор познания»

Исследовательская работа

«Геометрия в одной задаче»

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

Автор – Семенников Николай Викторович,
обучающийся 10 класса
МБОУ «Красногобогатырская СОШ»
Судогодского района Владимирской области

Научный руководитель -
Урум Елена Николаевна,
учитель математики
МБОУ «Краснобогатырская СОШ»

Геометрия полна приключений, потому что за каждой задачей скрывается приключение мысли. Решить задачу – это значит пережить приключение. (В. Произволов).

Предлагаемая исследовательская работа посвящена изучению различных методов решения одной задачи планиметрии.
Геометрия – наиболее сложное звено школьной математики. Решение геометрических задач вызывает трудности у многих учащихся. Это связано с обилием различных типов задач, с многообразием методов их решения.

Проблема исследования заключается в изучении различных методов решения планиметрических задач и нахождении задач, решаемых разными методами, для того чтобы качественно подготовиться к ЕГЭ.

Объектом исследования является геометрическая задача из раздела «Планиметрия».
Предметом исследования являются различные методы решения.
Гипотеза состоит в том, что изучать различные методы решения геометрических задач лучше на примере одной задачи, если она будет иметь их несколько.

Цель исследования - поиск рациональных методов решения геометрических задач из раздела планиметрии.
Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**
исследовать разнообразные методы решений планиметрических задач;
найти и решить геометрическую задачу всеми возможными изученными методами;
проанализировать и сравнить полученные решения с целью нахождения наиболее эффективного подхода.

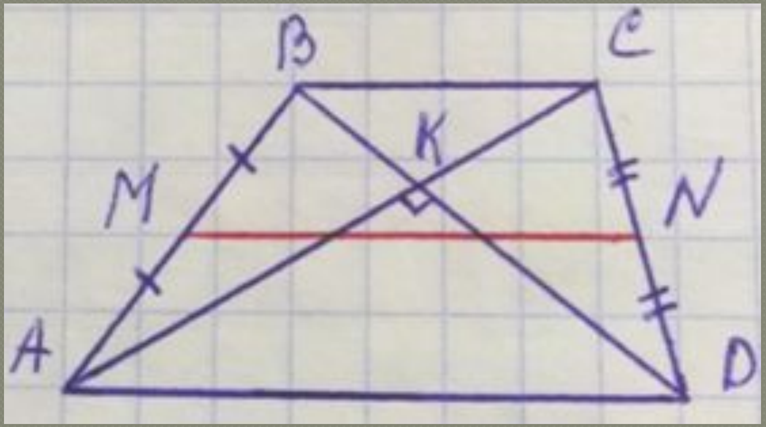
Актуальность темы моей работы определяется необходимостью уметь решать задачи при сдаче ЕГЭ. Большинство задач по планиметрии не решается с помощью жестких алгоритмов, почти каждая из предложенных требует своего подхода. Здесь уже мало иметь те или иные знания, нужно уметь применять их в каждом конкретном случае. Особое значение имеет выработка разнообразных подходов, которые могут быть успешно применены при решении многих геометрических задач. Задача выступает не только в качестве иллюстрации теории, но и рассматривается как самостоятельный объект, как средство развития исследовательской деятельности.

В математике известно **множество методов** решения разных задач, к ним относятся:

- Методы с использованием дополнительных построений.
- Методы, основанные на подобии треугольников.
- Методы, использующие соотношение между углами и сторонами прямоугольного треугольника.
- Координатный метод.
- Методы, использующие векторный аппарат.

В данной работе предлагается несколько методов решения одной задачи по планиметрии, детальный анализ которой позволит убедиться в реальной и существенной пользе проделанной работы.

Задача. В трапеции ABCD диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, причем AC = 16, BD = 12. Найти среднюю линию трапеции.

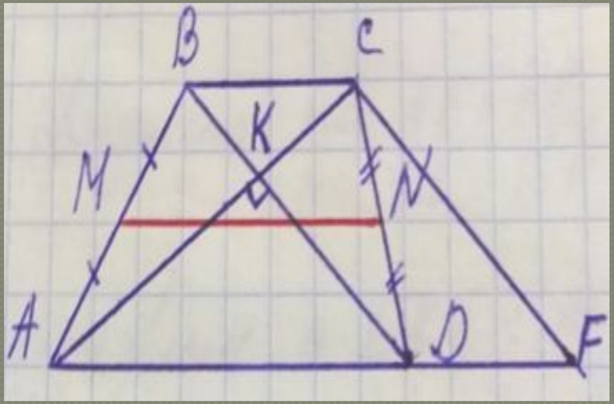


1. Методы, использующие дополнительные построения

1.1 Построение прямой, параллельной диагонали.

1. Проведем CF||BD, $CF \cap AD = F$
2. BCFD – параллелограмм (BC||DF, т. к. ABCD - трапеция, BD||CF по построению), значит BC = DF, BD = CF.
3. AF = AD + DF = AD + BC.
4. Рассмотрим ΔACF: AC = 16, CF = 12, <ACF = 90° (<AKD = <ACF = 90°(соответственные углы при CF||BD и секущей AC)), тогда AF = $\sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$
5. MN = $\frac{1}{2}$ (AD + BC) = $\frac{1}{2}$ AF = 10.

Ответ: 10



1. Методы, использующие дополнительные построения

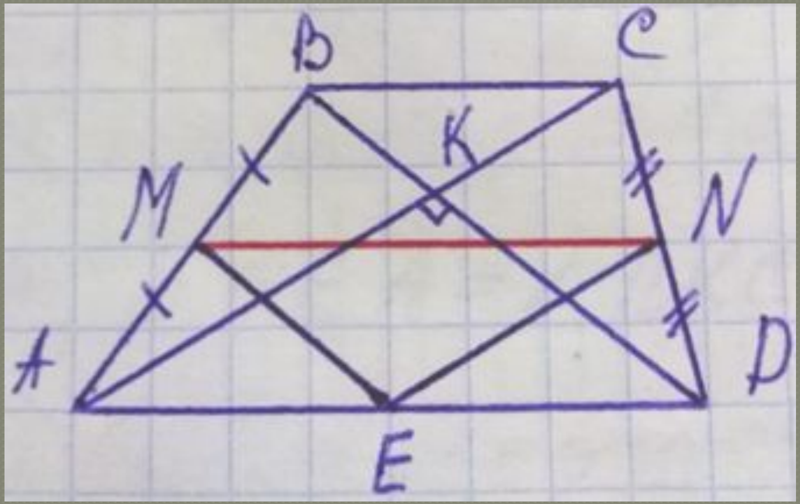
1.2 Построение средних линий треугольников.

1. Проведем средние линии: ΔABD ($ME \| BD$) и ΔACD ($NE \| AC$)

2. Рассмотрим ΔABD: $ME=\frac{1}{2}BD = \frac{12}{2}=6$; ΔACD: $NE=\frac{1}{2}AC = \frac{16}{2}=8$.

3. Рассмотрим ΔMEN: $\angle NEM=90°$ ($ME \| BD$, $NE \| AC$ и $BD \perp AC$, значит $ME \perp NE$) $MN=\sqrt{ME^2+NE^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

Ответ: 10

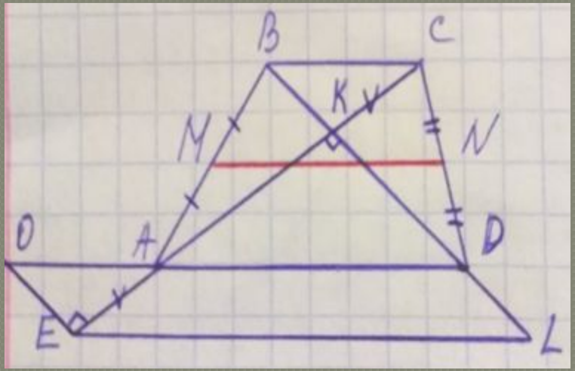


дополнительные построения.

1.3 Применение признаков равенства треугольников (1 признак)

1. Продлим АС на AE=KC, BD на DL=BK.
2. Рассмотрим ΔEKL: KE = AC = 16, KL = BD = 12, <EKL = 90°. EL = $\sqrt{KE^2 + KL^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.
3. Проведем EO||BD, EO∩AD=O.
4. ΔOEA=ΔBKC (по 1 признаку: OE = BK, EA=CK (по построению), <OEA=<BKC = 90° (соответственные при BL|| OE и секущей CE) из этого следует AO=BC.
5. ODLE - параллелограмм, значит OE = DL = BK.
6. MN = $\frac{1}{2}$ (BC + AD) = $\frac{1}{2}$ (OA + AD) $\frac{1}{2}$ EL = 10.

Ответ: 10



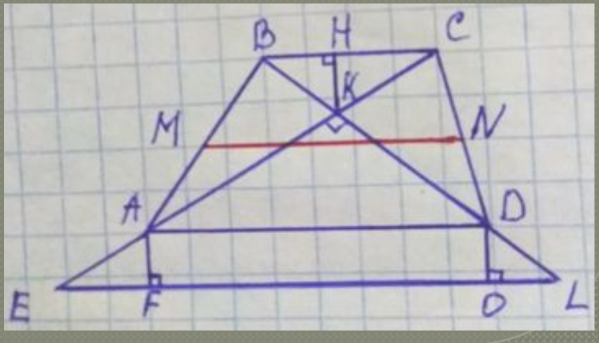
1. Методы, использующие дополнительные построения

1.3 Применение признаков равенства треугольников (2 признак)

1. Продлим AC на **AE=KC** и BD на D**L=K**B.
2. Рассмотрим Δ**EKL**: ⍰**EKL**=90°, **EK** = 16, **KL** = 12, тогда по теореме Пифагора **EL** = $\sqrt{EK^2 + KL^2} = \sqrt{16^2 + 12^2}$ = 20.
3. Постоим: A**F**⊥**EL**, D**O**⊥**EL**, **H**K⊥BC.
4. **ΔEAF=ΔHKC** (**<EAF=<HKC,<AEF=<HCK** (накрест лежащие при **BC||EL** и секущей **EC**), тогда **EF** =**HC**.
5. Δ**DOL**=Δ**KHB** (<**ODL**=<**HKB**, (<**HBK**=<**OLD** (накрест лежащие при **BC||EL** и секущей **BL**), тогда **BH** = **OL**.
6. **EL = EF + FO + OL = AD + BC = 20.**

Значит **MN** = 10.

Ответ: 10.



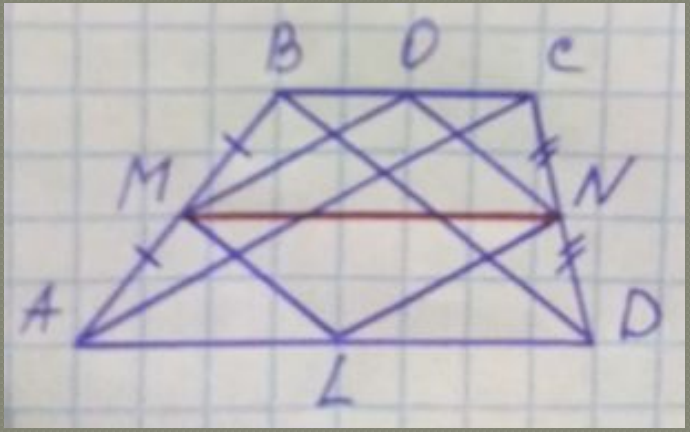
1. Методы, использующие дополнительные построения

1.4 Построение середин сторон трапеции.

1. BO = OC, AL = LD.
2. Проведем ML, LN, ON, MO. MONL – параллелограмм.
3. $MO \parallel AC$, $MO = \frac{1}{2}AC = 8$, $LN \parallel AC$, $LN = \frac{1}{2}AC = 8$.
4. $ON \parallel BD$, $ON = \frac{1}{2}BD = 6$, $ML \parallel BD$, $ML = \frac{1}{2}BD = 6$.
5. Так как $AC \perp BD$, то (<MON = 90°, значит MONL – прямоугольник
6. Рассмотрим ΔMLN: MLN = 90°, ML = 6, LN = 8. По теореме Пифагора

$MN = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$

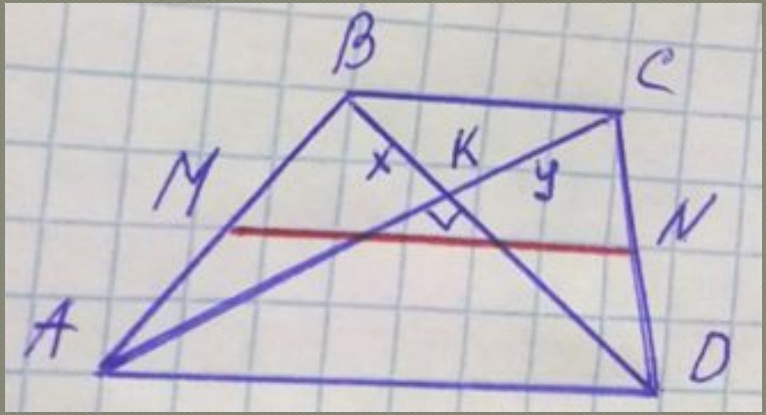
Ответ: 10.



2. Метод, основанный на подобии треугольников.

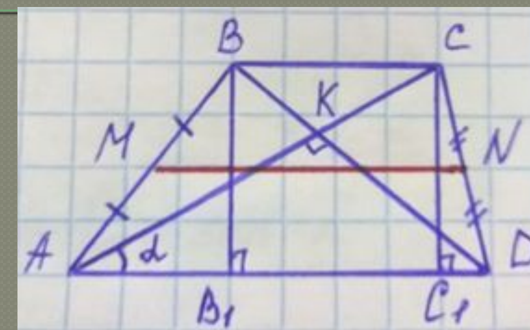
1. Δ BKC~ΔAKD (по 2-м углам <BKC=<AKD=90° и <BCK=<DKA (накрест лежащие при BC||AD и секущей AC)
2. Пусть **BK** = **x**, **KC** = **y**, тогда **KD** = 12 – **x**, **AK** = 16 – **y**, **y**= 4/3**x**.
3. ΔAKD: по теореме Пифагора AD= $\sqrt{(16-y)^2+(12-x)^2}$ = 20 - $\frac{5}{3}$**x**
4. Δ BKC: по теореме Пифагора BC= $\sqrt{x^2+y^2}$ = $\frac{5}{3}$**x**
5. BC + AD = $\frac{5}{3}$**x** + 20 - $\frac{5}{3}$**x** = 20, а значит **MN** = 10.

Ответ: 10.



3. Методы, использующие соотношение между углами и сторонами треугольника.

3.1 Метод площадей и тригонометрия.



1. Проведем высоты $BB_1=CC_1=h$
2. $S_{ABCD}= \frac{1}{2}d_1d_2 \sin\alpha=96$.
3. $S_{ABCD}= \frac{1}{2}(BC + AD)h = MN\cdot h$
4. Рассмотрим ΔBB_1D: $\sin\alpha=(90-\alpha)=\frac{h}{12}$, тогда $\cos\alpha=\frac{h}{12}$.
5. Рассмотрим ΔCC_1A: $\sin\alpha=\frac{h}{16}$.
6. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$(основное тригонометрическое тождество):$\frac{h^2}{256}+\frac{h^2}{144} = 1$, $h = \frac{48}{5}$
7. Приравняв обе формулы площади трапеции, получаем: $MN=10$.

Ответ: 10.

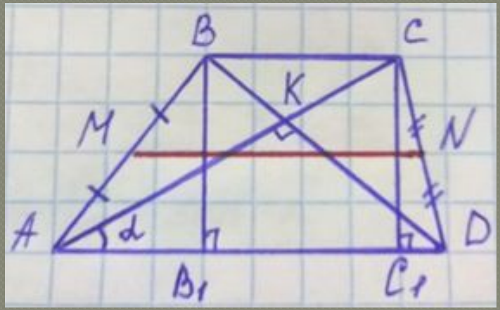
3. Методы, использующие соотношение между углами и сторонами треугольника.

3.2 Метод высот.

1. Проведем высоты BB1=CC1=h
2. ΔACC1: по теореме Пифагора AC1 = $\sqrt{AC^2 - h^2} = \sqrt{256 - h^2}$
3. ΔDBB1: по теореме Пифагора DB1 = $\sqrt{BD^2 - h^2} = \sqrt{144 - h^2}$
4. AC1+DB1= $\sqrt{256 - h^2} + \sqrt{144 - h^2}$=AB1+B1C1+B1C1+C1D=AD + BC.
5. MN=(AD + BC)/2 =($\sqrt{256 - h^2} + \sqrt{144 - h^2}$)/2.
6. ΔBKC~ΔAKD, тогда tgCAD=3/4
7. ΔACC1: tgCAD = $\frac{CC1}{AC1} = \frac{h}{\sqrt{256 - h^2}} = \frac{3}{4}$. Решаем это уравнение, h = 9,6
8. Подставим h = 9,6 в уравнение:

MN=($\sqrt{256 - h^2} + \sqrt{144 - h^2}$)/2 =

= (12,8+7,2)/2 = 10.



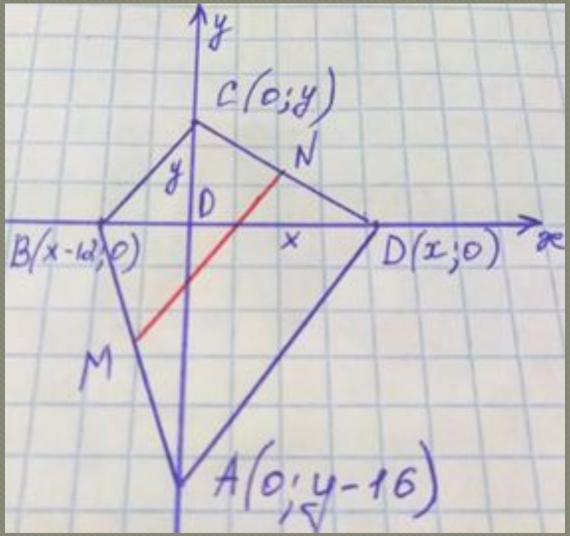
4. Метод координат.

1. Зададим оси координат по прямым: BD и AC точка O(0; 0)
2. Координаты вершин: A(0; **y**-16); B(**x**-12; 0); C(0;**y**); D(**x**; 0).
3. Найдем координаты точек M, N:

M($\frac{x-12}{2}$; $\frac{y-16}{2}$), N($\frac{x}{2}$; $\frac{y}{2}$)

4. Найдем длину MN = $\sqrt{\left(\frac{x-12}{2}-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y-16}{2}-\frac{y}{2}\right)^2}=10$

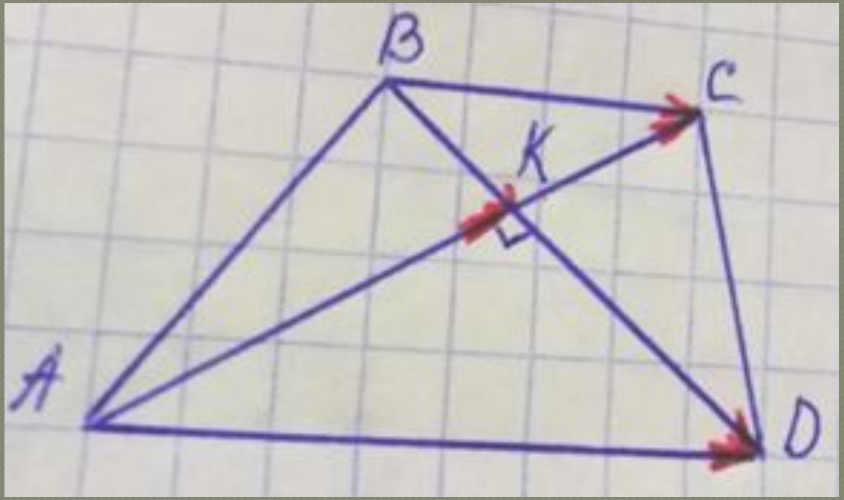
Ответ: 10.



5. Векторный метод.

1. AD=AK+KD, BC=BK+KC (правило треугольника)
2. AD+BC = AK+KD+BK+KC = AC+BD = 2AD*BC*cos0+BC^2+AD^2 = =AC^2+2AC*BD*cos90+BD^2 AD+BC =20.
3. MN = (AD+BC)/2=10.

Ответ: 10.



Заключение

В ходе моей работы было выявлено 10 различных методов решения одной конкретной задачи из раздела «планиметрия». На примере этой задачи можно увидеть многообразие геометрической теории. Проведенное исследование позволило сделать следующие выводы:
Самым понятным и простым является метод, в котором используются дополнительные построения. Подробный разбор способов решения задач является хорошим подспорьем для того, чтобы освежить в памяти пройденный материал. При работе над задачей формируется логическое мышление, развивается интуиция, систематизируются знания. Овладевая основными методами решения задач, можно рационально планировать поиск решения задачи, выполнять полезные преобразования условия задачи, а также использовать известные приемы познавательной деятельности – наблюдение, сравнение, обобщение.
Все перечисленное создает условия для формирования навыков исследовательской деятельности, способствующей накоплению творческого потенциала.

источников и литературы

1.Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. «Геометрия 7-9», Москва, «Просвещение», 2005г.
2.Э.Г.Готман, З.А.Скопец. «Задача одна - решения разные».
3.А.И. Громов, В.М. Савчин «Пособие - репетитор по математике», Ростов-на-Дону, «Феникс», 2001г.
4.Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский «Пособие для учащихся 7-11 классов общеобразовательных учреждений», Москва, «Просвещение», 2000г.
5.Д.Ф.Изаак. «Поиски решения геометрической задачи». «Математика в школе»№6,1998.
6.Я.П.Понарин. «Задача одна – решений много». «Математика в школе» №1,1992.