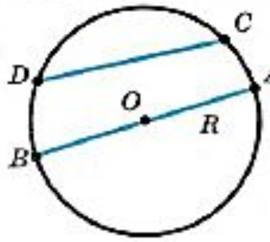
ОКРУЖНОСТЬ, ХОРДЫ И ДУГИ



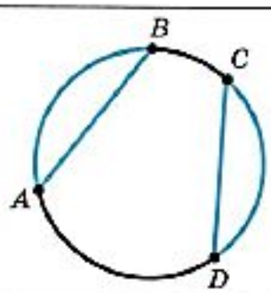
Определение. ***Окружность*** — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

O — центр окружности; OA — радиус; AB — диаметр.

CD — хорда (отрезок, соединяющий две точки окружности).

Наибольшая хорда — диаметр

Свойства



Если $\cup AB = \cup CD$,

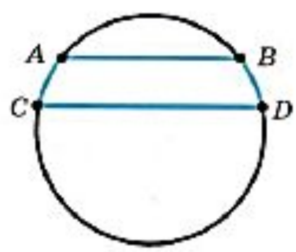
то $AB = CD$

(равные дуги стягивают равные хорды).

Если $AB = CD$,

то $\cup AB = \cup CD$

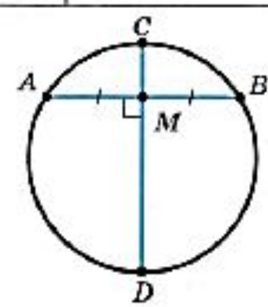
(равные хорды стягивают равные дуги).



Если $AB \parallel CD$,

то $\cup AB = \cup BD$

(параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги).

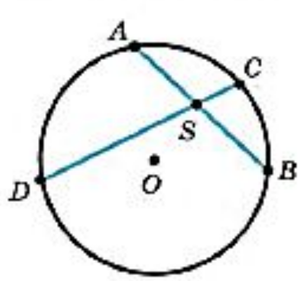


Если CD — диаметр, AB — хорда,

$CD \perp AB$, **то** $AM = MB$ (и $\cup AC = \cup CB$).

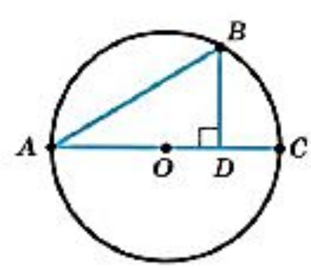
$AM = MB$, **то** $CD \perp AB$.

Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду (и дуги, которые она стягивает) пополам, и наоборот.



$\boxed{AS \cdot SB = CS \cdot SD}$,

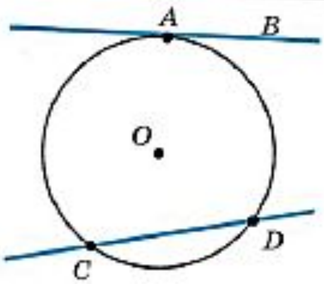
где S — точка пересечения хорд AB и CD



Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$,

то $\boxed{\begin{array}{c} AB^2 = AD \cdot AC \\ BD^2 = AD \cdot DC \end{array}}$

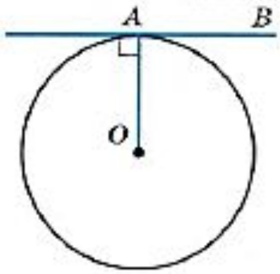
ОКРУЖНОСТЬ. КАСАТЕЛЬНЫЕ И СЕКУЩИЕ



Определение. Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют ***касательной к окружности***.

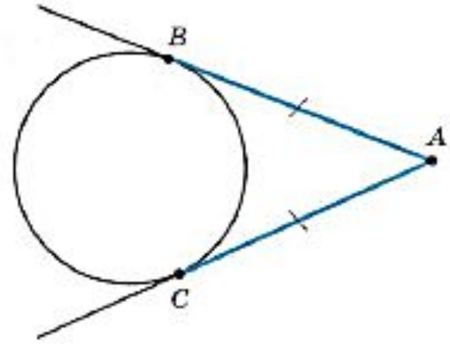
AB — касательная; A — точка касания;
CD — секущая (прямая, имеющая с окружностью две общие точки).

Свойства



$OA \perp AB$

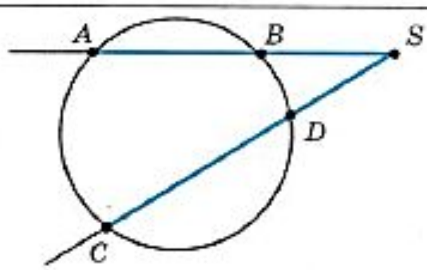
Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



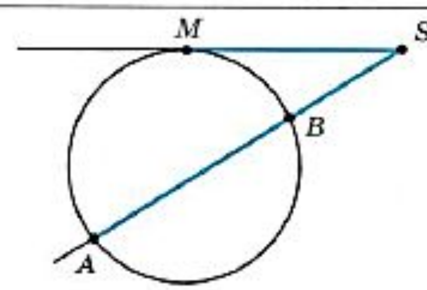
$AB = AC$

(B и C — точки касания)

Если из одной точки к одной окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны между собой.

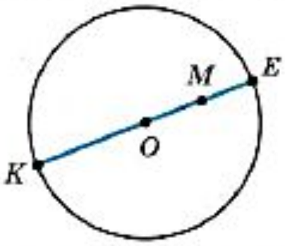


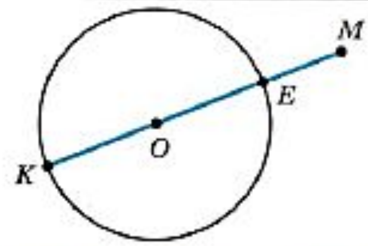
$SA \cdot SB = SC \cdot SD$



$SA \cdot SB = SM^2$,

где SM — касательная, M — точка касания





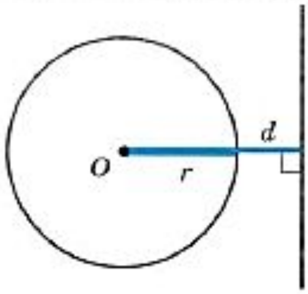
Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки до точек окружности измеряются по прямой, проходящей через данную точку и центр окружности.

ME — наименьшее расстояние от точки M до точек окружности;

MK — наибольшее расстояние от точки M до точек окружности

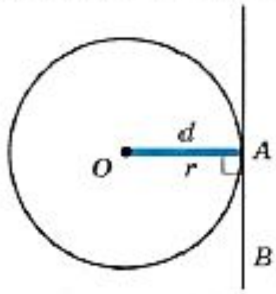
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Пусть d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности.



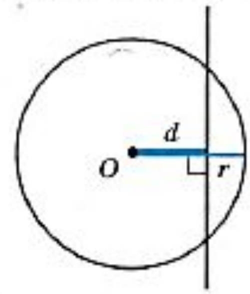
$\boxed{d > r}$

Общих точек нет.



$\boxed{d = r}$

Одна общая точка (прямая AB — касательная).



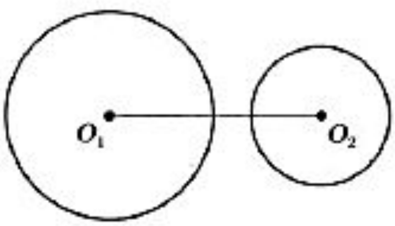
$\boxed{d < r}$

Две общие точки.

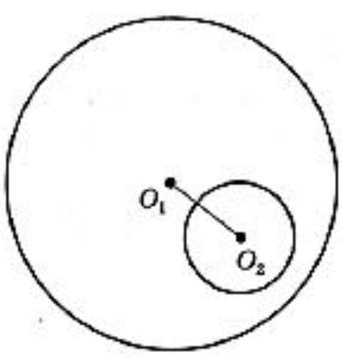
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Пусть $O_1O_2 = d$ — расстояние между центрами окружностей, r_1 и r_2 — радиусы окружностей $(r_1 > r_2)$.

Общих точек нет

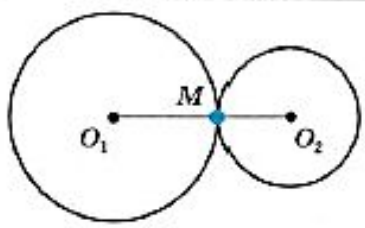


$\boxed{d > r_1 + r_2}$

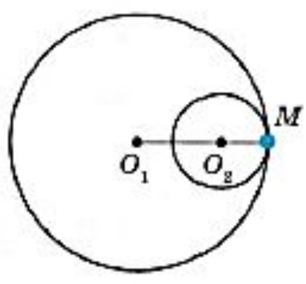


$\boxed{0 < d < r_1 - r_2}$

Одна общая точка (окружности касаются в этой точке)



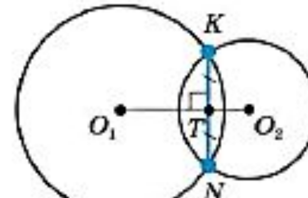
$\boxed{d = r_1 + r_2}$ — внешнее касание



$\boxed{d = r_1 - r_2}$ — внутреннее касание

$M \in O_1O_2$ — точка касания лежит на прямой, проходящей через центры окружностей.

Две общие точки (окружности пересекаются)

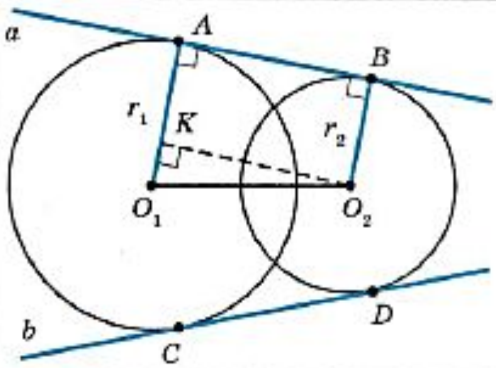


$\boxed{r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2}$

$$\boxed{\begin{array}{c} KN \perp O_1O_2 \\ KT = TN \end{array}}$$

ОБЩИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

1. Окружности пересекаются ($|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$)



Две общие касательные a и b

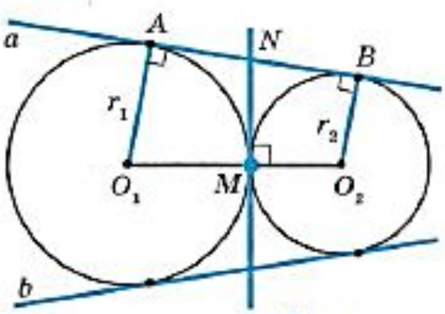
$AB = CD$

Если $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$

Если $r_1 \neq r_2$, то a и b пересекаются на прямой O_1O_2

Типичное дополнительное построение: $O_2K \perp O_1A$

2. Окружности касаются (M — точка касания)



Внешнее касание
($O_1O_2 = r_1 + r_2$)

Три общие касательные: MN; a; b

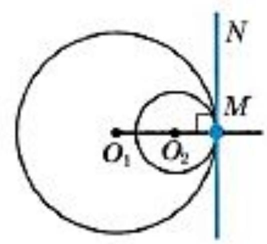
$MN \perp O_1O_2$

Если $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$

Если $r_1 \neq r_2$, то a и b пересекаются на прямой O_1O_2

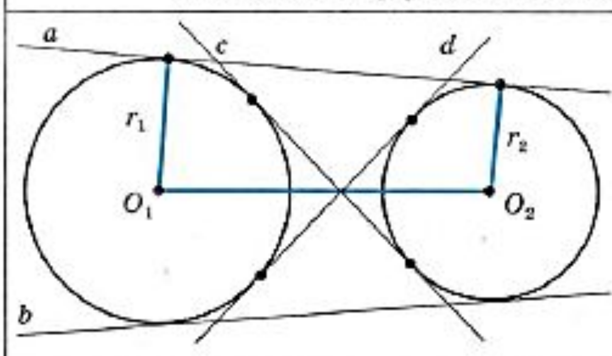
Внутреннее касание
($O_1O_2 = |r_1 - r_2|$)

Одна общая касательная — MN



$MN \perp O_1O_2$

3. Одна окружность лежит вне другой ($O_1O_2 > r_1 + r_2$)



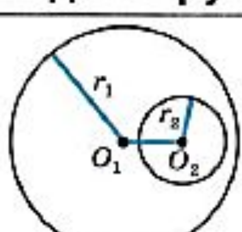
Четыре общие касательные: a; b; c; d

c и d пересекаются на отрезке O_1O_2

Если $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$

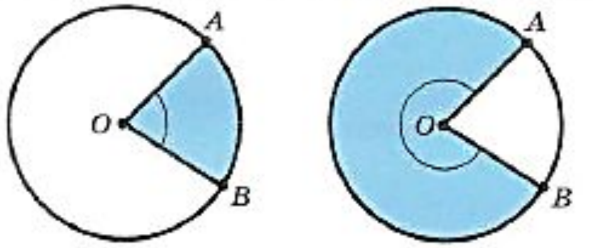
Если $r_1 \neq r_2$, то a и b пересекаются на прямой O_1O_2

4. Одна окружность лежит внутри другой ($O_1O_2 < |r_1 - r_2|$)



Общих касательных нет

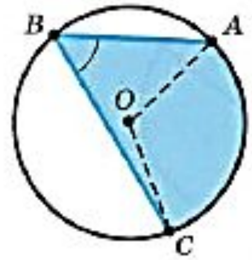
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ



$\angle AOB$ — центральный угол

$\angle AOB = \cup AB$

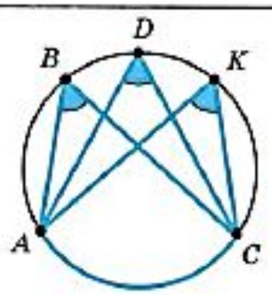
Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.



$\angle ABC$ — вписанный угол

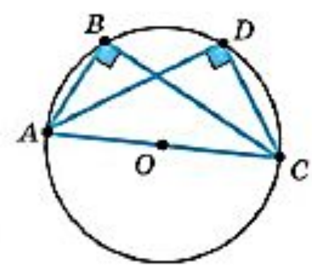
$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.



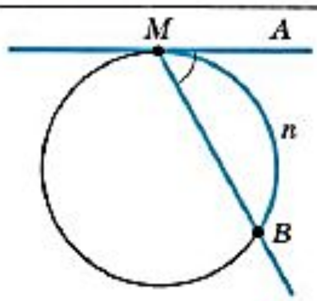
$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.



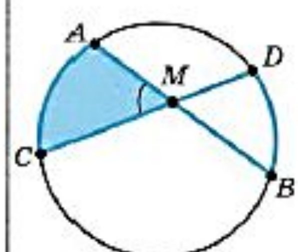
$\angle ABC = \angle ADC = 90°$

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.



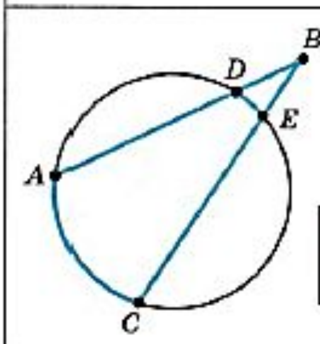
MA — касательная, MB — секущая.

$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$



AB и CD — хорды

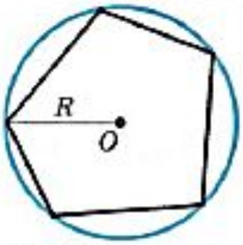
$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DB)$



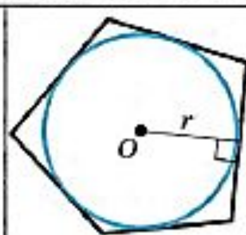
BA и BC — секущие

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИКИ (описанная и вписанная окружности)



Вписанный многоугольник — все вершины лежат на окружности.



Описанный многоугольник — все стороны являются касательными к окружности.

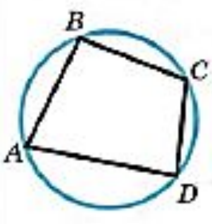
$$\boxed{S_{\text{опис}} = \frac{P \cdot r}{2}},$$

где P **— периметр,**

r **— радиус вписанной окружности.**

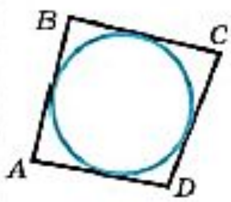
O **— точка пересечения биссектрис внутренних углов.**

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



$$\boxed{\angle A + \angle C = 180^\circ,\quad \angle B + \angle D = 180^\circ}$$

И наоборот: если у четырехугольника сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

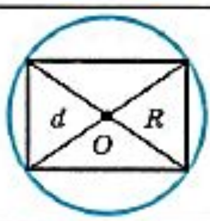


$$\boxed{AB + CD = BC + AD}$$

(суммы длин противолежащих сторон равны)

И наоборот: если у выпуклого четырехугольника суммы длин противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.

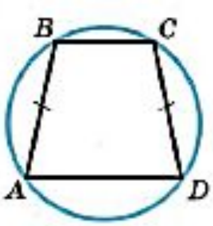
ПРЯМОУГОЛЬНИК



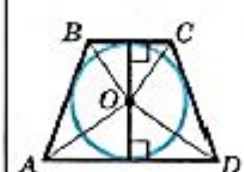
$$\boxed{R = \frac{1}{2}d}$$

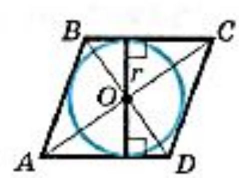
1. Если параллелограмм вписан в окружность, то он — прямоугольник.
2. Центр окружности, описанной около прямоугольника, — точка пересечения его диагоналей.

ТРАПЕЦИЯ И РОМБ



Если $ABCD$ **— вписанная трапеция, то** $AB = CD$



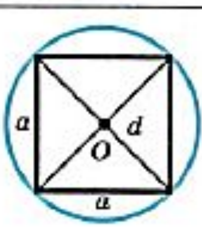


$$\boxed{d_{\text{впис. окр}} = h}$$

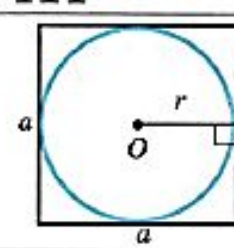
O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

$$\boxed{\angle AOB = \angle COD = 90^\circ}$$

КВАДРАТ



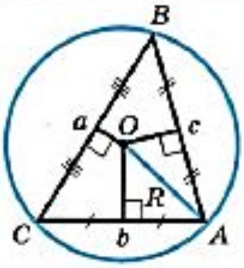
$$\boxed{R_{\text{опис}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$



$$\boxed{r_{\text{впис}} = \frac{1}{2}a}$$

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Описанная окружность



O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

$OA = OB = OC = R$

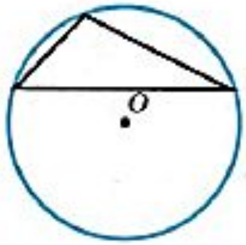
$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin A}}$$

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

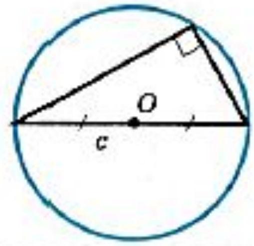
Положение центра описанной окружности

остроугольный треугольник

тупоугольный треугольник



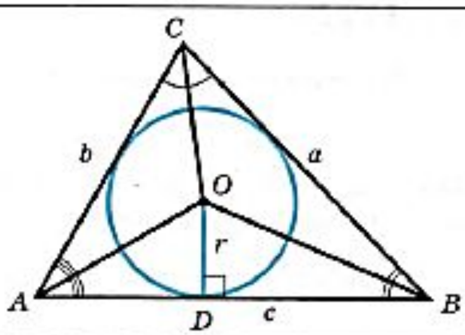
прямоугольный треугольник



O — середина гипотенузы

$$\boxed{R = \frac{c}{2}}$$

Вписанная окружность

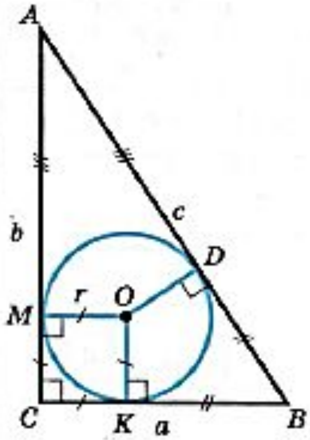


O — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника;

$OD = r$; $OD \perp AB$

$$\boxed{r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}}$$

В прямоугольном треугольнике

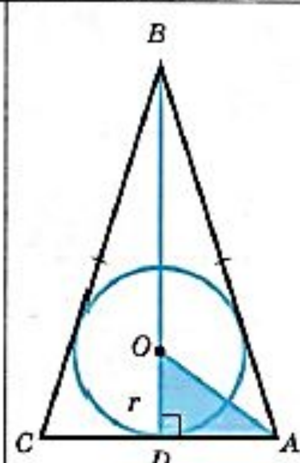


$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$$

$OK = OM = OD = r$

($OKCM$ — квадрат)

В равнобедренном треугольнике



$AB = DC$;

BD — высота, медиана и биссектриса;

AO — биссектриса угла A

$$\boxed{OD = r}$$