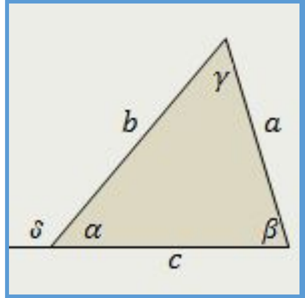
Треугольник – это геометрическая фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой (вершин треугольника) и трёх отрезков с концами в этих точках (сторон треугольника).



Углами (внутренними углами) треугольника называются три угла, каждый из которых образован тремя лучами, выходящими из вершин треугольника и проходящими через две другие вершины.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный внутреннему углы треугольника.

Сумма углов треугольника равна 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

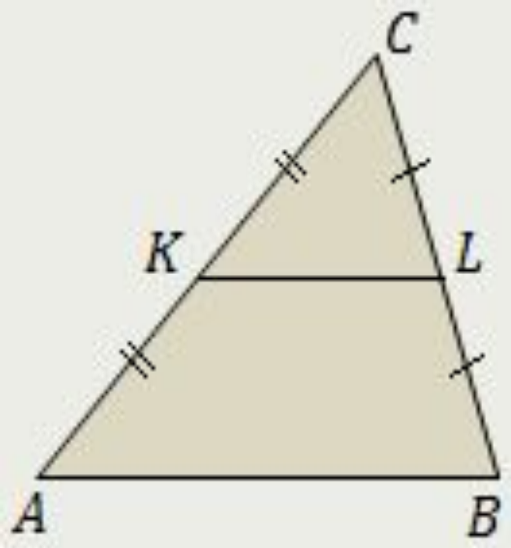
Внешний угол равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, и больше любого внутреннего, с ним не смежного:

$$\delta = \beta + \gamma; \quad \delta > \beta; \quad \delta > \gamma$$

Длина каждой стороны треугольника больше разности и меньше суммы длин двух других сторон: $|a - b| < c < a + b$

В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол:

$$\beta > \gamma \Rightarrow b > c; \quad b > c \Rightarrow \beta > \gamma$$



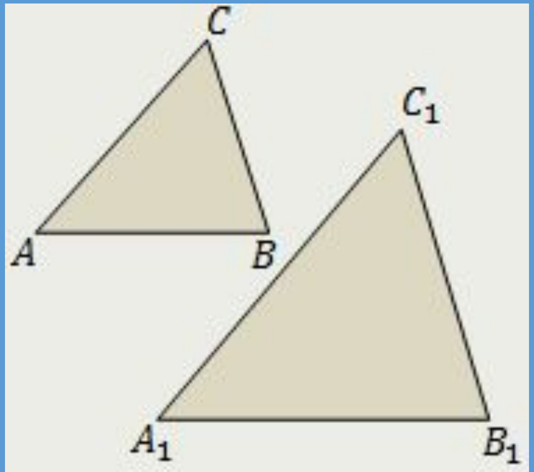
Средней линией треугольника называется отрезок, который соединяет середины двух его сторон.

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине:

$$KL \parallel AB; \quad KL = \frac{AB}{2}$$

Подобие треугольников

Подобными называются треугольники, у которых соответствующие стороны пропорциональны.



Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом подобия:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Два треугольника подобны, если:

- **Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.**
- **Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, и углы, образованные этими сторонами, равны.**
- **Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.**

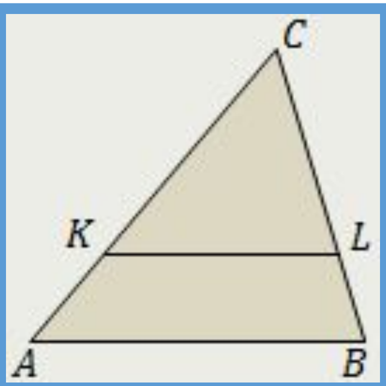
У подобных треугольников соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки

$$\angle A = \angle A_1; \quad \angle B = \angle B_1; \quad \angle C = \angle C_1;$$

$$\frac{h_a}{h_{a_1}} = \frac{h_b}{h_{b_1}} = \dots = \frac{m_a}{m_{a_1}} = \dots = \frac{l_c}{l_{c_1}} = k.$$

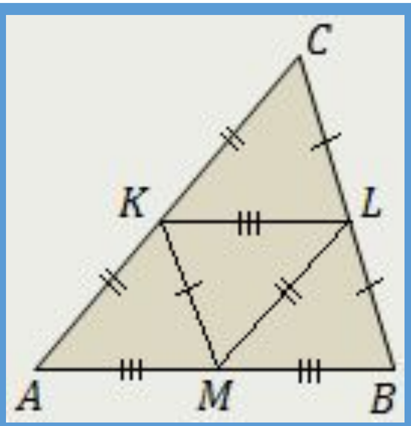
Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Прямая, пересекающая две стороны треугольника, и параллельная третьей, отсекает треугольник, подобный данному:

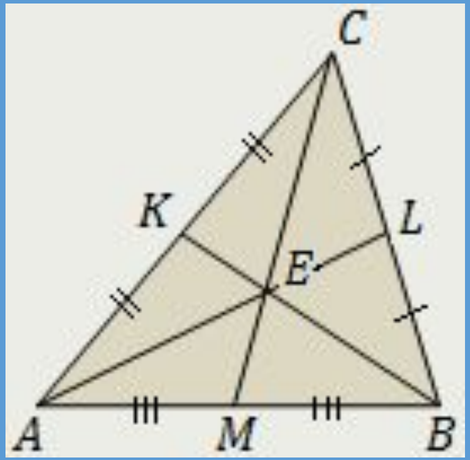
$$\frac{KL \parallel AB}{\Delta ABC \sim \Delta KLC}$$



Три средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника, подобные данному, с коэффициентом подобия ½:

$$\Delta AMK = \Delta KLC = \Delta MBL = \Delta LKM,$$
$$\Delta AMK \sim \Delta ABC;\quad \Delta KLC \sim \Delta ABC;\quad \Delta MBL \sim \Delta ABC;\quad \Delta LKM \sim \Delta ABC.$$

Медианы треугольника



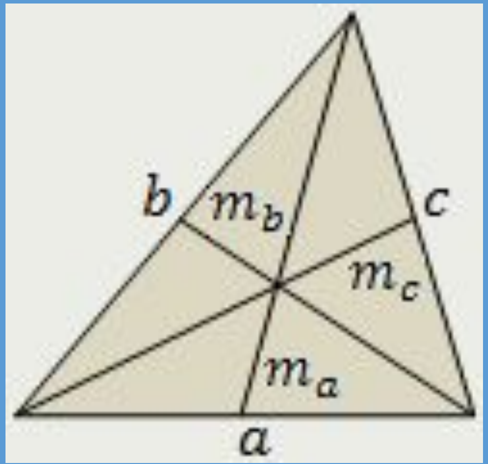
Медианой треугольника называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, делящей медианы в отношении 2:1, считая от вершины:

$$AE:EL = BE:EK = CE:EM = 2:1.$$

- **Медиана делит треугольник на два равновеликих (с равными площадями) треугольника.**
- **Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников:**

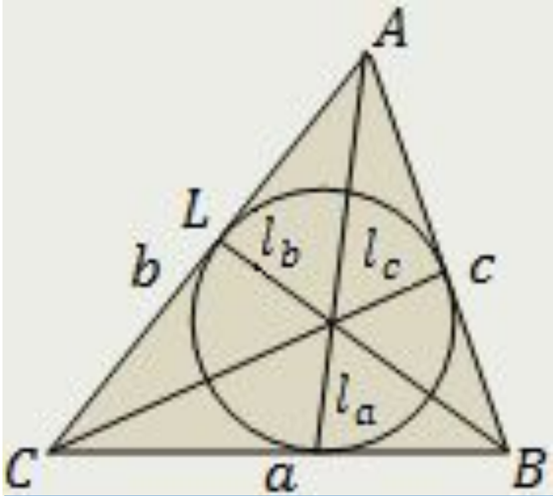
$$S_{\Delta ACM} = S_{\Delta BCM}; \quad S_{\Delta ABK} = S_{\Delta CBK}; \quad S_{\Delta ACL} = S_{\Delta ABL}.$$
$$S_{\Delta AEM} = S_{\Delta BEM} = S_{\Delta AEK} = S_{\Delta CEK} = S_{\Delta CEL} = S_{\Delta BEL}.$$



Длины медиан, проведённых к соответствующим сторонам треугольника, равны:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$
$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2};$$
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Биссектрисы треугольника



Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне.

Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, находящейся внутри треугольника, равноудалённой от трёх его сторон, которая является центром окружности, вписанной в данный треугольник.

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую углу сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам:

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}.$$

Длина биссектрисы угла А:

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{b+c};$$

$$l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)};$$

$$l_a = \frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

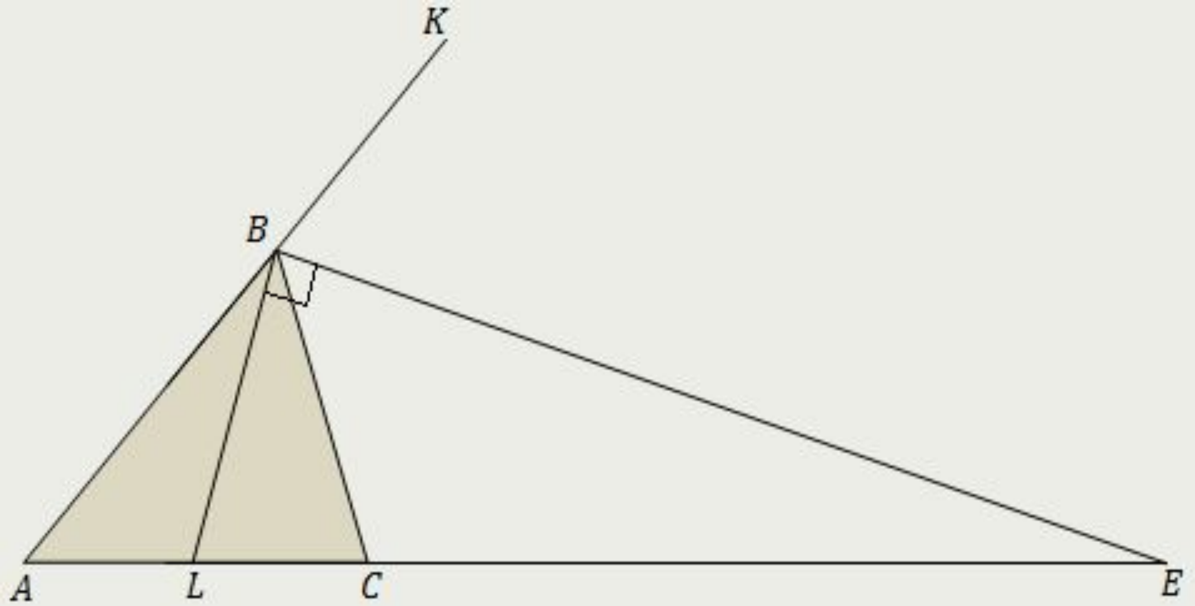
Биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего угла перпендикулярны.

Биссектриса внешнего угла треугольника делит (внешне) противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

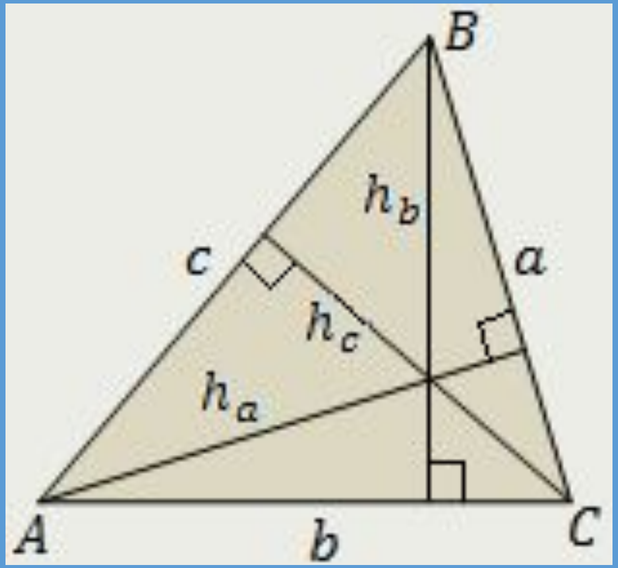
BL – биссектриса угла B;

BE – биссектриса внешнего угла CBK:

$$BL \perp BE; \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}.$$



Высоты треугольника



Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на продолжение стороны.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется ортоцентром треугольника.

Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

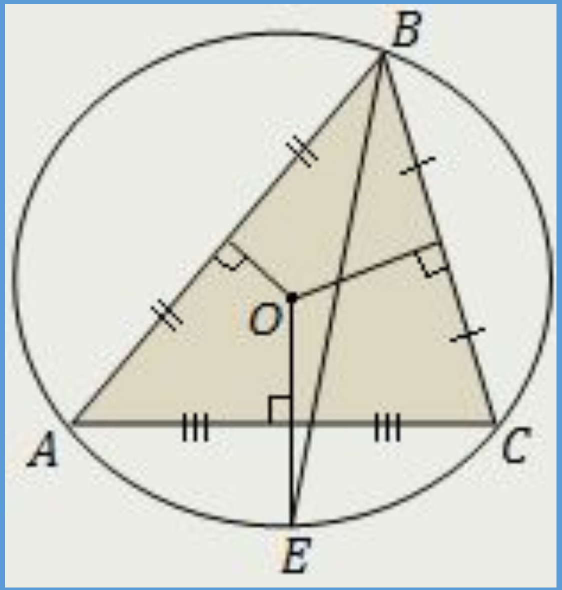
Длина высоты, проведённой к стороне a:

$$h_a = b \sin C = c \sin B;$$

$$h_a = \frac{bc}{2R};$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

Серединные перпендикуляры



Серединный перпендикуляр – это прямая, которая проходит через середину стороны треугольника перпендикулярно к ней.

Три серединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около данного треугольника.

Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с серединным перпендикуляром противолежащей стороны лежит на окружности, описанной около данного треугольника.