Гиперболалық теңдеуге қойылған бастапқы-шеттік есепті Галеркин әдісімен шешу

Орындаған: Асқар.Д.И

Мақсат

Гиперболалық теңдеуге қойылған бастапқы-шеттік есепті Галеркин әдісін пайдаланып сандық әдіс арқылы жуық шешімін табу;

Есептің қойылымы

$$D = \{(x,t) \in R^2 : a \le x \le b, t \ge 0\}$$

$$L[u(x,t)] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - K_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - K_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \beta(x,t)u = g(x,t), \qquad (1)$$

Шеттік шарттары

$$\begin{cases} a_0 u(a,t) + a_1 \dfrac{\partial u(a,t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b,t) + b_1 \dfrac{\partial u(b,t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \qquad (2)$$

Бастапқы шарттары

$$u(x,0) = f(x), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), \qquad (4)$$

және $\gamma(x,t),\quad K_1(x,t),\quad (K_1 \geq 0),\quad K_2(x,t),\ \beta(x,t),\ g(x,t)\ -\ D$ облысындағы үзіліссіз функциялар;

$a_2(t),\quad b_2(t)\ -\ [0,\infty)$ аралығында дифференциалданатын функциялар;

$a_0, a_1, b_0, b_1\ -$ берілген нақты сандар, және $a_0^2 + a_1^2 > 0,\ b_0^2 + b_1^2 > 0$

$f(x)\ -$берілген функция, $f^{'}(x)-$ мен бірге $[a,b]-$ да үзіліссіз және

Мына шарттарды қанағаттандырады

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f^{'}(a) = a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f^{'}(b) = b_2(0); \end{cases}$$

$\varphi(x)$ – берілген функция, $[a,b]$– да үзіліссіз және

мына шарттарды қанағаттандырады

$$\begin{cases} a_0\varphi(a) + a_1\varphi^{'}(a) = \dfrac{da_2(0)}{dt}, \\ b_0\varphi(b) + b_1\varphi^{'}(b) = \dfrac{db_2(0)}{dt}. \end{cases}$$

D облысында қандай да бір жүйеде екі рет дифференциалданатын

$$u_0(x,t), u_1(x), \ldots, u_n(x)$$

$u_0(x,t)-$ (2) шеттік шарттарды қанағаттандыратындай

$u_i(x) \quad (i \geq 1)$ сынақ функциялары $[a,b]$ -де

сызықты тәуелсіз және біртекті шеттік

$$\begin{cases} a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0. \end{cases}$$

шарттарды қанағаттандыратындай аламыз.

$$u_n(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{n} v_k(t) u_k(x) \qquad (5)$$

$u_n(x,t) -$ ті (1)-ші теңдеудегі $u\ (x,t) -$ нің орнына қойып R_1 сәйкессіздігін алам

$$R_1(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t), x, t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + \gamma(x,t) \frac{\partial v_k}{\partial t} \right) u_k(x) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \gamma(x,t) \frac{\partial u_0}{\partial t} -$$

$$- K_1(x,t) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{n} v_k u_k'' \right) - K_2(x,t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} v_k u_k' \right) - \beta(x,t) \left(u_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k u_k \right) - g(x,t)$$

немесе

$$R_1(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t), x, t) = \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} - \gamma \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial v_k}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} \left(K_1 u_k'' + K_2 u_k' + \beta u_k \right) v_k -$$

$$- \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right).$$

$u_n(x,0)-$ ді (3) бастапқы шартқа қойып

$$R_2(v_1(0),\ldots,v_n(0),x)=u_0(x,0)+\sum_{k=1}^{n}v_k(0)u_k(x)-f(x). \qquad (6)$$

$u_n(x,0)-$ ді (4) бастапқы шартқа қойып

$$R_3(v_1'(0),\ldots,v_n'(0),x)=\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}v_k'(0)u_k(x)-\varphi(x). \qquad (7)$$

$R_2,\ R_3-$ сәйкессіздіктерін аламыз

$v_k(t)$ – Функциясы және $v_k(0),\ \dot{v}_k(0),$ бастапқы мәндерінде

Сәйкессіздік аз болатындай етіп қосымша шарттар береміз

Жалпылама Галеркин әдісінде бұл шарттар

$$\left(R_1\left(v_1(t),\ldots,v_n(t),x,t\right),w_k(x)\right)=0,\quad k=\overline{1,n}\ ; \qquad (8)$$

$$\left(R_2\left(v_1(0),\ldots,v_n(0),x\right),w_k(x)\right)=0,\quad k=\overline{1,n}\ ; \qquad (9)$$

$$\left(R_3\left(\dot{v}_1(0),\ldots,\dot{v}_n(0),x\right),w_k(x)\right)=0,\quad k=\overline{1,n}\ ; \qquad (10)$$

Теңдеулер жүйесімен анықталынады

$$\left(V(x), W(x)\right) = \int_a^b V(x) W(x) dx$$

(8) шартты ашып жазсақ

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(x) \frac{\partial^2 \nu_j}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{n} \gamma u_j \frac{\partial \nu_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \left(K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j \right) \nu_j - \right.$$

$$\left. - \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x,t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), w_k(x) \right) = 0,$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(u_j, w_k)\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{n}(\gamma u_j, w_k)\frac{\partial v_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}\left(K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j, w_k\right)v_j - \right.$$

$$\left. - \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x,t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), w_k(x) \right) = 0,$$

немесе

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{d^2 v_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n} h_{kj}\frac{d v_j}{dt} - \sum_{j=1}^{n} c_{kj} v_j = b_k, \qquad k = \overline{1,n}; \tag{11}$$

$$a_{kj} = (u_j, w_k) = \int_a^b u_j(x) w_k(x) dx, \qquad (12)$$

$$h_{kj}(t) = \int_a^b \gamma(x,t) u_j(x) w_k(x) dx$$

$$c_{kj}(t) = \int_a^b \left(K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j \right) w_k dx,$$

$$b_k(t) = \int_a^b \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x,t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) w_k(x) dx ,$$

$$k = \overline{1, n}, \qquad j = \overline{1, n}.$$

$$A=(a_{kj})_n,\qquad H=(h_{kj})_n,\qquad C=(c_{kj})_n,\qquad B=(b_k)_{n,1},\qquad V=(v_j)_{n,1},$$

$$A\frac{d^2V}{dt^2}=-H\frac{dV}{dt}+CV+B.$$

$$\frac{d^2V}{dt^2}=A^{-1}\left(-H\frac{dV}{dt}+CV+B\right). \qquad (13)$$

(9)-шы шартты ашып жазатын болсақ

$$\left(u_0(x,0) + \sum_{j=1}^{n} v_j(0) u_j(x) - f(x), w_k(x) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(u_j(x), w_k(x) \right) v_j(0) + \left(u_0(x,0) - f(x), w_k(x) \right) = 0$$

немесе

$$\sum_{j=1}^{n} \left(u_j(x), w_k(x) \right) v_j(0) = \left(f(x) - u_0(x,0), w_k(x) \right), \quad k = \overline{1,n} \; ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j(0) = d_k, \qquad k = \overline{1,n;} \qquad (14)$$

$$d_k = (f(x) - u_0(x,0), w_k(x)) = \int_a^b (f(x) - u_0(x,0)) w_k(x) dx$$

$$D = (d_k)_{n,1}$$

(9)-шы формуладан

$$V(0) = A^{-1} D \qquad (13)$$

Енді (10)-шы формуланы ашып жазсақ

$$\left(\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{d\nu_j(0)}{dt} u_j(x) - \varphi(x), w_k(x) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(u_j(x), w_k(x) \right) \frac{d\nu_j(0)}{dt} + \left(\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} - \varphi(x), w_k(x) \right) = 0$$

немесе

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{d\nu_j(0)}{dt} = r_k, \quad k = \overline{1,n}; \qquad (14)$$

$$r_k = \left(\varphi(x) - \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t}, w_k(x) \right) = \int_a^b \left(\varphi(x) - \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} \right) w_k(x)dx$$

$R = (r_k)_{n,1}$ Матрицасын енгізіп

$$\frac{dV(0)}{dt} = A^{-1}R. \qquad (15)$$

Осылайша (5)-тің сынақ шешімін анықтайтын $v_k(t), \quad k=\overline{1,n};$

функциясын табу үшін (13) және (15) бастапқы шарттары бар 2-ші ретті сызықты жай дифференциалдық теңдеудің канондық жүйесіне Коши есебін аламыз. Берілген Коши есебін шешіп және осы шешіммен анықталынатын $v_k(t)$

функцияларын (5)-ке қойып, $u_n(x,t)$

сынақ шешімнің құрылуын аяқтаймыз.

$$D = \{(x,t) \in R^2 : a \le x \le b, t \ge 0\}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}U + \gamma(x,t) \cdot \frac{d}{dt}U - K1(x,t) \cdot \frac{d^2}{dx^2}U - K2(x,t) \cdot \frac{d}{dx}U - \beta(x,t) \cdot U = g(x,t)$$

$$a0 \cdot U(a,t) + a1 \cdot \frac{d}{dx}U(a,t) = a2(t)$$

$$b0 \cdot U(b,t) + b1 \cdot \frac{d}{dx}U(b,t) = b2(t)$$

$$U(x,0) = f(x)$$

$$\frac{d}{dt}U(x,0) = \phi(x)$$

$$c1 := 1 \qquad c2 := 1 \qquad c3 := 2 \qquad c4 := 1$$

$$\gamma(x) := 0 \qquad K1(x) := c1 \qquad K2(x) := 0 \qquad \beta(x) := 0 \qquad g(x) := 0$$

$$a := 0 \qquad b := \pi$$

$$a0 := 1 \qquad a1 := 0 \qquad a2 := c2 \qquad b0 := 1 \qquad b1 := 0 \qquad b2 := c3$$

$$\phi(x) := 0 \qquad f(x) := c4 \cdot x^2 + \frac{c3 - c2 - c4 \cdot b^2}{b} \cdot x + c2$$

$$f(x) \rightarrow x^2 + \frac{\left(1 - \pi^2\right)}{\pi} \cdot x + 1$$

U1 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.212	0.222	0.252	0.302	0.364	0.427	0.49	0.553	0.616	0.679
2	-0.379	-0.369	-0.339	-0.289	-0.219	-0.129	-0.019	0.106	0.231	0.357
3	-0.773	-0.763	-0.733	-0.683	-0.613	-0.523	-0.413	-0.283	-0.133	0.038
4	-0.969	-0.959	-0.929	-0.879	-0.809	-0.719	-0.609	-0.479	-0.329	-0.159
5	-0.967	-0.957	-0.927	-0.877	-0.807	-0.717	-0.607	-0.477	-0.327	-0.157
6	-0.769	-0.759	-0.729	-0.679	-0.609	-0.519	-0.409	-0.279	-0.129	0.041
7	-0.373	-0.363	-0.333	-0.283	-0.213	-0.123	-0.013	0.117	0.267	0.438
8	0.221	0.231	0.261	0.311	0.381	0.471	0.581	0.706	0.831	0.957
9	1.012	1.022	1.052	1.102	1.164	1.227	1.29	1.353	1.416	1.479
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Дәл шешім

Жуық шешім

U2 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.212	0.223	0.255	0.304	0.362	0.425	0.489	0.55	0.61	0.67	0.733
2	-0.379	-0.369	-0.339	-0.288	-0.217	-0.128	-0.022	0.097	0.225	0.357	0.489
3	-0.773	-0.763	-0.735	-0.687	-0.616	-0.523	-0.406	-0.269	-0.116	0.051	0.225
4	-0.969	-0.959	-0.929	-0.879	-0.809	-0.719	-0.609	-0.479	-0.329	-0.158	0.034
5	-0.967	-0.957	-0.925	-0.873	-0.804	-0.716	-0.612	-0.488	-0.342	-0.173	0.022
6	-0.769	-0.759	-0.729	-0.679	-0.609	-0.519	-0.409	-0.279	-0.129	0.042	0.234
7	-0.373	-0.363	-0.335	-0.287	-0.216	-0.123	$\cdot 10^{-3}$	0.131	0.284	0.451	0.625
8	0.221	0.231	0.261	0.312	0.383	0.472	0.578	0.697	0.825	0.957	1.089
9	1.012	1.023	1.055	1.104	1.162	1.225	1.289	1.35	1.41	1.47	1.533
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

$U12 := U1 - U2$

$U12 =$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$3.521\cdot10^{-3}$	$-1.54\cdot10^{-3}$	$2.1\cdot10^{-3}$	$1.737\cdot10^{-3}$	$1.463\cdot10^{-3}$	$3.074\cdot10^{-3}$	$6.169\cdot10^{-3}$	$8.633\cdot10^{-3}$	$8.132\cdot10^{-3}$
2	$-3.43\cdot10^{-4}$	$1.152\cdot10^{-3}$	$1.546\cdot10^{-3}$	$1.248\cdot10^{-3}$	$3.213\cdot10^{-3}$	$8.642\cdot10^{-3}$	$6.482\cdot10^{-3}$	$1.776\cdot10^{-5}$	$-6.55\cdot10^{-3}$
3	$2.708\cdot10^{-3}$	$4.367\cdot10^{-3}$	$3.71\cdot10^{-3}$	$1.937\cdot10^{-4}$	$6.303\cdot10^{-3}$	-0.013	-0.017	-0.013	$9.132\cdot10^{-4}$
4	$1.066\cdot10^{-4}$	$2.333\cdot10^{-4}$	$1.243\cdot10^{-5}$	$2.418\cdot10^{-4}$	$6.54\cdot10^{-4}$	$5.829\cdot10^{-4}$	$1.019\cdot10^{-4}$	$1.167\cdot10^{-3}$	$2.386\cdot10^{-3}$
5	$-2.51\cdot10^{-3}$	$3.888\cdot10^{-3}$	$3.765\cdot10^{-3}$	$8.864\cdot10^{-4}$	$4.213\cdot10^{-3}$	0.01	0.015	0.016	0.01
6	$1.066\cdot10^{-4}$	$2.333\cdot10^{-4}$	$1.243\cdot10^{-5}$	$2.418\cdot10^{-4}$	$6.54\cdot10^{-4}$	$5.829\cdot10^{-4}$	$1.019\cdot10^{-4}$	$1.167\cdot10^{-3}$	$2.386\cdot10^{-3}$
7	$2.708\cdot10^{-3}$	$4.367\cdot10^{-3}$	$3.71\cdot10^{-3}$	$1.937\cdot10^{-4}$	$6.303\cdot10^{-3}$	-0.013	-0.017	-0.013	$9.132\cdot10^{-4}$
8	$-3.43\cdot10^{-4}$	$1.152\cdot10^{-3}$	$1.546\cdot10^{-3}$	$1.248\cdot10^{-3}$	$3.213\cdot10^{-3}$	$8.642\cdot10^{-3}$	$6.482\cdot10^{-3}$	$1.776\cdot10^{-5}$	$-6.55\cdot10^{-3}$
9	$3.521\cdot10^{-3}$	$-1.54\cdot10^{-3}$	$2.1\cdot10^{-3}$	$1.737\cdot10^{-3}$	$1.463\cdot10^{-3}$	$3.074\cdot10^{-3}$	$6.169\cdot10^{-3}$	$8.633\cdot10^{-3}$	$8.132\cdot10^{-3}$
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$K12 := \max\left(\left|\max\left(U12^{\langle 10\rangle}\right)\right|, \left|\min\left(U12^{\langle 10\rangle}\right)\right|\right)$$

$$K12 = 0.01$$

Пайдаланылған әдебиеттер

1. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов-Алгоритмы методов взвешенных невязок в системе MATHCAD

2. С.Ю Игнатович-Метод Галеркина решения линейных граничных задач для дифференциальных уравнений

3. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. — Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1965