МЕТОД ГАУССА — ЖОРДАНА

Метод Гаусса — Жордана

Метод Гаусса — Жордана (метод полного исключения неизвестных) — метод, который используется для решения систем линейных алгебраических уравнений, нахождения обратной матрицы, нахождения координат вектора в заданном базисе или отыскания ранга матрицы. Метод является модификацией метода Гаусса. Назван в честь К. Ф. Гаусса и немецкого геодезиста и математика Вильгельма Йордана

АЛГОРИТМ

1. Выбирают первый слева столбец матрицы, в котором есть хоть одно отличное от нуля значение. (разрешающий-главный столбец)

2. Если самое верхнее число в этом столбце ноль, то меняют всю первую строку матрицы с другой строкой матрицы, где в этой колонке нет нуля.

3. Все элементы первой (разрешающей-главной) строки делят на верхний (разрешающий-главный) элемент

АЛГОРИТМ

4.Из оставшихся строк вычитают первую (разрешающую-главную) строку, умноженную на первый элемент соответствующей строки, с целью получить первым элементом каждой строки (кроме первой) ноль.

5.Далее проводят такую же процедуру с матрицей, получающейся из исходной матрицы после вычёркивания первой строки и первого столбца.

6.После повторения этой процедуры (n-1) раз ,

АЛГОРИТМ

7.Вычитают из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, с тем, чтобы в предпоследней строке осталась только 1 на главной диагонали.

8.Повторяют предыдущий шаг для последующих строк. В итоге получают единичную матрицу и решение на месте свободного вектора (с ним необходимо проводить все те же преобразования).

ПРИМЕР

Для решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases}$$

Запишем её в виде матрицы 3×4, где последний столбец является свободным членом:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Проведём следующие действия:

- К строке 2 добавим: −4 × Строку 1.
- К строке 3 добавим: −9 × Строку 1.

Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 3 \end{array}\right)$$

- К строке 3 добавим: $-3 \times$ Строку 2.
- Строку 2 делим на -2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- К строке 1 добавим: −1 × Строку 3.
- К строке 2 добавим: −3/2 × Строку 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- К строке 1 добавим: −1 × Строку 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

В правом столбце получаем решение:

$$a = \frac{1}{2}\,;\ b = -\frac{1}{2}\,;\ c = 0\,.$$

РАСШИРЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть дано:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0 \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ПРЯМОЙ ХОД (АЛГОРИТМ ОБРАЗОВАНИЯ НУЛЕЙ ПОД ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ)

- Разделим первую строку матрицы A на a_{11} получим: $a_{1j}^{1} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, j — столбец матрицы A.
- Повторяем действия для матрицы I, по формуле: $b_{1s}^{1} = \dfrac{b_{1s}}{a_{11}}$, s — столбец матрицы I

Получим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{1} & \cdots & a_{1n}^{1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} b_{11}^{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ПРЯМОЙ ХОД (АЛГОРИТМ ОБРАЗОВАНИЯ НУЛЕЙ ПОД ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ)

- Будем образовывать 0 в первом столбце : $a_{2j}^1 = a_{2j} - a_{1j}^1 a_{21}$, ... , $a_{nj}^1 = a_{nj} - a_{1j}^1 a_{n1}$
- Повторяем действия для матрицы I, по формулам : $b_{2s}^1 = b_{2s} - b_{1s}^1 a_{21}$, ... , $b_{ns}^1 = b_{ns} - b_{1s}^1 a_{n1}$

Получим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} b_{11}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21}^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

a^k

- продолжаем выполнять аналогичные операции, используя формулы : $a_{ij}^k = \dfrac{a_{ij}^k}{a_{ii}}$ $\quad a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{kj}^k a_{ik}^{k-1}$

при условии, что $k = 1 \to n, i = k+1 \to n, j = 1 \to n$

- Повторяем действия для матрицы I, по формулам : $b_{ik}^k = \dfrac{b_{ik}^k}{a_{ii}}$ $\quad b_{is}^k = b_{is}^{k-1} - b_{ks}^k a_{ik}^{k-1}$

при условии, что $k = 1 \to n,\ i = k+1 \to n,\ s = 1 \to n$

Получим :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} b_{11}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21}^2 & b_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^n & b_{n2}^n & \cdots & b_{nn}^n \end{pmatrix}$$

ОБРАТНЫЙ ХОД (АЛГОРИТМ ОБРАЗОВАНИЯ НУЛЕЙ НАД ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ)

Используем формулу: $a_{ij}^{k-1} = a_{ij}^{k-1} - a_{ij}^{k} a_{ik}^{i}$, при условии, что $k = n \to 1,\ i = 1 \to k-1,\ j = 1 \to n$

Повторяем действия для матрицы I, по формуле : $b_{is}^{k-1} = b_{is}^{k-1} - b_{is}^{k} a_{ik}^{i}$, при условии, что $k = n \to 1,\ i = 1 \to k-1,\ s = 1 \to n$

Окончательно получаем :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad I = A^{-1}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!