Параболалық теңдеуге қойылған бастапқы-шеттік есепті Галеркин әдісімен шешу

Орындаған: Джамалова А.Б

Мақсат

Параболалық теңдеуге қойылған бастапқы-шеттік есепті Галеркин әдісін пайдаланып сандық әдіс арқылы жуық шешімін табу

Есептің қойылымы

$$D = \{(x,t) \in R^2 : a \le x \le b, t \ge 0\}$$

Жазық облыста

$$L[u(x,t)] = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(x,t)u = g(x,t), \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_0 u(a,t) + a_1 \dfrac{\partial u(a,t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b,t) + b_1 \dfrac{\partial u(b,t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

шеттік шарттарын және (3)

$$u(x,0) = f(x),$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $U(x,t)$ шешімін табу керек.

Мұндағы $K(x,t),\ K_x^{'}(x,t),\ \beta(x,t),\ g(x,t),\ a_2(t),\ b_2(t) - D$ облысында үзіліссіз функциялар.

$(K(x,t) > 0);\ a_0, a_1, b_0, b_1 -$ берілген нақты сандар және $a_0^2 + a_1^2 > 0$,

$b_0^2 + b_1^2 > 0;\ f(x) - [a,b]$ -да туындысымен бірге үзіліссіз және де келесі шарттарды қанағаттандырады

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f^{'}(a) = a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f^{'}(b) = b_2(0). \end{cases}$$

D облысында екі рет дифференциалданатын

$$u_0(x,t),\ u_1(x),\ldots,u_n(x)$$

$u_0(x,t)$ - (2) шеттік шарттарды қанағаттандыратындай ,

$u_i(x)$ $(i \geq 1)$ - сынақ функциялары $[a,b]-$ да сызықты тәуелсіз және

біртекті шеттік

$$\begin{cases} a_0u(a) + a_1u'(a) = 0, \\ b_0u(b) + b_1u'(b) = 0. \end{cases}$$

шарттарды қанағаттандырадай аламыз.

$$u_n(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{n} \nu_k(t)u_k(x) \qquad (4)$$

(1) теңдеудегі $u_n(x,t)$ функциясын $u(x,t)$ функциясының орнына қойып,

R_1 сәйкессіздікті аламыз

$$R_1(v_1(t),v_2(t),\ldots,v_n(t),x,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{dv_k}{dt}u_k(x)+\frac{\partial u_0}{\partial t}-K(x,t)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{n}v_k u_k''\right)-$$

$$-\frac{\partial K}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n}v_k u_k'\right)-\beta(x,t)\left(u_0+\sum_{k=1}^{n}v_k u_k\right)-g(x,t)$$

немесе

$$R_1(v_1(t),v_2(t),\ldots,v_n(t),x,t)=\sum_{k=1}^{n}u_k\frac{dv_k}{dt}-\sum_{k=1}^{n}\left(Ku_k''+\frac{\partial K}{\partial x}u_k'+\beta u_k\right)v_k-$$

$$-\left(K\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\beta u_0+g-\frac{\partial u_0}{\partial t}\right) \tag{5}$$

$u_n(x,0)-$ ді (3) бастапқы шартқа қойып,

$$R_2(v_1(0), v_2(0), \dots, v_n(0), x) = u_0(x,0) + \sum_{k=1}^{n} v_k(0) u_k(x) - f(x) \quad (6)$$

$R_2 -$ сәйкессіздігін аламыз.

$v_k(t)$ —функциясы және $v_k(0)$ бастапқы мәндерінде сәйкессіздік қандай да бір мағынада аз болатындай етіп қосымша шарттар береміз .

Жалпы жағдайда Галеркин әдісінде бұл шарттар төмендегі теңдеулер жүйесімен анықталынады:

$$\left(R_1\left(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t), x, t\right), w_k(x)\right) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \tag{7}$$

$$\left(R_2\left(v_1(0), v_2(0), \ldots, v_n(0), x\right), w_k(x)\right) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \tag{8}$$

мұндағы $w_1(x), \ldots, w_n(x)$ – $[a, b]$ -да берілген сызықты тәуелсіз түзілетін функциялар; ал

$$\left(V(x), W(x)\right) = \int_a^b V(x) W(x) dx.$$

(7) шартты ашып жазайық

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(x)\frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^{n} v_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(Ku_j^{'}\right) + \beta u_j\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta u_0 + g(x,t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right), w_k(x)\right) = 0$$

немесе

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{dv_j}{dt}\left(u_j, w_k\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x}(Ku_j^{'}) + \beta u_j, w_k\right)v_j -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \beta u_0 + g(x,t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}, w_k(x)\right) = 0,$$

немесе

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{dv_j}{dt} - \sum c_{kj}(t)v_j = b_k(t), \quad k = \overline{1,n}; \qquad (9)$$

Мұндағы

$$a_{kj} = (u_j, w_k) = \int_a^b u_j(x) w_k(x) dx, \qquad (10)$$

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K u_j^{'}\right) + \beta u_j, w_k \right) = \int_a^b \left(K u_j^{''} + \frac{\partial K}{\partial x} u_j^{'} + \beta u_j \right) w_k dx, \qquad (11)$$

$$b_k(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \beta u_0 + g(x,t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}, w_k(x) \right) =$$

$$= \int_a^b \left(K \frac{\partial^2 u_0}{\partial^2 x} + \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) w_k dx, \qquad k = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,n}. \qquad (12)$$

Егерде өзіміздің қарауымызға

$$A=(a_{kj})_n,\quad C=(c_{kj})_n,\quad B=(b_{kj})_{n,1},\quad V=(v_j)_{n,1},$$

енгізсек, онда (9) жүйе матрицалық түрде

$$A\frac{dV}{dt}=CV+B. \tag{13}$$

жазамыз.

Енді (13)-дан

$$\frac{dV}{dt}=A^{-1}(CV+B) \tag{14}$$

аламыз.

Ал, енді (8) ашып жазсақ, онда

$$\left(u_0(x,0) + \sum_{j=1}^{n} \nu_j(0) u_j(x) - f(x), w_k(x) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(u_j(x), w_k(x) \right) \nu_j(0) + \left(u_0(x,0) - f(x), w_k(x) \right) = 0;$$

немесе

$$\sum_{j=1}^{n} \left(u_j(x), w_k(x) \right) \nu_j(0) = \left(f(x) - u_0(x,0), w_k(x) \right), \quad k = \overline{1,n};$$

немесе

$$\sum a_{kj} \nu_j(0) = d_k, \quad k = \overline{1,n}; \qquad (15)$$

Мұндағы a_{kj} (10) формуласы арқылы анықталады, ал

$$d_k = \left(f(x) - u_0(x,0), w_k(x)\right) = \int_a^b \left(f(x) - u_0(x,0)\right) w_k(x)\,dx.$$

Егер $D = \left(d_k\right)_{n,1}$ матрицасын енгізсек, онда (15)-дан

$$V(0) = A^{-1}D \qquad (16)$$

аламыз.

Осылайша, (4)-нің сынақ шешімін анықтайтын $V_k(t), \quad k = \overline{1, n}$,

функцияларын табу үшін (14) нормал жүйесінің (16) бастапқы шарттары

бар n белгісіз сызықты жай дифференциалдық теңдеулер жүйесіне қойылған

Коши есебін аламыз. Көрсетілген Коши есебін шешіп және осы $u_n(x,t)$ шешімнен анықталынатын $v_k(t)$ функцияларын (4)-ге қойып, сынақ шешімдерінің құрылуын аяқтаймыз.

$$\left(\frac{d}{dt}U - K(x,t)\cdot\frac{d^2}{dx^2}U - \frac{d}{dx}K(x,t)\cdot\frac{d}{dx}U - \beta(x,t)\cdot U\right) = g(x,t)$$

$$a0\cdot U(a,t) + a1\cdot\frac{d}{dx}U(a,t) = a2(t)$$

$$b0\cdot U(b,t) + b1\cdot\frac{d}{dx}U(b,t) = b2(t)$$

$$U(x,0) = f(x)$$

$c1 := 0.1 \quad c2 := 1 \quad c3 := 2 \quad c4 := 1$

$K(x) := c1 \quad \beta(x) := 0 \quad g(x) := 0$

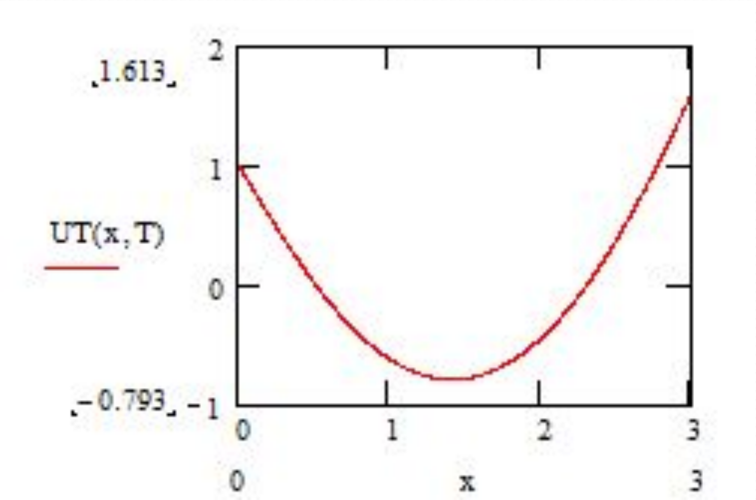
$a := 0 \quad b := \pi$

$a0 := 1 \quad a1 := 0 \quad a2 := c2 \quad b0 := 1 \quad b1 := 0 \quad b2 := c3$

$$f(x) := c4\cdot x^2 + \frac{c3 - c2 - c4\cdot b^2}{b}\cdot x + c2$$

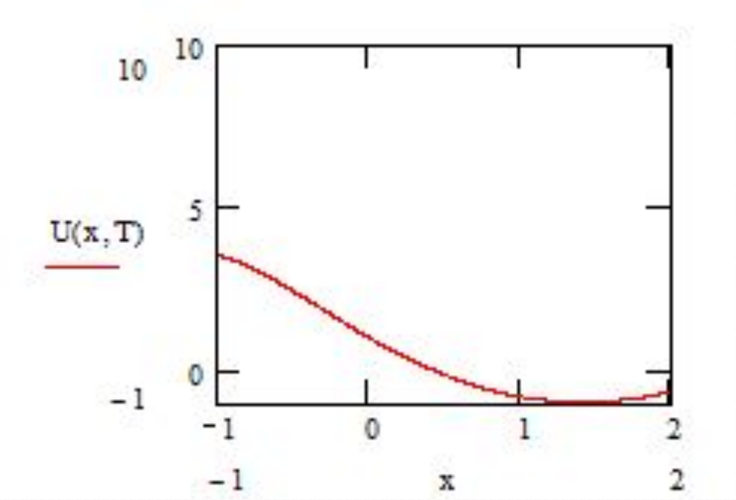
$$f(x) \rightarrow x^2 + \frac{\left(1-\pi^2\right)}{\pi}\cdot x + 1$$

Сызықты параболалық теңдеудің Галеркин әдісі арқылы Math Cad программасында

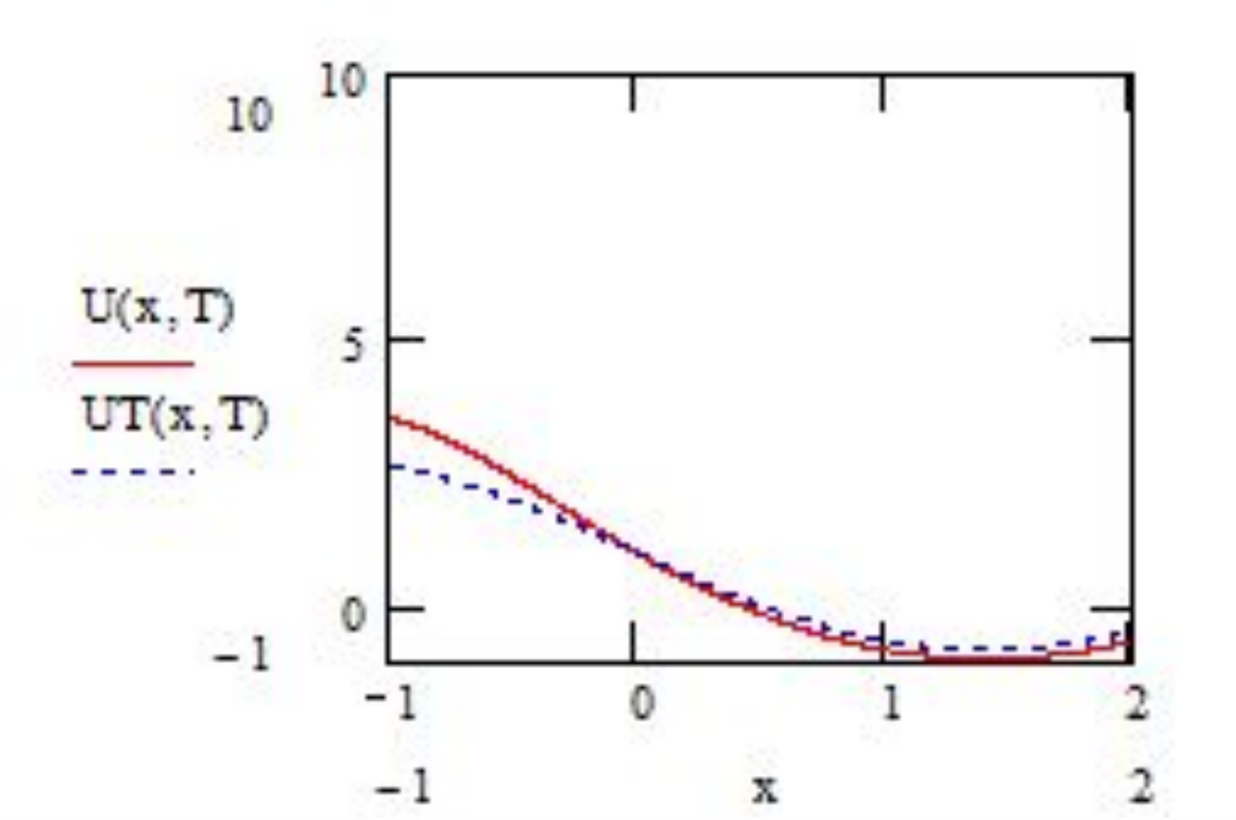


Дәл шешімнің графигі

Жуық шешімнің графигі



Галеркин әдісіндегі дәл шешімімен жуық шешімінің графиктері



Пайдаланылған әдебиеттер

1. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов-Алгоритмы методов взвешенных невязок в системе MATHCAD

2. С.Ю Игнатович-Метод Галеркина решения линейных граничных задач для дифференциальных уравнений

3. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. — Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1965