ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть на отрезке *[a,b]* задана неотрицательная функция *y=f(x)*.

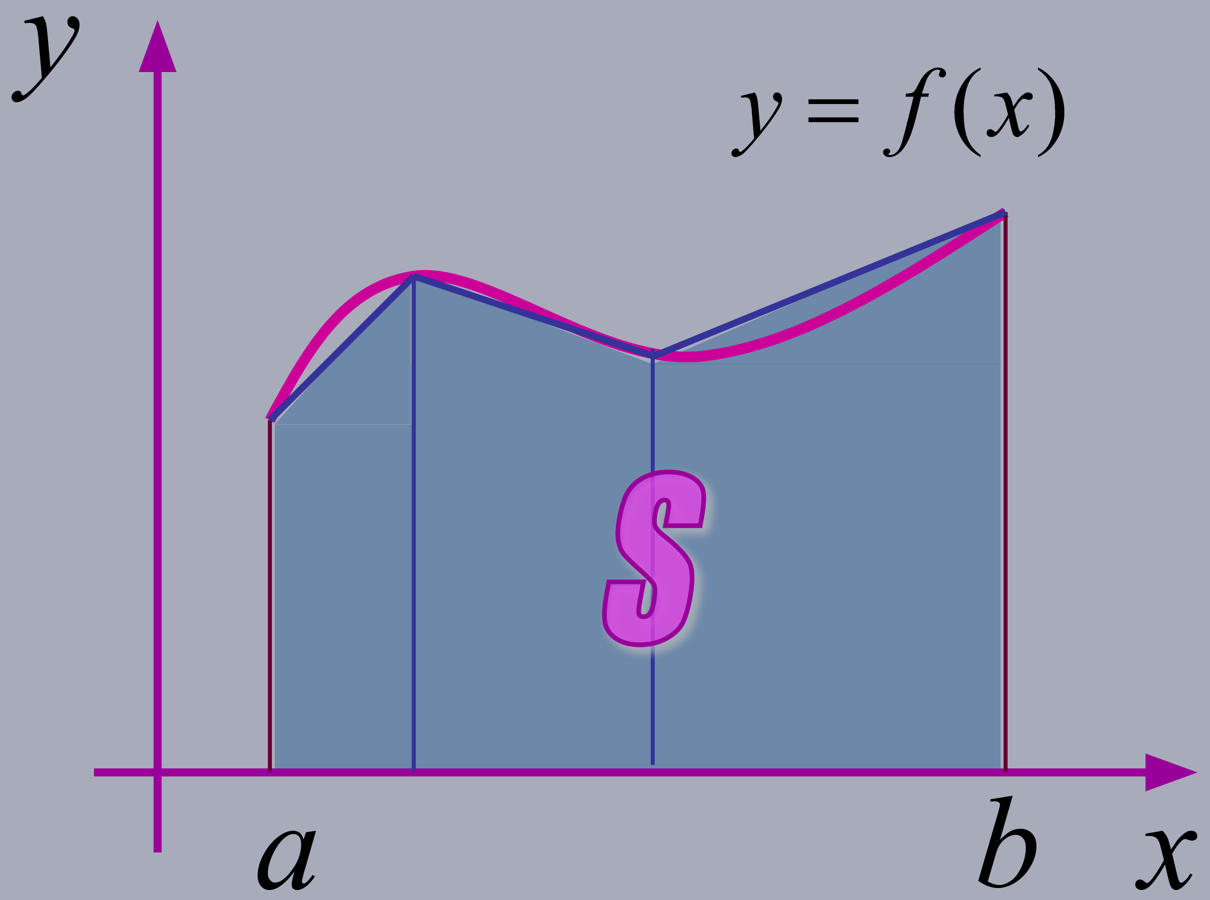
Требуется найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x)*, прямыми *x=a*, *x=b* и осью абсцисс *y=0*.

Рассмотрим ломаную, расположенную достаточно близко к кривой.

Фигура под ломаной состоит из трапеций и ее площадь равна сумме площадей всех трапеций:

$$S = \sum S_{трап}$$

Причем, площадь под кривой будет приближенно равна площади под ломаной, если ломаная достаточно близко подходит к кривой.



y
y = f(x)
S
a
b
x

За искомую площадь под кривой берут предел площади под ломаной при условии, что ломаная неограниченно приближается к кривой.

Разобьем отрезок *[a,b]* на n элементарных отрезков точками x_0, x_1, …x_n .

Положим $$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

На каждом из отрезков выберем точку ξ_i , и найдем значение функции в этой точке

$$f(\xi_i)$$

Сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

называют интегральной суммой для функции y=f(x) на отрезке [a,b] .

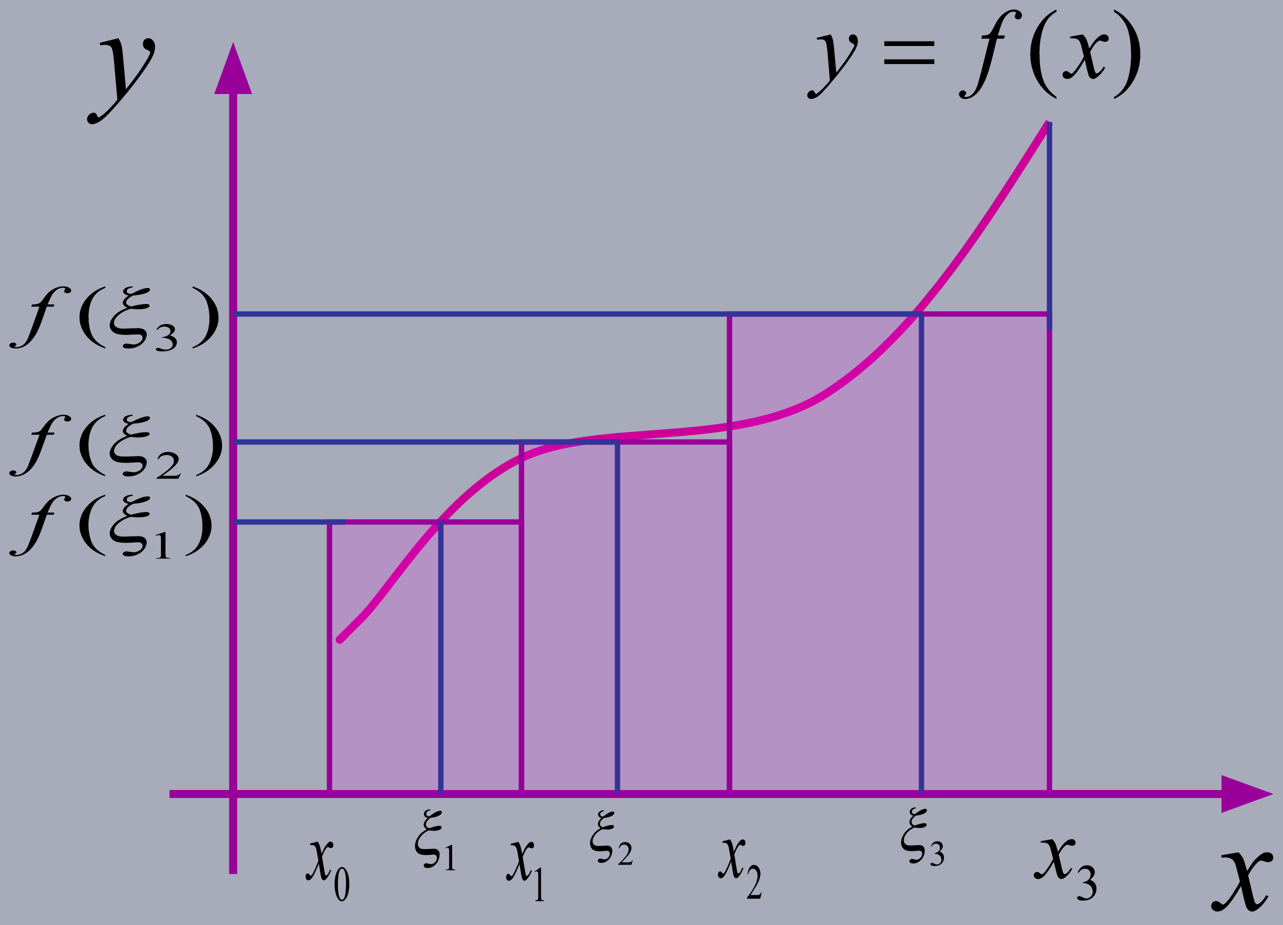
Интегральная сумма зависит от способа разбиения отрезка и выбора точек ξ_i

Каждое отдельное слагаемое в интегральной сумме

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

равно площади S_i прямоугольника со сторонами

$$f(\xi_i) \quad \text{и} \quad \Delta x_i$$



y
$y = f(x)$
$f(\xi_3)$
$f(\xi_2)$
$f(\xi_1)$
x_0
ξ_1
x_1
ξ_2
x_2
ξ_3
x_3
x

Наибольший из отрезков разбиения

$$\left[x_{i-1}, x_i\right]$$

обозначим как

$$\max \Delta x_i$$

Вся интегральная сумма будет равна

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\max \Delta x_i \to 0$ ***не зависящий от способа разбиения отрезка [a,b] и выбора точек*** ξ_i***, то он называется <u>определенным интегралом</u> от функции y=f(x) на отрезке [a,b].***

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Функция y=f(x) называется интегрируемой на отрезке [a,b].

Числа a и b называются нижним и верхним пределом, соответственно.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$

есть семейство функций, а определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

есть определенное число.

По определению предполагается, что $a < b$.

Положим

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

С учетом этого несущественно, какой предел больше или меньше.

Если $a = b$, то

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$$

$$2\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРА

Необходимое условие существования определе

Интегрируемая на отрезке [a,b] функция y=f(x) ограничена на этом отрезке.

Достаточное условие существования определе

Если на отрезке [a,b] функция y=f(x) непрерывна, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного и

1

Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство:

Пусть фиксировано разбиение отрезка [a,b] и выбор точек

$$\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$$

Рассмотрим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot f(\xi_i)\Delta x_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Переходим к пределу в левой и правой части равенства при $\max \Delta x_i \to 0$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} k \cdot f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} k \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= k \cdot \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Следовательно по определению:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

2

Определенный интеграл от алгебраической суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций.

$$\int_a^b \bigl(f(x) \pm g(x)\bigr)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3

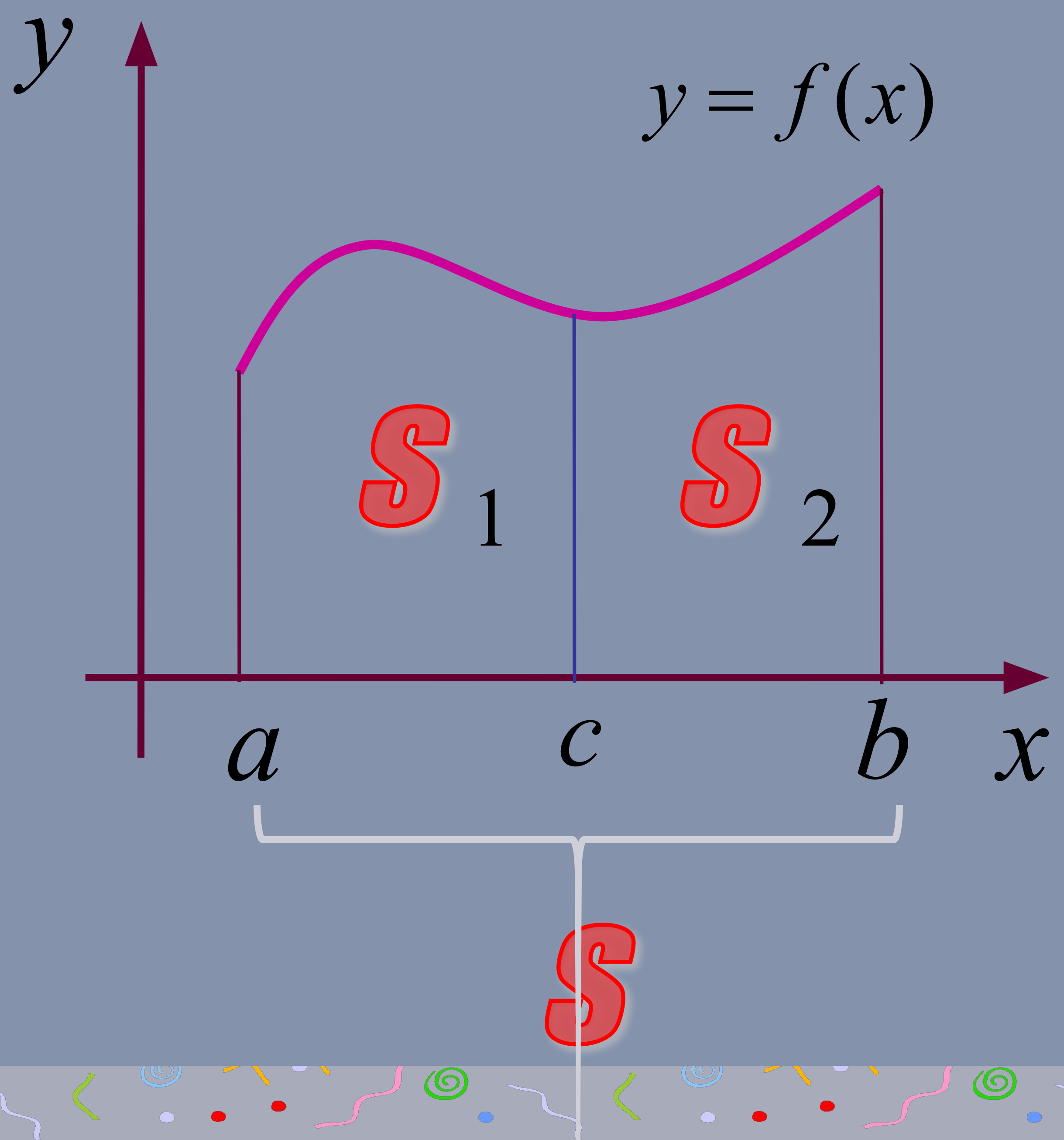
Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов по каждому из участков разбиения.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Геометрически это означает, что если a<c<b и функция y=f(x) неотрицательна на [a,b], то согласно геометрическому смыслу определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = S \quad \int_a^c f(x)dx = S_1 \quad \int_c^b f(x)dx = S_2$$

$$S_1 + S_2 = S$$


y
y = f(x)
S 1
S 2
a
c
b
x
S

4

Если на [a,b], где a<b, $f(x) \le g(x)$

то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx}$$

Доказательство:

Пусть фиксировано разбиение отрезка [a,b] и выбор точек $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$

Если $f(x) \le g(x)$ то для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

Переходим к пределу в левой и правой части неравенства при $\max \Delta x_i \to 0$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Следствие.

Пусть на [a,b], где a<b,

$$m \le f(x) \le M$$

где m и M некоторые числа. Тогда

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$$

Доказательство:

По свойству 4 имеем:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

По свойству 1 и геометрическому смыслу определенного интеграла:

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$$

$$\int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Теорема о среднем

Если на $[a,b]$, где $a<b$, функция $y=f(x)$ непрерывна, то найдется такое значение

$$\xi \in [a,b]$$

что

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)}$$

Доказательство:

По свойству функции, непрерывной на отрезке, для произвольного значения

$$x \in [a,b]$$

справедливо неравенство:

$$m \leq f(x) \leq M$$

Где m и M – наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке. Тогда

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$m\le\int_a^b f(x)dx\cdot\frac{1}{b-a}\le M$$

Но функция, непрерывная на отрезке, принимает любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значениями, поэтому найдется такое число

$$\xi\in[a,b]$$

что

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a)$$

Пусть

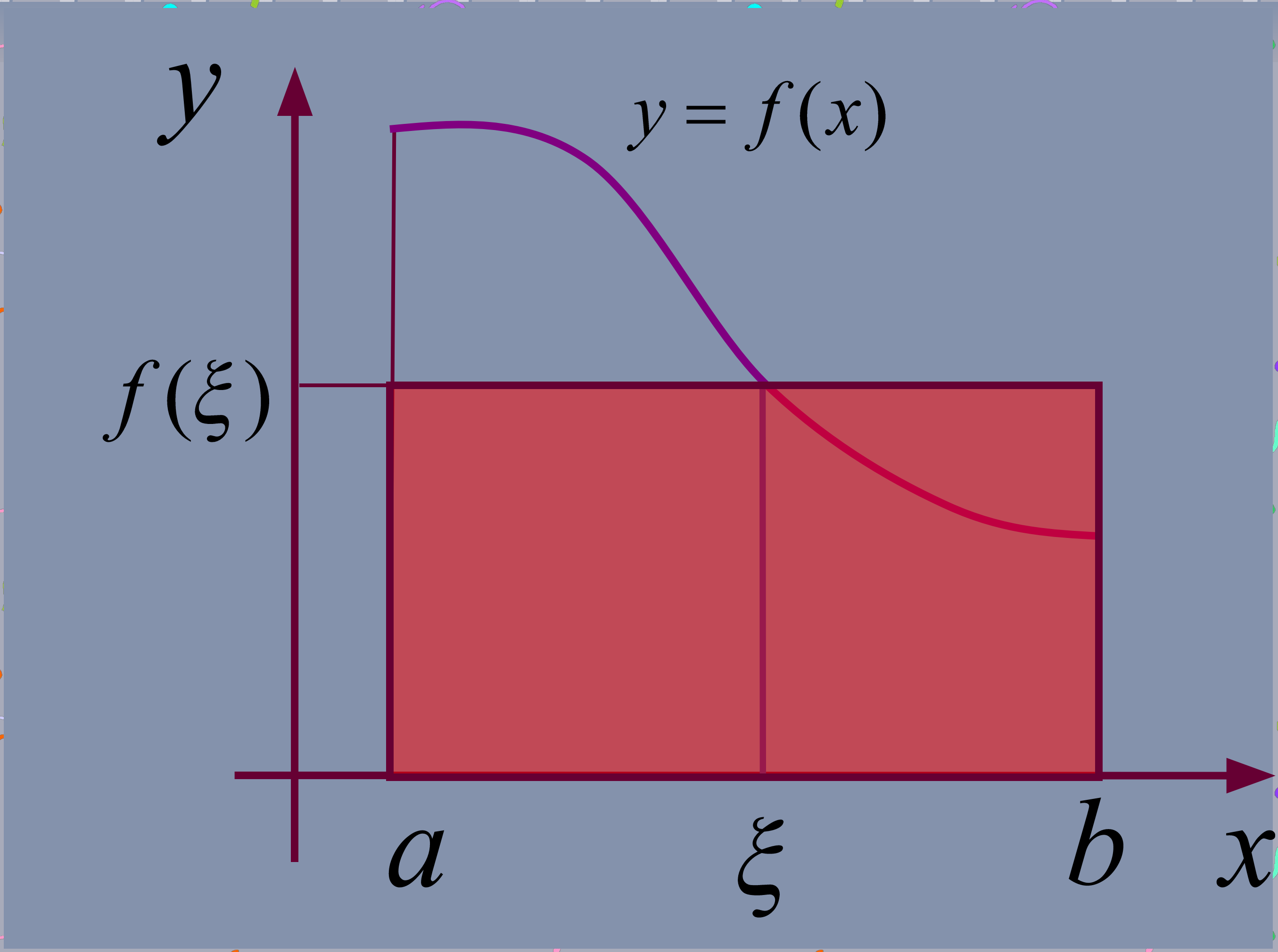
$$f(x) \geq 0$$

Тогда теорема о среднем утверждает, что найдется такая точка

$$\xi \in [a,b]$$

что площадь под кривой *y=f(x)* на [a,b] равна площади прямоугольника со сторонами

$$f(\xi) \quad u \quad (b-a)$$



y
y = f(x)
f(ξ)
a
ξ
b
x

Равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$

называется формулой среднего значения.

$f(\xi)$ **называется средним значением функции.**

6

Геометрический смысл определенного инт

Если на [a,b] функция y=f(x) неотрицательна, то площадь под этой кривой численно равна определенному интегралу

$$\int_a^b f(x)dx = S$$