Дисциплина **МАТЕМАТИКА**

Лектор: Юлия Абдулловна Ахкамова,
доцент кафедры математики и методики обучения математике ЮУрГГПУ
akhkamovayua@cspu.ru

Разделы математики

- 1.Линейная и векторная алгебра
- 2. Аналитическая геометрия
- 3.Функции. Дифференциальное исчисление.
- --
- 4. Интегральное исчисление.
- 5. Дифференциальные уравнения. Ряды.
- 6. Теория вероятностей и математическая статистика.

ППИ,1 курс

- 1 семестр:

  1 лекция (2 ч);

  практ.занятий (6 ч и зачет).

Контрольная работа, зачет

- 2 семестр:

  3 лекции (6 ч);

  3 практ. занятий (6 ч);

  консультаций (3 ч).

  Экзамен (6 ч)

Балльно-рейтинговая система 1 курс

- Он-лайн 1 лекции 5 баллов (max 1*5=5);
- 3 лаб. занятия по 5 баллов(max 3*5=15);

Контрольная работа №1 задачи 1,3а,б,в,8 (max 60);

Защита-обсуждение занятий или кр (электронного варианта) max 10 баллов);

Зачетная работа до 20 баллов .

60 баллов и выше «Зачтено»,

МАТЕМАТИКА Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ и ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Лекция № 1.

Матрицы. Действия над матрицами. Определители и их свойства.

ЛИТЕРАТУРА (ППИ)

- **Худякова М.М., Фалькова О.Н,**

  Основы высшей математики.

  Данко П.Е., Попов А.Г и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, части I,II.

- Баврин И.И. Высшая математика.
- Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении.

Учебные вопросы.

- 1. Линейные операции над матрицами. Произведение и транспонирование матриц.

  2. Вычисление ранга матрицы путем приведения её к треугольному виду.

3. Метод Гаусса систем линейных алгебраических уравнений.

- 4.Построение выпуклого многоугольника.

Введение в дисциплину

- **Линейная алгебра** – раздел алгебры, изучающий линейные и векторные пространства. Исторически первым разделом линейной алгебры была теория линейных уравнений.
- Именно в связи с решением систем линейных уравнений возникли понятия *матрицы* и *определителя*.

1 Учебный вопрос.

Линейные операции над матрицами.

(Правило сложения , вычитания матриц. Правило умножения матрицы на число.)

Произведение и транспонирование матриц.

Определение . <u>**Числовой матрицей размерности m×n**</u> **называется прямоугольная таблица чисел состоящая из m строк и n столбцов:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} **называются** <u>**элементами матрицы**</u> ***A*,**
i **– номер строки,** ***j*** **– номер столбца, на пересечении которых стоит элемент** a_{ij}**.**

Принятые обозначения матрицы:

Прописные буквы латинского алфавита A, B, C, …

$A_{\mathbf{m\times n}}$ **,если хотят указать размерность матрицы.**

Пример .

$$A_{2\times5}=\begin{pmatrix}5 & -4 & 6,47 & 0 & \sqrt{3}\\ 80 & 1 & 2 & 9 & 7\end{pmatrix}$$

Матрица может состоять из одного столбца или из одной строки, и даже из одного элемента.

Определение **. Матрицы *A* и *B* называются равными матрицами, если <u>они одинаковой размерности и все их соответствующие элементы</u> a_{ij} и b_{ij} <u>равны</u>, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$.**

Замечание. Равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

Определение. **Матрица называется <u>квадратной матрицей</u>, если число её строк равно числу её столбцов, т.е. m=n.**

Определение. **<u>Главной диагональю квадратной матрицы</u> называется линия, вдоль которой расположены элементы** $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Определение. **Матрица называется <u>нулевой матрицей</u>, если все её элементы равны нулю.**

Определение. **Квадратная матрица называется <u>диагональной матрицей</u>, если на главной диагонали расположены числа, отличные от нуля, вне главной диагонали - нули.**

Определение. **Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы – нули, называется <u>единичной матрицей.</u>**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

Сложение и вычитание матриц

Сложение и вычитание матриц ***определено только для матриц одинаковой размерности.***

Определение. **Суммой (разностью) матриц** $A_{m \times n}$ **и** $B_{m \times n}$ **одинаковой размерности является матрица** $C_{m \times n}$ **той же размерности, каждый элемент которой** c_{ij} **равен сумме (разности) соответствующих элементов этих матриц**

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}).$$

Пример . Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Найти C=A +B.

Решение

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\ 3 & 7 & 8\end{pmatrix}.$$

Свойства сложения

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $A+0=A$, где О – нулевая матрица такой же размерности, как и матрица А.

Умножение матрицы на число

- Это матрица, полученная умножением соответствующих элементов на данное число

Транспонирование матриц

Определение. **Матрицу A^T называют <u>транспонированной матрицей к данной</u> матрице А, если элементы каждой строки матрицы А стали элементами столбцами матрицы A^T под <u>тем же номером</u>.**

Умножение матриц

Определение. **Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$** **называется матрица $C_{m\times k} = A\cdot B$, имеющая m строк и k столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.**

Замечание:

Произведение матриц существует только для согласованных матриц, т.е. когда первый множитель имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя.

Пример умножения матриц

-

- Замечание: в общем случае AB$\neq BA$.

Учебный вопрос.

Определители второго и третьего порядков, их вычисление . (Правило вычисления определителя II порядка. Правило треугольников вычисления определителя III порядка .)

$$|A| = |a_{ij}| = \det A = \det(a_{ij}) = \mathrm{D}.$$

$$|A| = a_{11}.$$

- Замечание: в общем случае AB$\neq BA$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Если порядок матрицы равен трем (n =3), то определителем третьего порядка назовем число, вычисленное по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

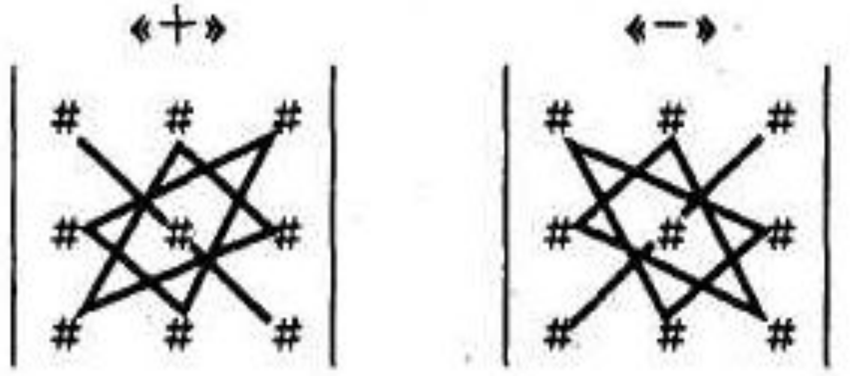
1 способ) Данную формулу можно запомнить приписав к определителю **<u>первые два столбца.</u>**

Со знаком плюс берутся **произведения элементов стоящих на главной диагонали** и на диагоналях, параллельных к ней, **со знаком минус – произведения элементов на побочной диагонали** и диагоналей, параллельных к ней.

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Или, 2 способ) **используем правило треугольников:**



В этой схеме плюс означает, что произведения указанных элементов берутся со своими знаками, а минус – с противоположными.

Пример. Вычислить определитель приписыванием первых двух столбцов

Решение.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{array} = 2 - 2 + 0 - 4 - 0 - 0 = -4$$

- Замечание: в общем случае AB$\neq BA$.

Пример . Для определителя |A| укажем некоторые миноры и алгебраические дополнения:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

- Замечание: в общем случае AB$\neq BA$.

- Замечание: в общем случае AB$\neq BA$.

- Учебный вопрос
  Свойства определителя.

Свойства определителей. (дз)

1. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется: $|A| = |A^T|$

2. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

3. Определитель с двумя равными или пропорциональными строками (или столбцами) равен нулю.

4. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5. Определитель с нулевой строкой (или столбцом) равен нулю.

- Алгоритм вычисления определителя методом приведения его к треугольному виду.

6. **Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (не равное нулю).**
7. **Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали.**

С помощью свойств 6-7 определитель можно привести к треугольному виду и легко вычислить. (долгий процесс)

8.Определитель, все элементы i-ой строки (столбца) которого представляют сумму двух слагаемых, равна сумме двух определителей, все элементы которых, кроме i-ой строки (столбца), те же, что и в исходном, а в i-ой строке (столбце) первого определителя стоят первые слагаемые, в i-ой строке (столбце) второго определителя – вторые.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Учебный вопрос .

Разложение определителя по элементам строки или столбца матрицы (теорема Лапласа).

Определение. **Определителем матрицы n-го порядка** **называется число, которое сопоставляется квадратной матрице n-го порядка, получаемое по определенному правилу (Теорема Лапласа).**

Теорема Лапласа.

Определитель матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

- Замечание: в общем случае АВ$\neq BA$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{14} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 8 & 2 & 7 \\ -5 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -2 \\ -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 8 & 7 \\ 4 & -5 & -2 \\ -7 & 8 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 8 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ -7 & 8 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(120 - 32 - 140 - 168 + 64 + 50) -$$
$$-3\cdot(-75 + 28 + 112 + 147 - 40 - 40)$$
$$+ 125 + 112 + 224 - 245 - 80 - 160 -$$
$$- 2\cdot(100 - 168 + 64 - 70 + 120 - 128) =$$
$$= 106 - 3\cdot 132 - 24 - 2\cdot(-82) =$$
$$= 106 - 396 + 140 = -150;$$

Алгоритм вычисления определителя методом эффективного понижения порядка.

- 1) Выбрать «ряд» определителя (строку или столбец), содержащий нуль (используя свойства определителей можем получить нуль).
- 2) Вычислить алгебраические дополнения элементов этого «ряда».
- 3) Применить теорему Лапласа для вычисления данного определителя.

Раздел 1.
ЛИНЕЙНАЯ и ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Обратная матрица. Ранг матрицы. Основные сведения о СЛУ. Методы решения СЛУ.

ЛИТЕРАТУРА (ППИ)

- Данко П.Е., Попов А.Г и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, части I,II.

- Баврин И.И. Высшая математика.
- Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении.

Учебный вопрос .

Алгоритм отыскания обратной матрицы

Определение. **Квадратная матрица называется *вырожденной матрицей*, если её определитель равен нулю.**

Квадратная матрица А называется *невырожденной матрицей*,

если $|A| \neq 0$.

Определение. **Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей к матрице* А, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.**

Теорема об обратной матрице

Если квадратная матрица А *невырожденная*, то существует обратная матрица и находим ее по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^{*}\right)^{T}$$

- **Формула для обратной матрицы 3-его порядка:**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- Алгоритм составления обратной матрицы:
- 1)
- 2)

- **Пример. Найти матрицу, обратную данной**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- **Воспользуемся формулой**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- Замечание: в общем случае AB$\neq BA$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -6 & -2 & -10 \\ 17 & -17 & 0 \\ 7 & -9 & 6 \end{pmatrix}.$$