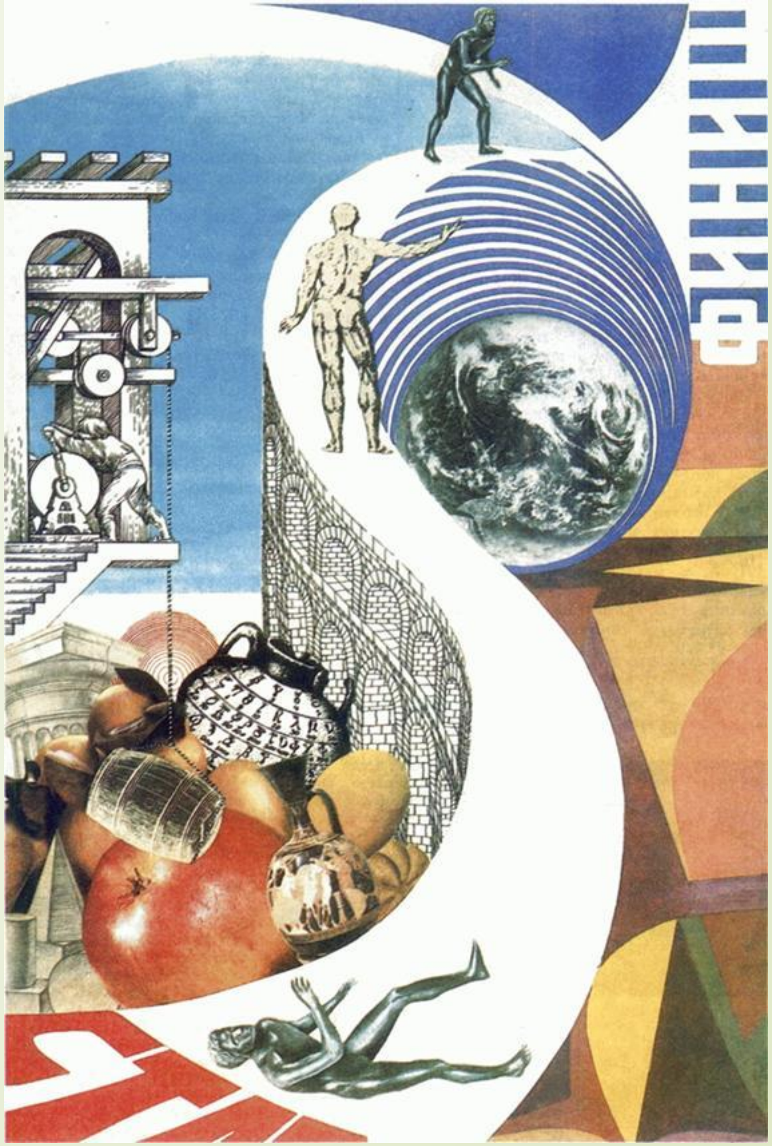
Задание по математике:

1. Разобрать материал, предложенный в презентации;
2. оформить конспект в тетради

# Введение понятия определенного интеграла



Интегральное исчисление и само понятие интеграла возникли из необходимости вычисления площадей плоских фигур и объемов произвольных тел. Идеи интегрального исчисления берут свое начало в работах древних математиков. Об этом свидетельствует «метод исчерпывания» Евдокса, который также использовал Архимед в III в. до н. э.

# «метод исчерпывания»

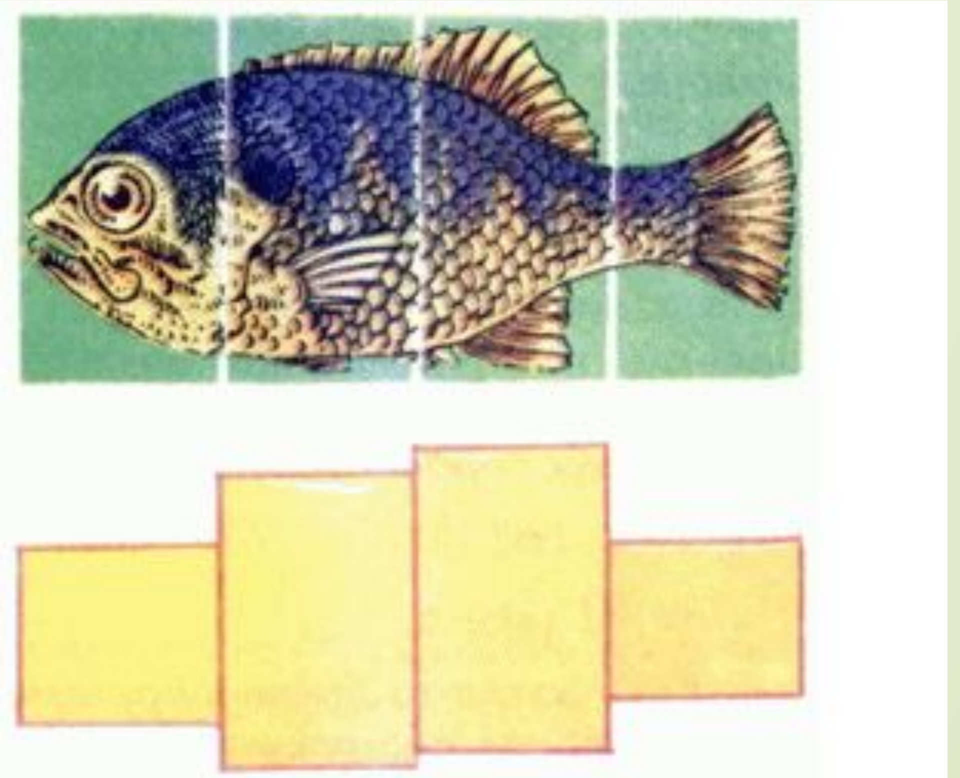
Метод заключался в следующем: для нахождения площади (или объёма) некоторой фигуры в эту фигуру вписывалась монотонная последовательность других фигур и доказывалось, что их площади (объёмы) неограниченно приближаются к площади (объёму) искомой фигуры. Затем вычислялся предел последовательности площадей (объёмов), для чего выдвигалась гипотеза, что он равен некоторому А и доказывалось, что обратное приводит к противоречию.

Поскольку общей теории **пределов не было (греки избегали понятия бесконечности), все эти шаги, включая обоснование единственности предела, повторялись** для каждой задачи.

***Нахождение площади круга***

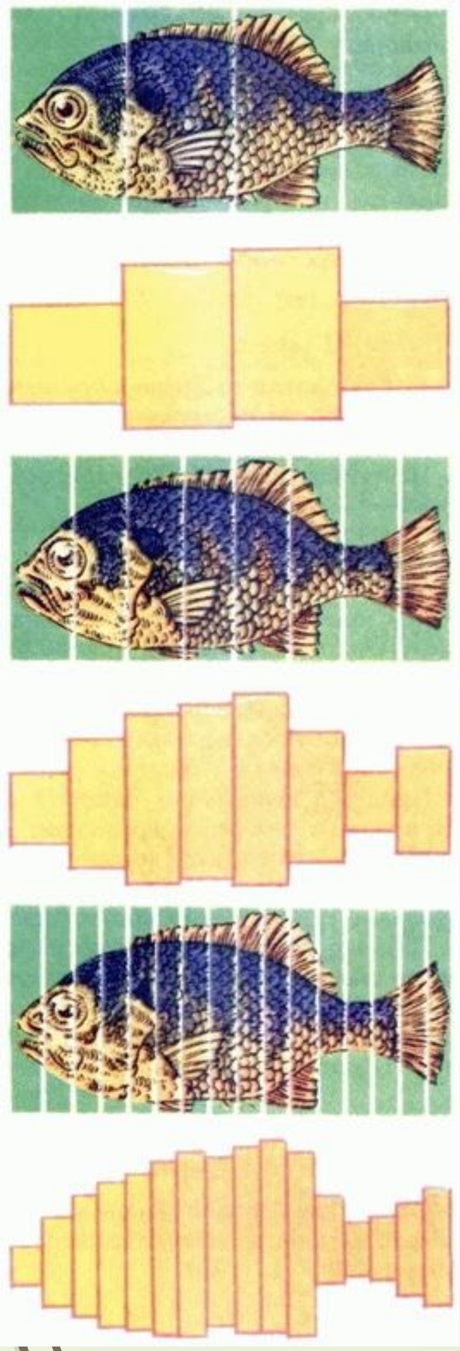
# Попробуем решить задачу

В это изображение мы попробуем вписать фигуры, площадь которых мы сможем найти, и вычислим сумму этих площадей . Например будем вписывать прямоугольники.



Возникают вопросы:

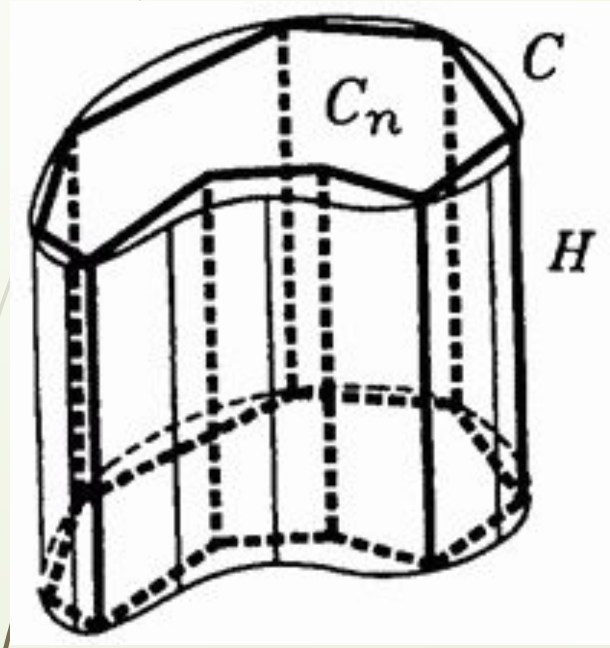
-  Насколько точно мы вычислим площадь этого изображения?
- И Как нам можно увеличить точность ?

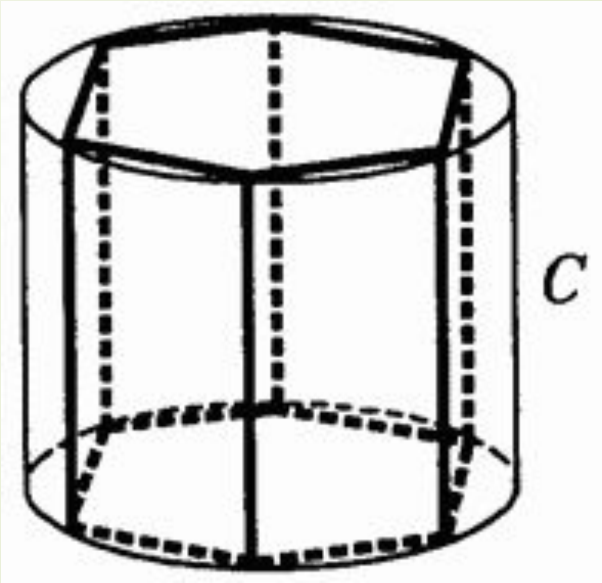


- Мы будем бесконечно увеличивать число прямоугольников. Сумма площадей этих прямоугольников будет приближаться к площади изображения рыбки

Чем меньше будут прямоугольники , тем точнее мы сможем найти площадь этого изображения

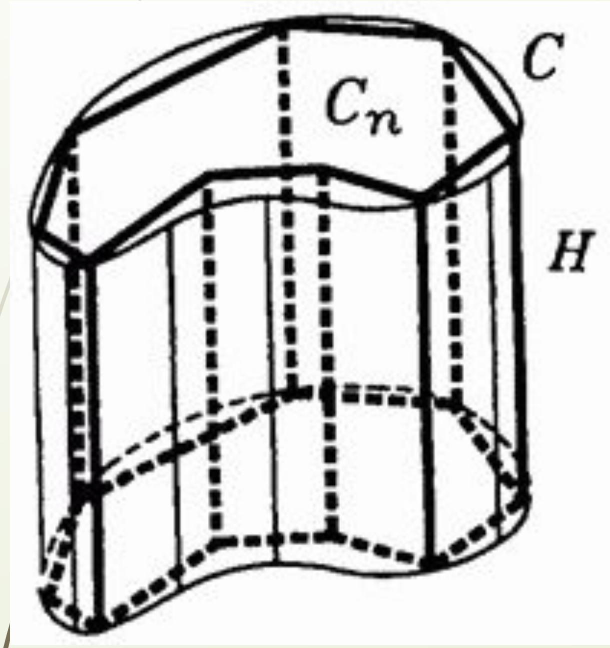
Находя объемы, мы так же можем вписывать многогранники (например призмы)

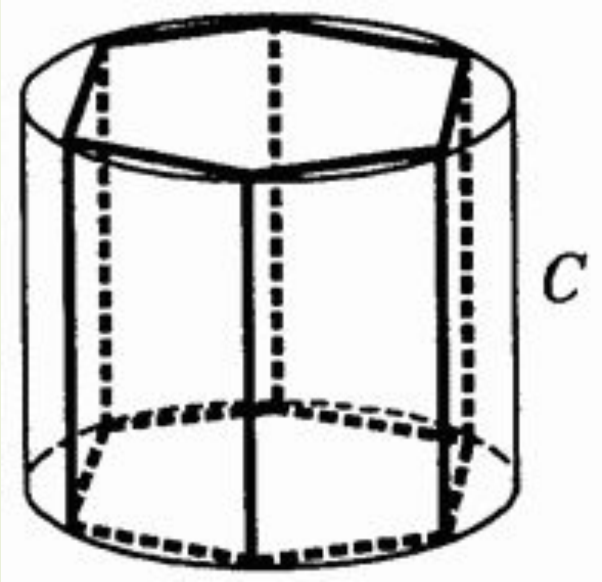



Тогда как можно увеличить точность вычислений?

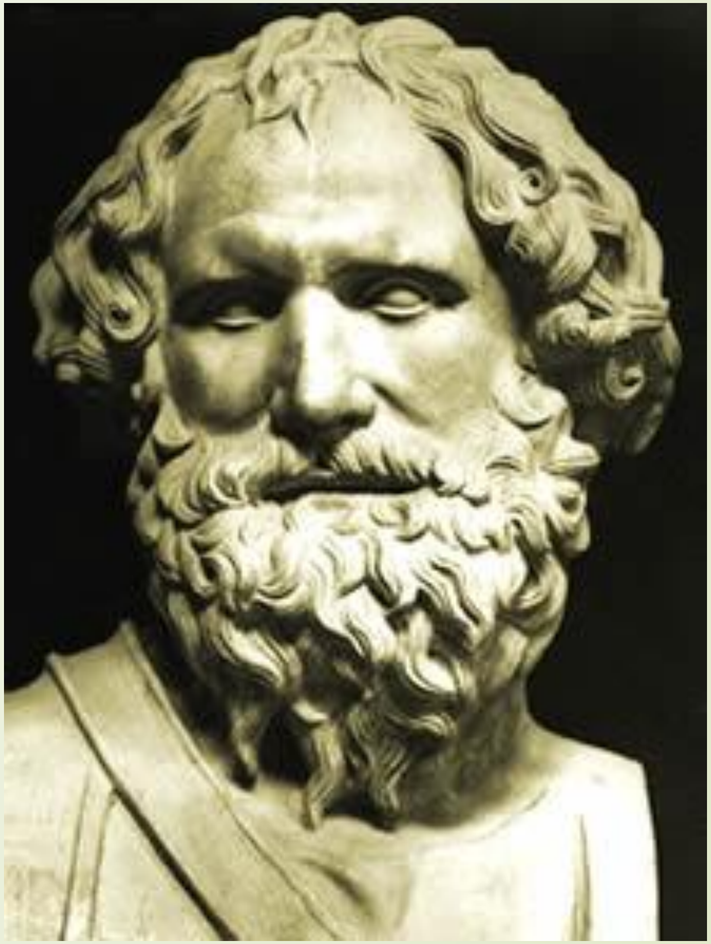
Мы можем увеличивать количество сторон у многоугольника, лежащего в основании призмы



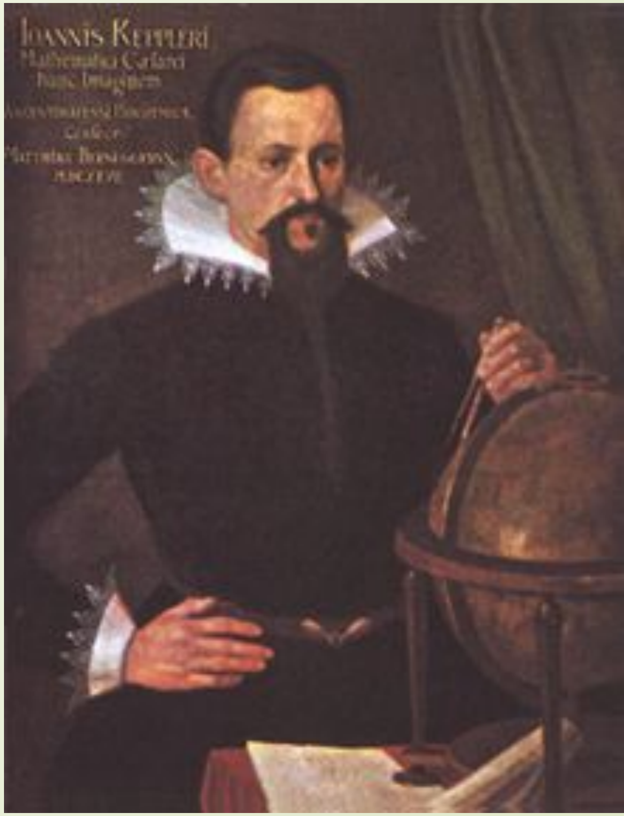



Метод исчерпывания хорошо вписывался в строго дедуктивное построение античной математики, однако имел несколько существенных недостатков. Во-первых, он был исключительно громоздким. Во-вторых, не было никакого общего метода для вычисления предельного значения А; Архимед например, нередко выводил его из механических соображений или просто интуитивно угадывал. Наконец, этот метод не пригоден для нахождения площадей бесконечных фигур.

Архимед еще явным образом не применял общее понятие предела и интеграла, хотя в неявном виде эти понятия использовались.



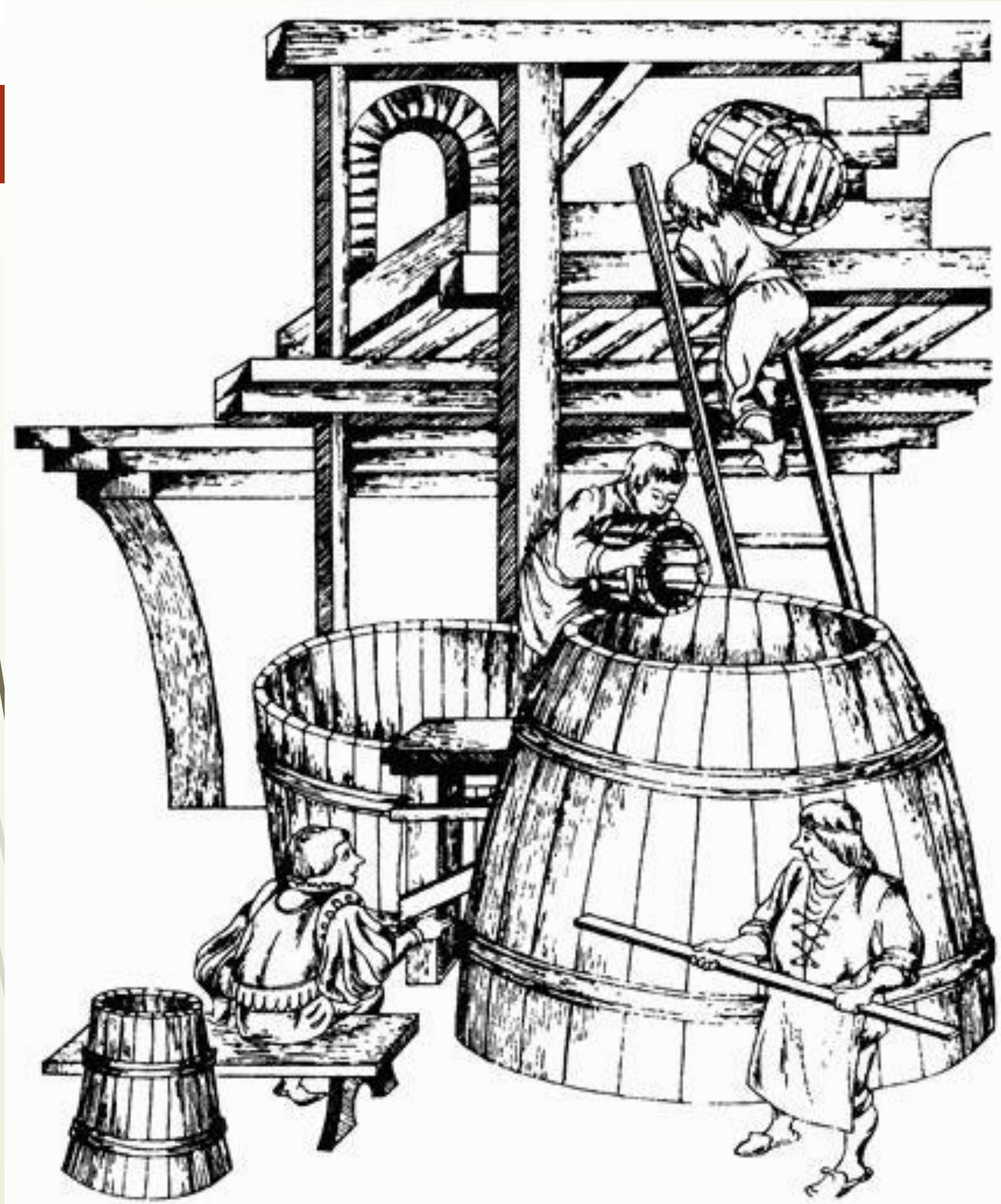
В XVII в. Йоганн Кеплер (1571 – 1630)



1. открыл законы движения планет,

2. успешно осуществил первую попытку развить идеи Архимеда.

3. вычислял площади плоских фигур и объемы тел, опираясь на идею разложения фигуры и тела на бесконечное количество бесконечно малых частей. Из этих частей в результате добавления складывалась фигура, площадь (объем) которой известна и что давало возможность вычислить площадь (объем) искомой.



«Поскольку бочки связаны с кругом, конусом и цилиндром – фигурами правильными, тем самым они поддаются геометрическим изменениям».

И. Кеплер

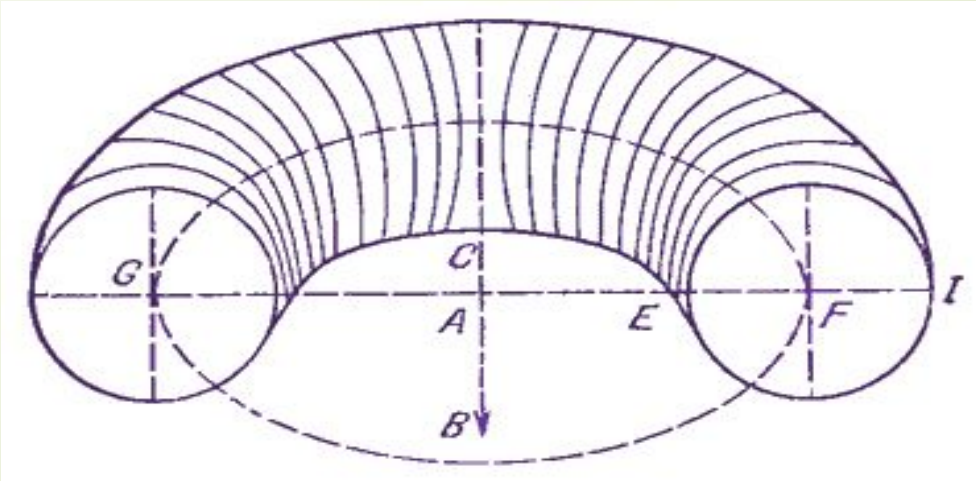
Рассказывают, что когда Кеплер покупал вино для свадьбы, он был изумлен тем, как торговец определял вместимость бочки. Продавец брал палку, на которой были нанесены деления, и с ее помощью определял расстояние от наливного отверстия до самой дальней точки бочки. Проделав это одно измерение, он сразу же говорил, сколько литров вина в данной бочке.

Кеплера заинтересовало, насколько точно торговец определял объем бочки при помощи всего одного измерения. Так ученый первым обратил внимание на класс задач, исследование которых привело к созданию интегрального исчисления.


Рис.1.

Вначале Кеплер нашел формулу для вычисления объема бочки, а затем — и других тел вращения (всего 92), которым он дал названия: «лимон», «яблоко», «груша», «айва», «слива», «земляника», «турецкая чалма» и т. п. Для нахождения объемов этих неправильных тел он применил метод «исчерпывания», заполняя тела фигурами, объемы которых поддавались вычислению. Одновременно он разбивал тело на множество элементарных частей.

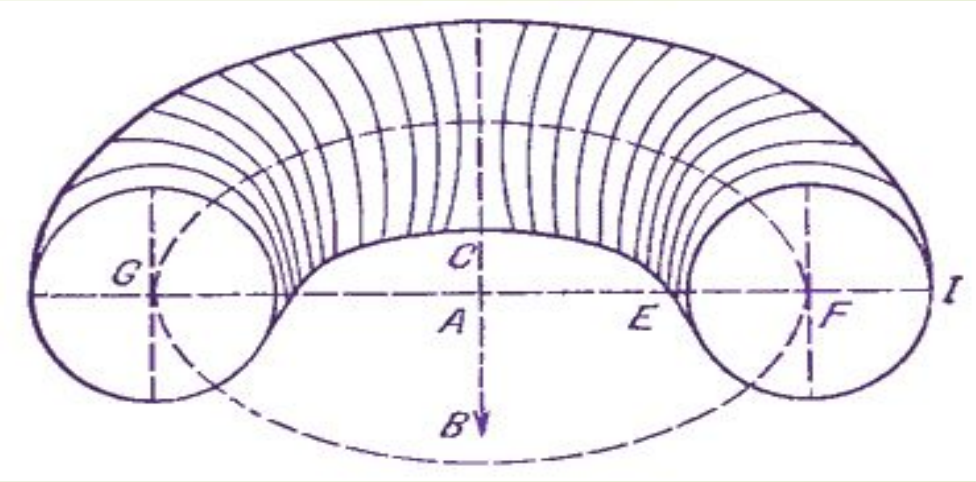
Так, например, для нахождения формулы объема тора Кеплер разбил его меридиональными сечениями на бесконечное количество кружков, толщина которых с внешней стороны была несколько большей, чем с внутренней. Объем такого кружка равен объему цилиндра с основанием, равным сечению тора, и высотой, равной толщине кружка в его средней части.




.

Отсюда сразу получалось, что объем тора равен объему цилиндра, у которого площадь основания равна площади сечения тора, а высота равна длине окружности, которую описывает точка F — центр сечения тора .

.

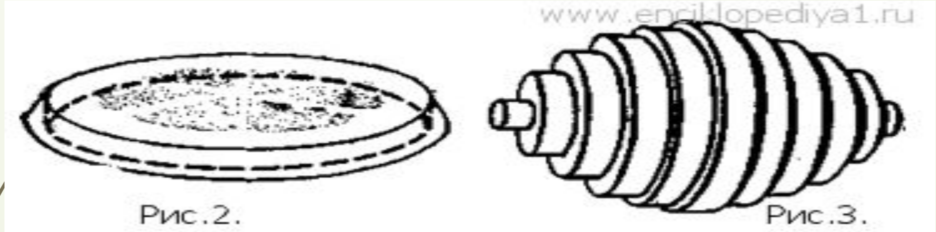


# Математика за чайным столом

Чтобы получить представление об этих общих методах, попробуем найти объем поданного к столу лимона. Ни на одно из тел, изучаемых в школе (шар, цилиндр, конус и т. д.), лимон непохож.

Что же нам делать, как вы думаете?

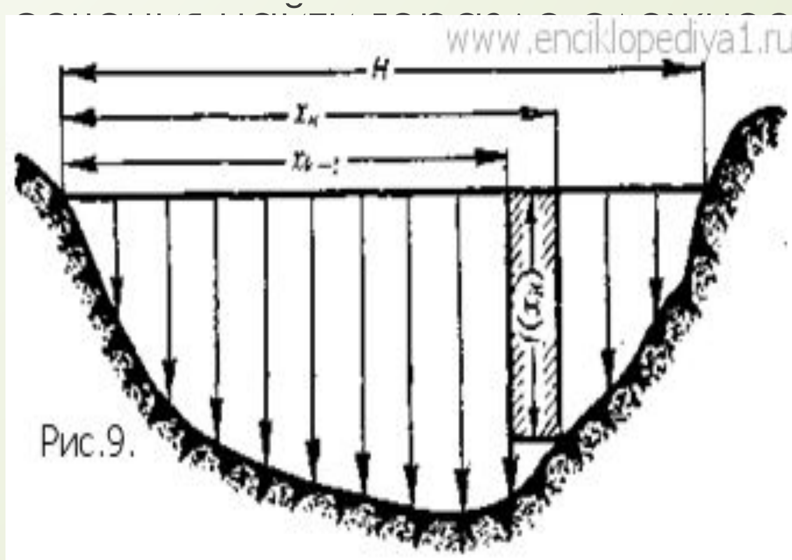
Однако хозяйка тут же приходит нам на помощь: она разрезает лимон на тонкие ломтики. Ровно обрезав край каждого ломтика, можно превратить его в низенький цилиндр (рис. 2), объем которого легко высчитать. Прикладывая друг к другу эти цилиндры, мы получим ступенчатое тело.(рис 3)




Его объем равен сумме объемов цилиндров. Если ломтики очень тонки, то объем ступенчатого тела мало отличается от объема лимона, и чем тоньше будут ломтики, тем это отличие будет меньше.

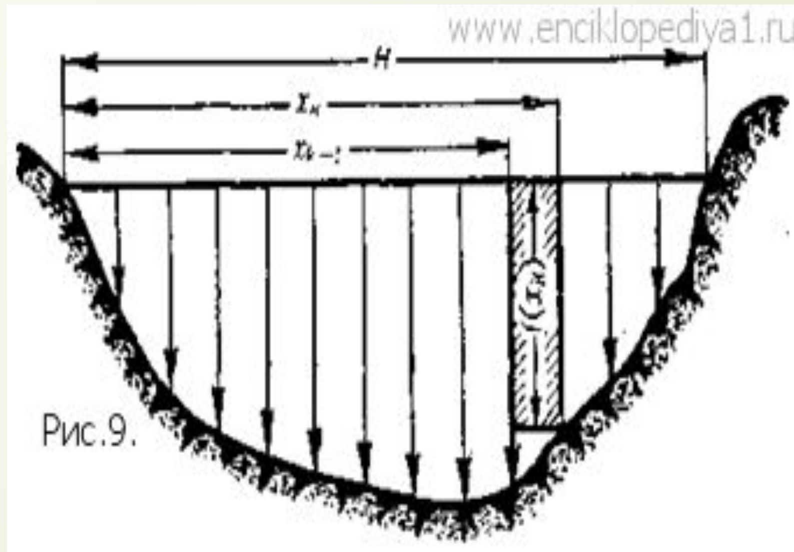
# Промер реки

При проектировании гидроэлектростанций надо знать расход воды в реке, т. е. количество воды, протекающей в данном месте за 1 сек. Ясно, что расход воды в реке равен произведению площади поперечного сечения реки на скорость течения. Скорость течения определить довольно просто, а вот площадь поперечного сечения найти гораздо сложнее.




Посмотрим на рисунок и попробуем предположить, как нам поступить.

Однако и здесь на помощь нам приходит разрезание на «ломтики». Каждый «ломтик» можно приближенно заменить прямоугольником.




Складывая затем площади этих прямоугольников, мы и найдем приближенное значение площади сечения. Чем тоньше будут «ломтики», тем более точное значение площади мы получим.

итальянский математик

Бонавентуро Кавальере

(1598 – 1647)

пересекая фигуру (тело) параллельными прямыми (плоскостями), считал их лишенными любой толщины, но прибавлял эти линии. В историю математики вошел так называемый принцип Кавальери, с помощью которого вычисляли площади и объемы. Этот принцип получил теоретическое обоснование позднее с помощью интегрального исчисления.

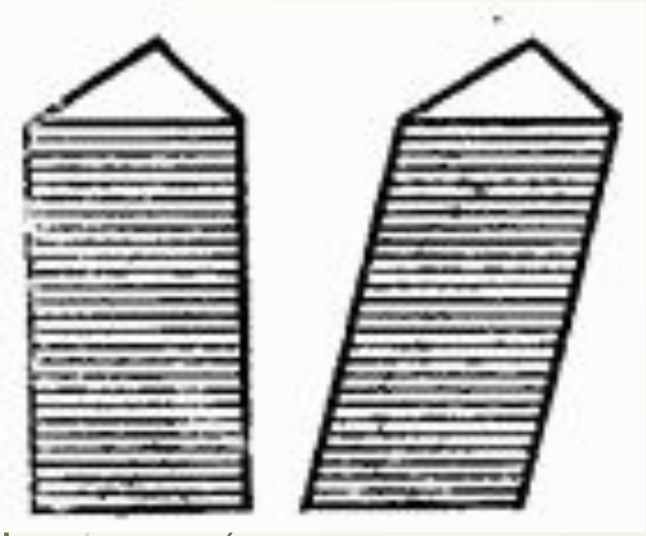
Иллюстрация принципа Кавальери

Объемы (или площади) двух фигур равны,
если равны между собой площади (или длины) всех соответственных их сечений,

проведенных параллельно некоторой

данной плоскости (или прямой).

# Примеры применения метода неделимых



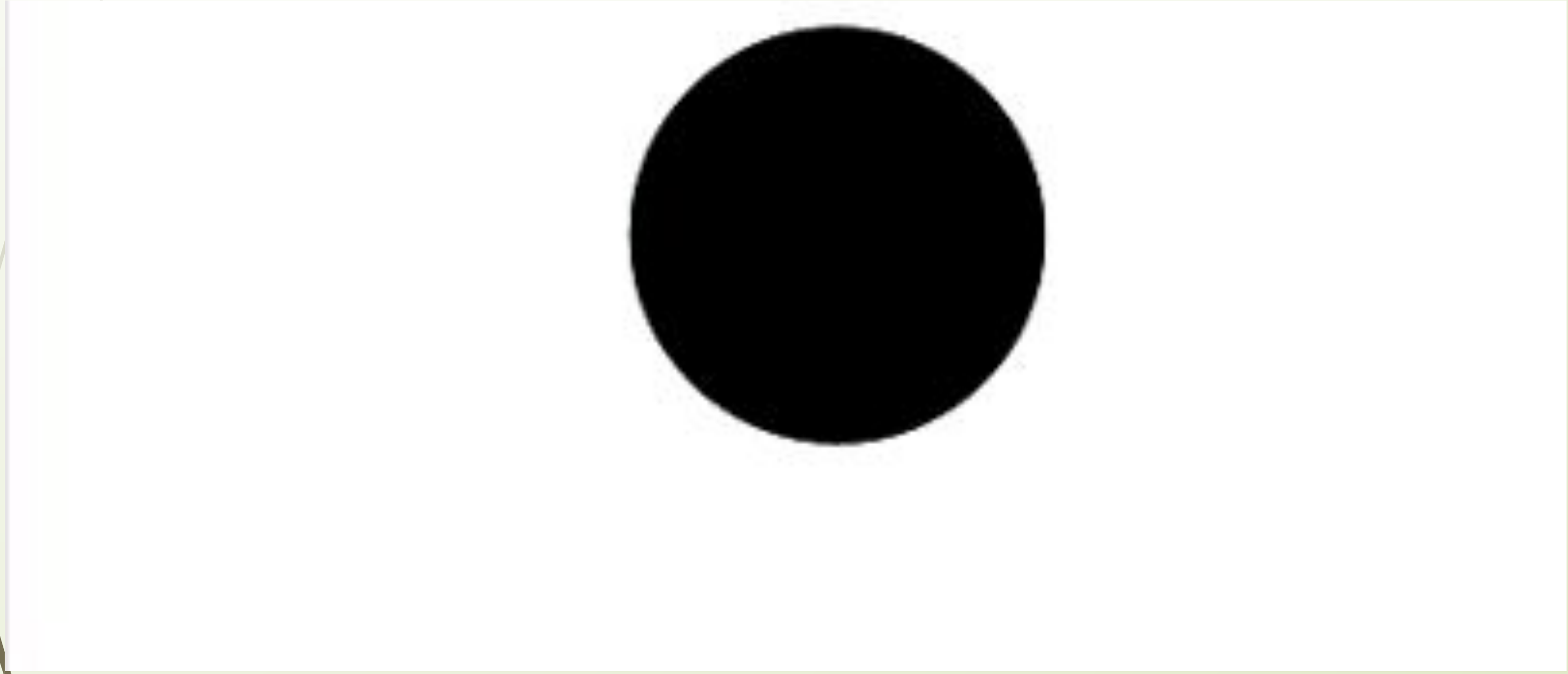
Найти объем призмы

или

найти площадь круга

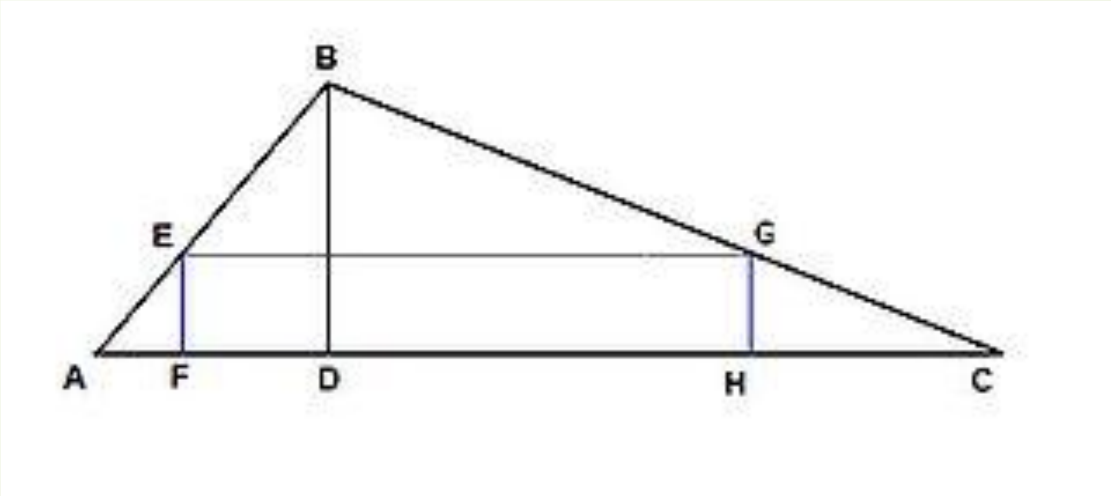
# Найдем площадь круга

Посмотрим как применяется метод неделимых при решении этой задачи…



## Парадокс Кавальери

Математики сразу указали на возможность ошибочного применения метода неделимых; один из таких примеров привёл сам Кавальери (см. рисунок). Треугольники ABD и BCD состоят из вертикальных неделимых, причём каждой неделимой левого треугольника (EF) можно взаимно-однозначно сопоставить неделимую той же длины (GH) правого треугольника. Отсюда, согласно принципу Кавальери, следует ошибочный вывод, что площади треугольников равны. Тем не менее ясного правила для избежание ошибок Кавальери не дал.

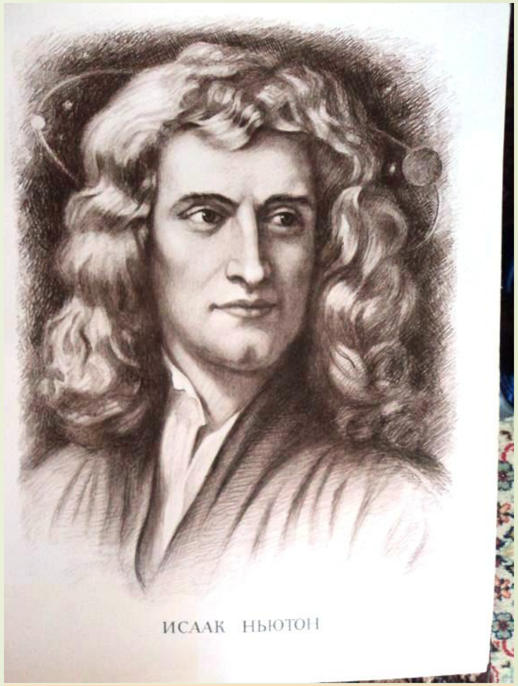


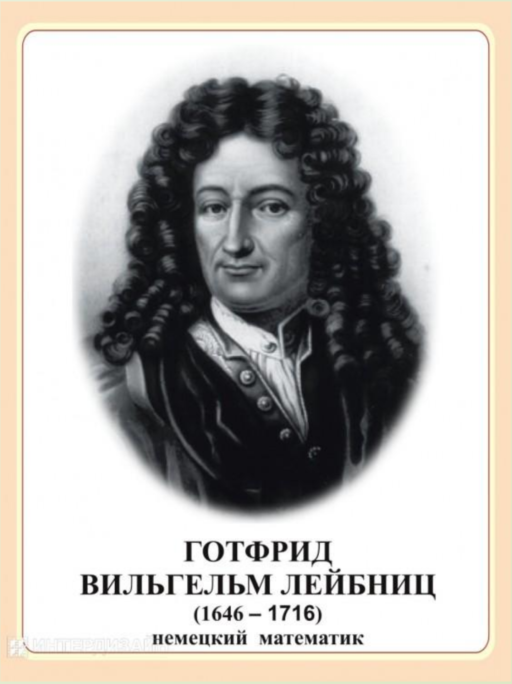
Кавальери был наиболее ярким и влиятельным представителем «геометрии неделимых» . В его изложении инфинитезимальные представления Кеплера обрели вид общих вычислительных приёмов.

Мощь и относительная простота нового метода произвели чрезвычайно сильное впечатление на математиков.

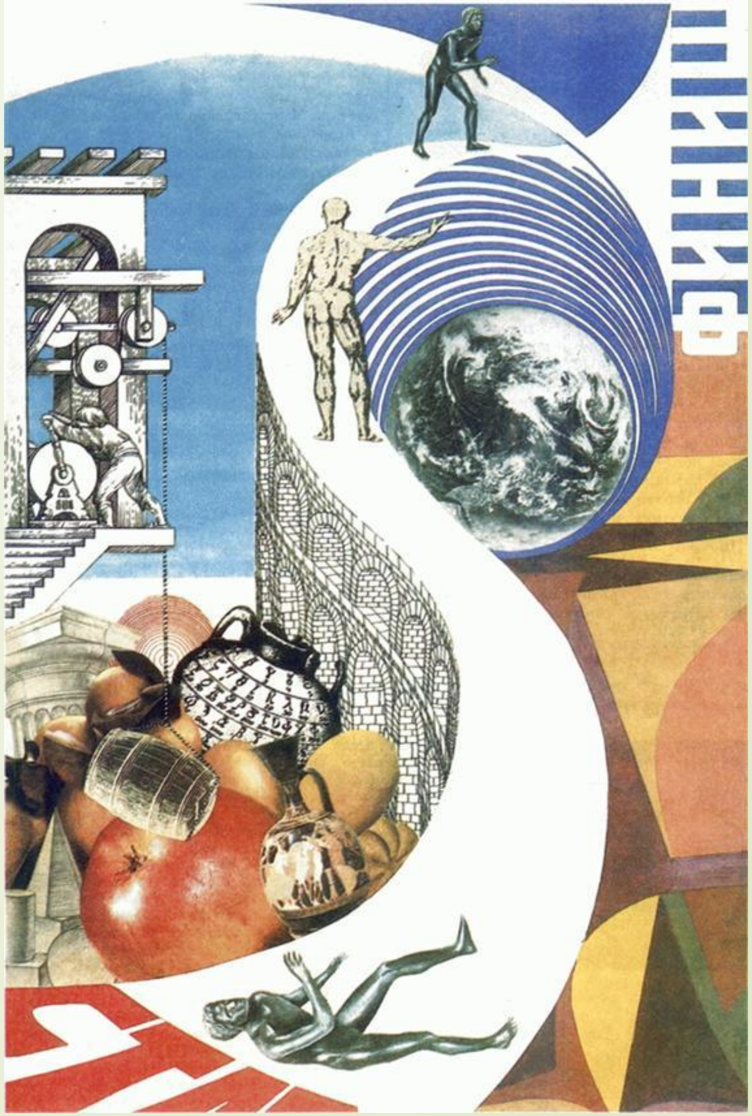
Однако при всей значимости результатов, полученных математиками **XVII** столетия, **исчисления** еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, лежащие в основе решения многих частных задач, а также установить связь операций **дифференцирования и интегрирования**, дающую достаточно точный алгоритм.

Это сделали Ньютон и Лейбниц, открывшие независимо друг от друга факт, известный вам под названием формулы **Ньютона - Лейбница**. Тем самым окончательно оформился общий метод. Предстояло еще научиться находить **первообразные** многих функций, дать логические основы нового **исчисления** и т. п. Но главное уже было сделано: **дифференциальное и интегральное исчисление создано.**



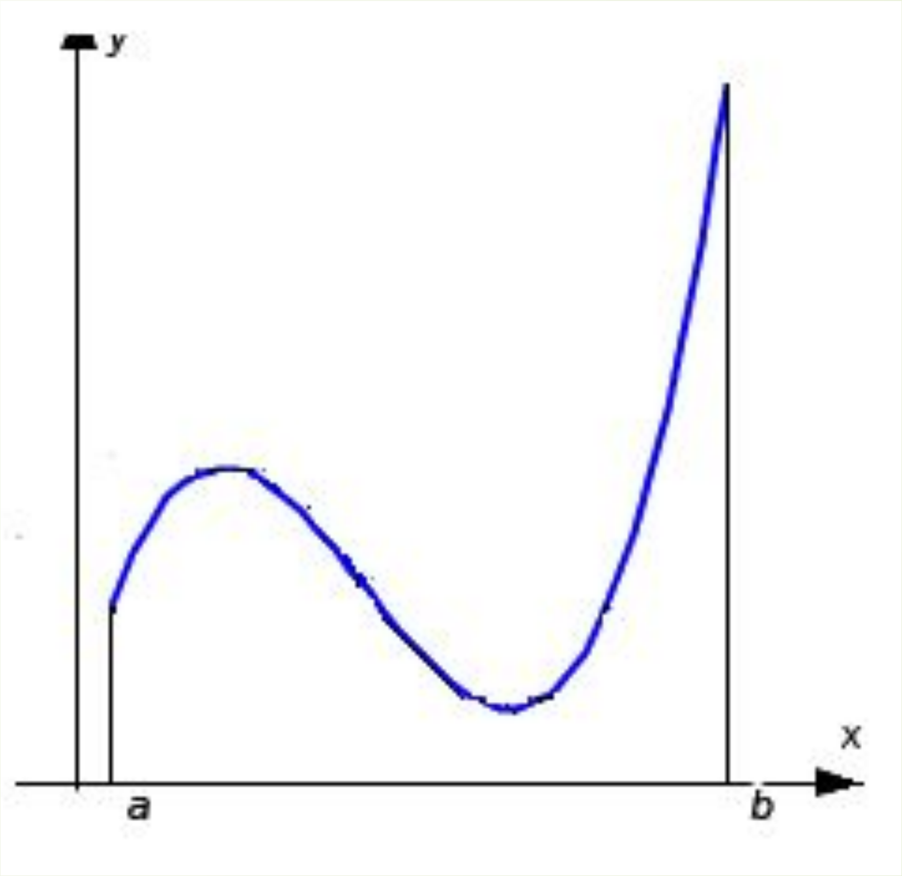
Символ интеграла введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово **интеграл** придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского **integero**, которое переводится как **приводить в прежнее состояние, восстанавливать.** Возможно происхождение слова интеграл иное: слово **integer** означает **целый.**



# Давайте введем понятие определенного интеграла

- в школе к понятию определенного интеграла нас подводили рассмотрением задачи о вычислении площади криволинейной трапеции.

Рассматривалась непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$



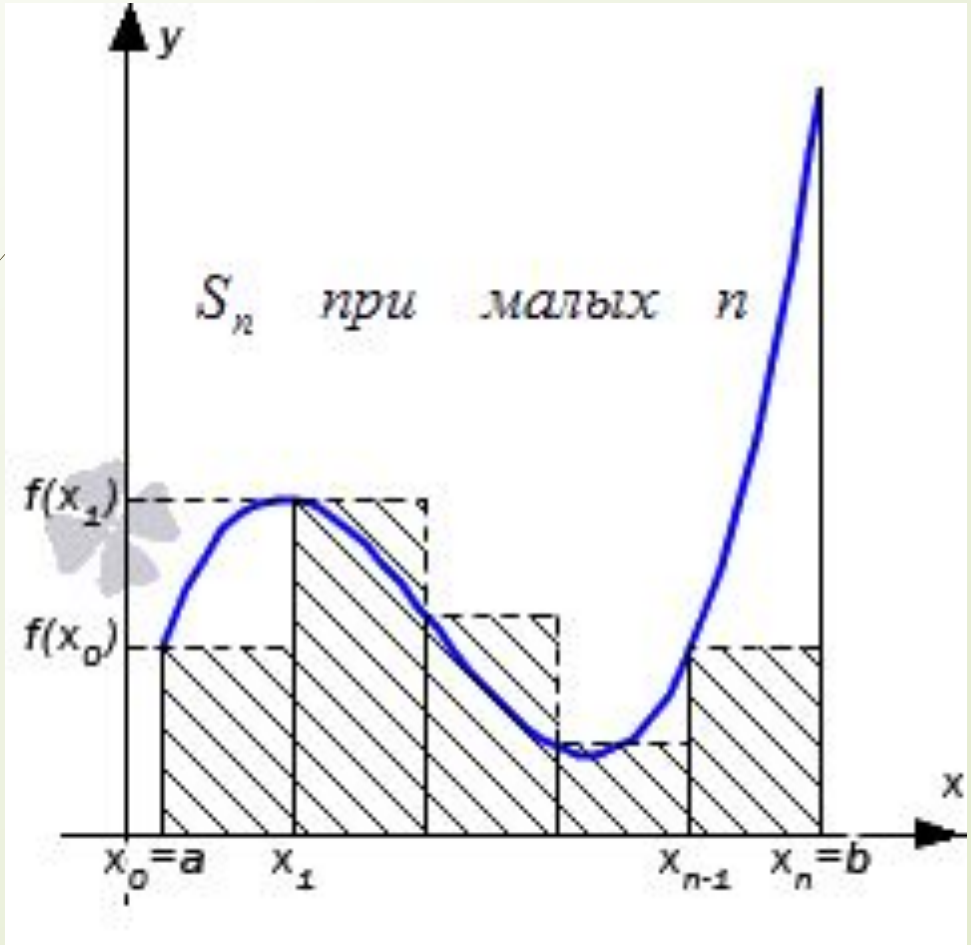

.Вспомним материал нашего урока, и попробуем найти решение.

*Как же мы можем найти площадь фигуры под графиком?*

Верно, мы будем разбивать эту фигуру.

Отрезок *[a; b]* разбиваем на *n* равных частей точками ,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$



и соответствующая площадь криволинейной трапеции приближенно представлялась суммой площадей элементарных прямоугольников

$$S_n = f(x_0)\cdot(x_1 - x_0) + f(x_1)\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\cdot(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= f(x_0)\cdot\frac{b-a}{n} + f(x_1)\cdot\frac{b-a}{n} + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\frac{b-a}{n} =$$

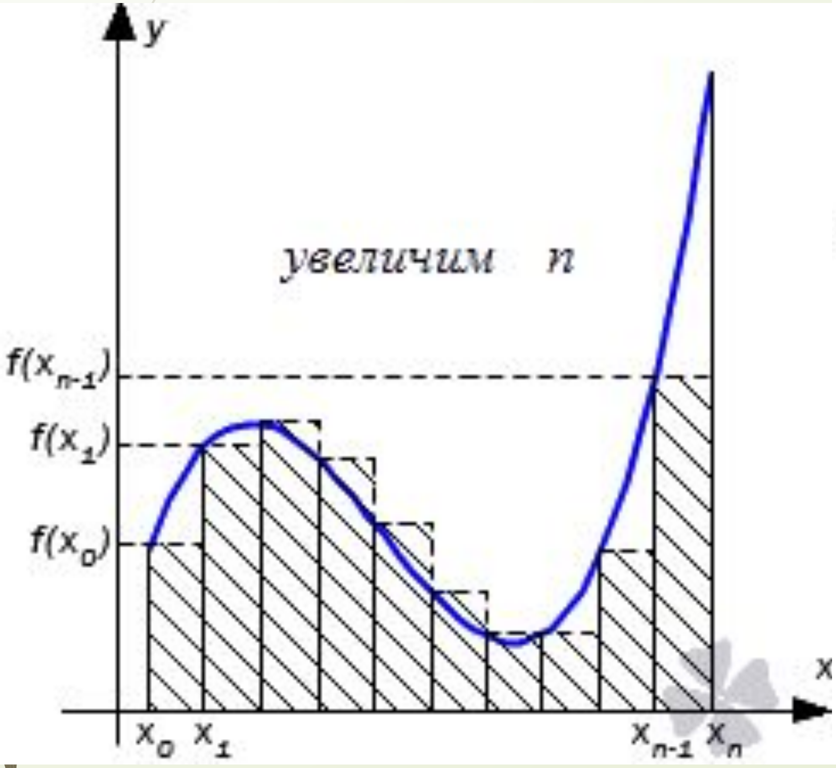
$$= \frac{b-a}{n}\cdot\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right)$$

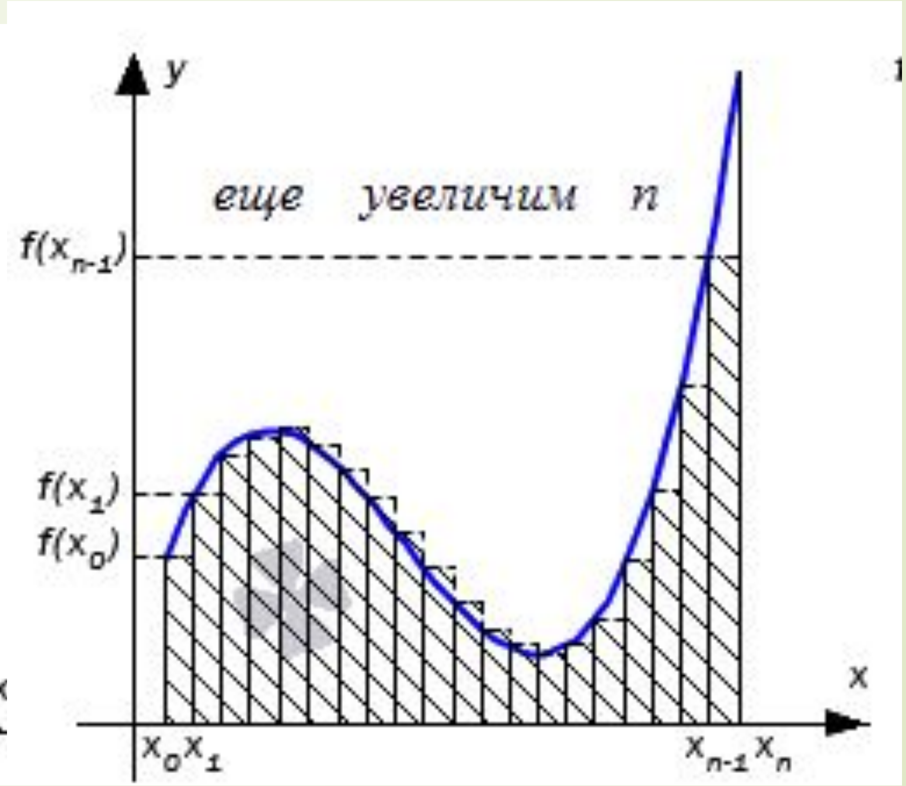


Но насколько точно мы найдем эту площадь? Как мы можем увеличить точность?

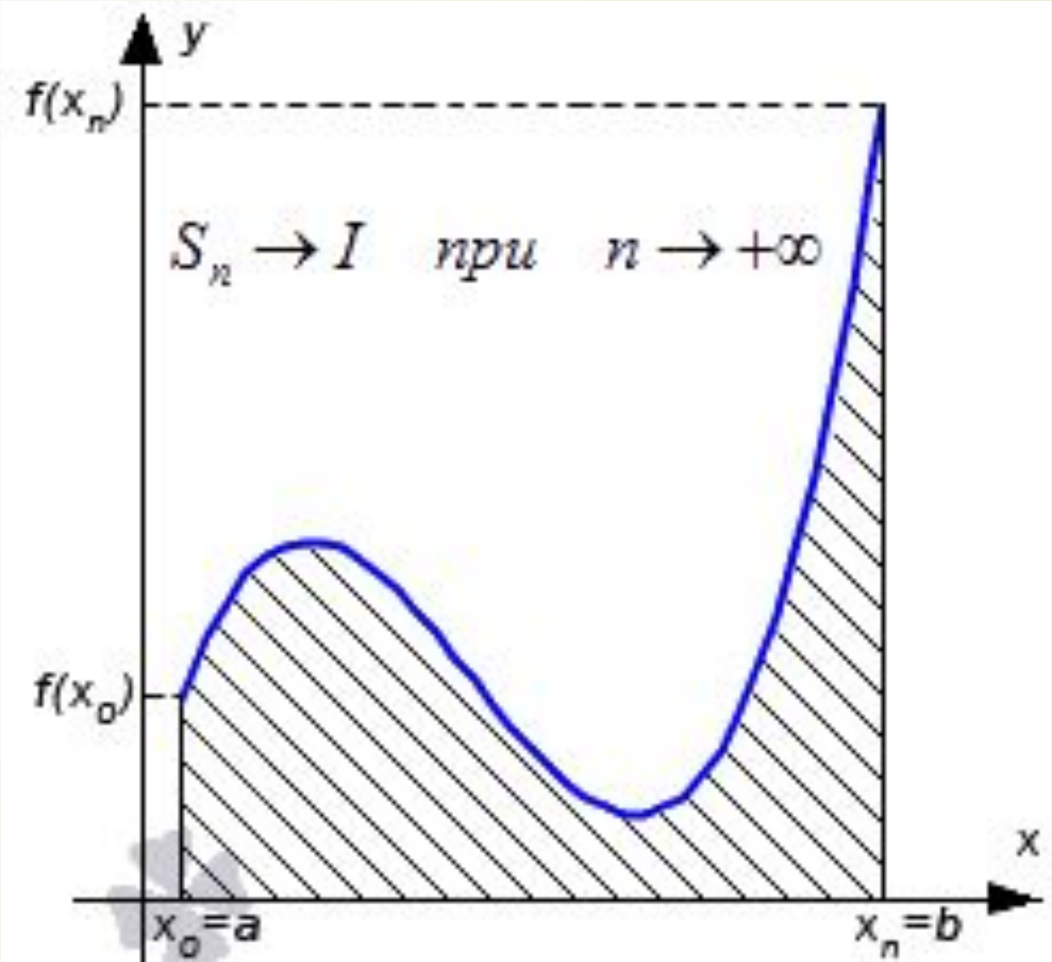
- Верно мы будем увеличивать n.

Что же будет меняться?



Далее делалось предположение, что значение этого выражения стремиться к некоторому числу при бесконечном увеличении количества точек разбиения отрезка *[a; b]*. То есть стремиться к искомой площади.



В итоге это предположение обобщали для любой непрерывной на отрезке функции $y = f(x)$ (не обязательно неотрицательной) и число назвали **определенным интегралом**..

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$