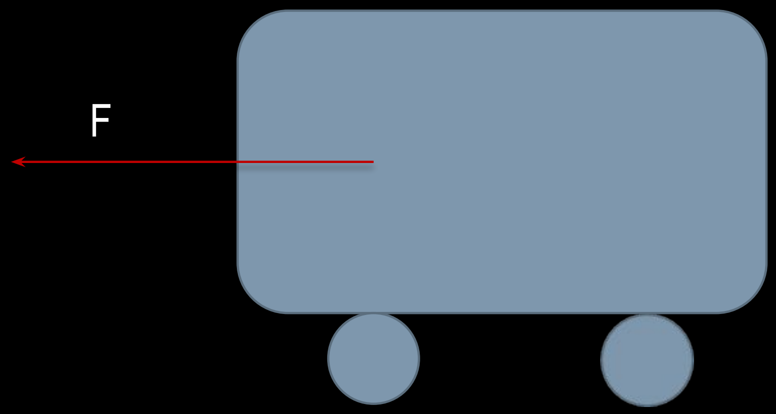
ВЕКТОРЫ

Шамсутдинов Никита 9 «Г»

СКАЛЯРЫ. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА.

Мы знаем, что есть 2 вида величин. Например, длина, площадь,
объем, масса и прочие полностью определяются заданием своих
численных величин. Такие величины называются **скалярными вели-
чинами** или просто **скалярами.**
Но многие физические величины, например, сила, давление, скорость,
перемещение и т.д. характеризуются не только своим числовым
Значением, то и направлением в пространстве. Такие физические
Величины называются **векторными величинами** или просто
Векторами. Например, если на какое-либо тело воздействовать
определенной силой, то эта сила изображается направленным
отрезком. (см рис. на след.слайде) Длина отрезка соответствует численной величине силы, а
стрелка указывает на направление воздействия силы.

ВЕКТОР



ВЕКТОРЫ В ГЕОМЕТРИИ

Аналогично можно ввести понятие геометрического вектора. В отличие от физических векторов, векторы в геометрии не имеют конкретной природы (т.е. не выражают силу, скорость и т.п.). Геометрические векторы рассматриваются просто как «направленные отрезки». *Любой направленный отрезок называется* ***вектором.***

В геометрии также рассматривают вектор, в котором начало и конец совпадают. Такой вектор называется **нулевым вектором.** Отсюда следует,что любую точку плоскости можно рассматривать как нулевой вектор. Нулевой вектор обозначается так: 0

НАЧАЛО И КОНЕЦ ВЕКТОРА

Любой отрезок имеет 2 конца. Назовем один из этих концов **начальной точкой**, или **началом**, а другой – **концом** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу. Конец вектора изображается стрелкой.

A $\vec{a}$ B

Векторы можно обозначать двумя заглавными латинскими буквами ($\overrightarrow{AB}$) или одной строчной ($\vec{a}$)

РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Длину отрезка $\overrightarrow{AB}$ называют *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$. Аналогично, модуль (длина) вектора a также записывают через $|\vec{a}|$. Например, $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\vec{a}|=7$.

Если отрезок AB лежит на примой a, то говорят, что вектор $\overrightarrow{AB}$ также лежит на прямой a.

Если 2 вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то такие векторы называются ***коллинеарными.*** Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывают так $\vec{a}||\vec{b}$. (см рис. 1 на след. слайде)

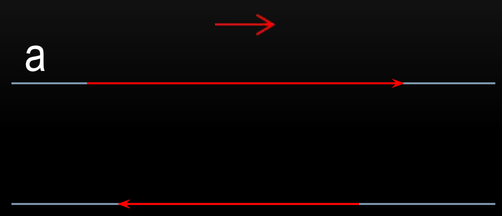


рис. 1

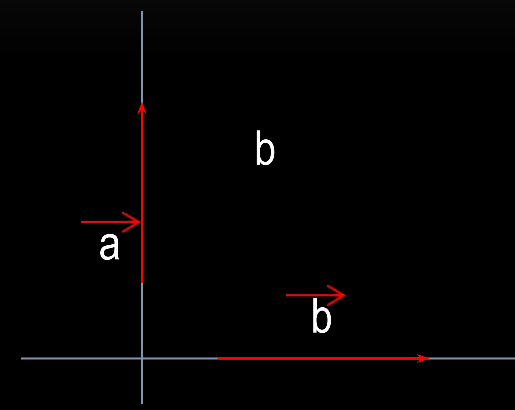


рис. 2

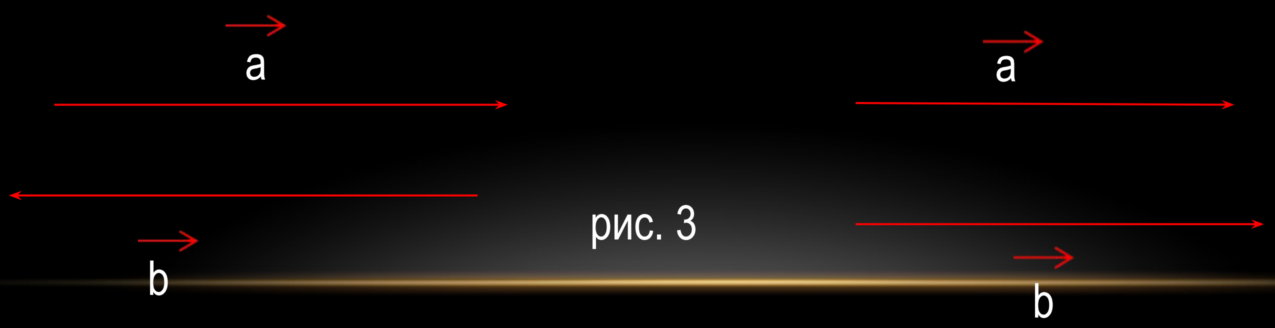
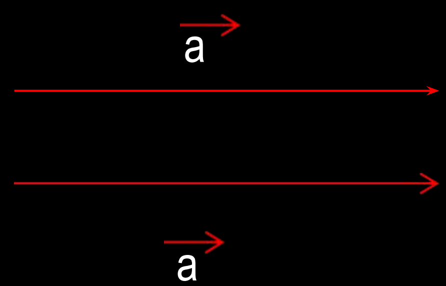


рис. 3

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на перпендикулярных прямых, то их называют **перпендикулярными** (ортогональными) векторами и записывают $\vec{a} \perp \vec{b}$. (см рис. 2)

Если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то их называют **сонаправленными** векторами. Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывают так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны и имеют разные направления, то их называют **противоположно направленными** и записывают так: $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$. (см рис. 3)

Векторы** называются **равными**, если они сонаправлены и их модули равны.* Иными словами, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными, т.е. $\vec{a} = \vec{b}$.



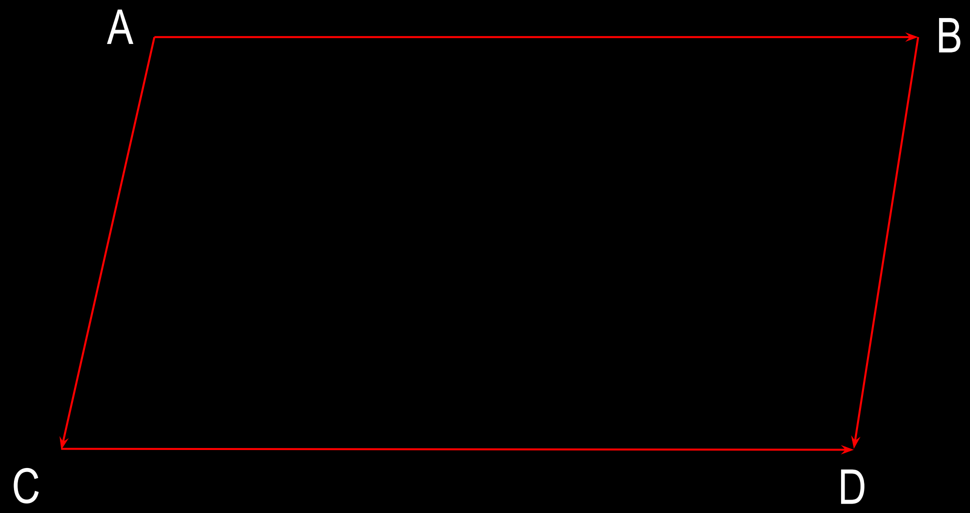
СВОЙСТВА РАВНЫХ ВЕКТОРОВ

Теорема. *Равные векторы можно совместить параллельным переносом, и, обратно, если векторы совмещаются парллельным переносом, то эти векторы равны.*

Доказательство. Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны (см. рис. на след. слайде). Тогда по определению $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, т.е. четырехугольник ABCD является параллелограммом, т.к. противоположные стороны AB и CD параллельны и равны. Следовательно, AC=BD и AC||BD, т.е. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ можно совместить параллельным переносом. При этом точка A переходит в точку C, а точка B переходит в точку D.

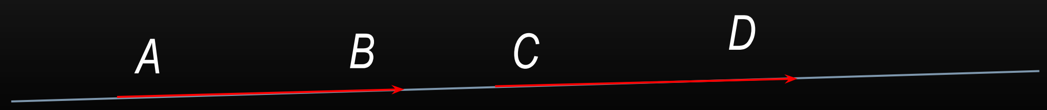
Обратно, пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ совмещаются некоторым параллельным переносом и при этом точка A переходит в точку C, а точка B – в D. Тогда по определению параллельного переноса AC=BD и AC||BD, т.е. ABCD – параллелограмм. Следовательно, AB||CD $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$. Так как при параллельном переносе начало вектора $\overrightarrow{AB}$ переходит в начало $\overrightarrow{CD}$, а конец $\overrightarrow{AB}$ - в конец $\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, т.е. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Ч.Т.Д.


A
B
C
D

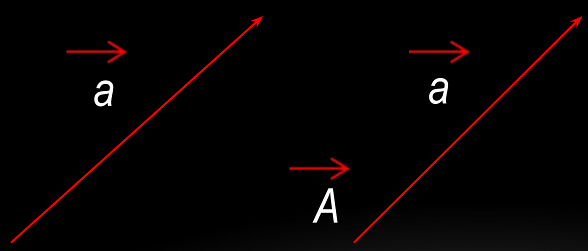
СЛЕДСТВИЯ

<u>**Следствие 1.**</u> *Если AB=CD, то AC=BD.*



Если точка А является началом вектора а, то говорят, что вектор а отложен от точки А.

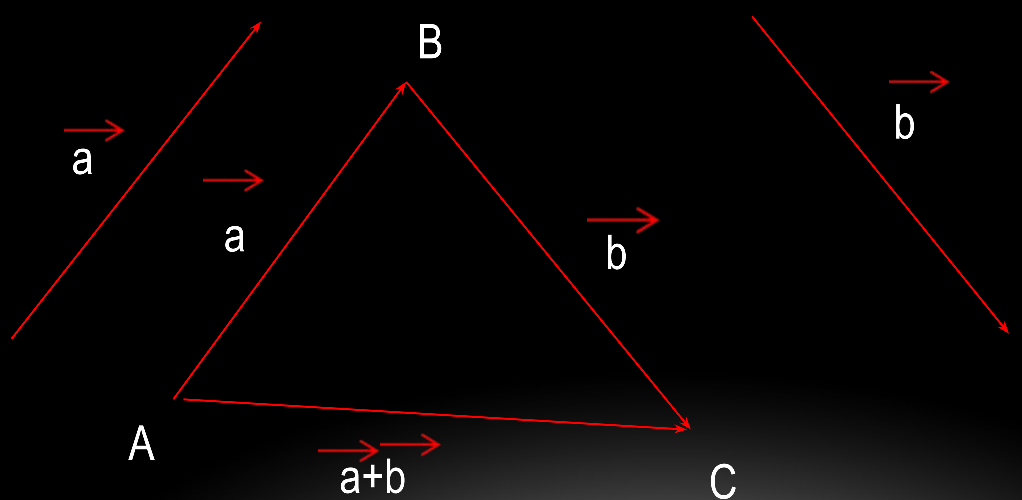
<u>**Следствие 2.**</u> *От любой точки А можно отложить единственный вектор, равный данному вектору а.*



СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

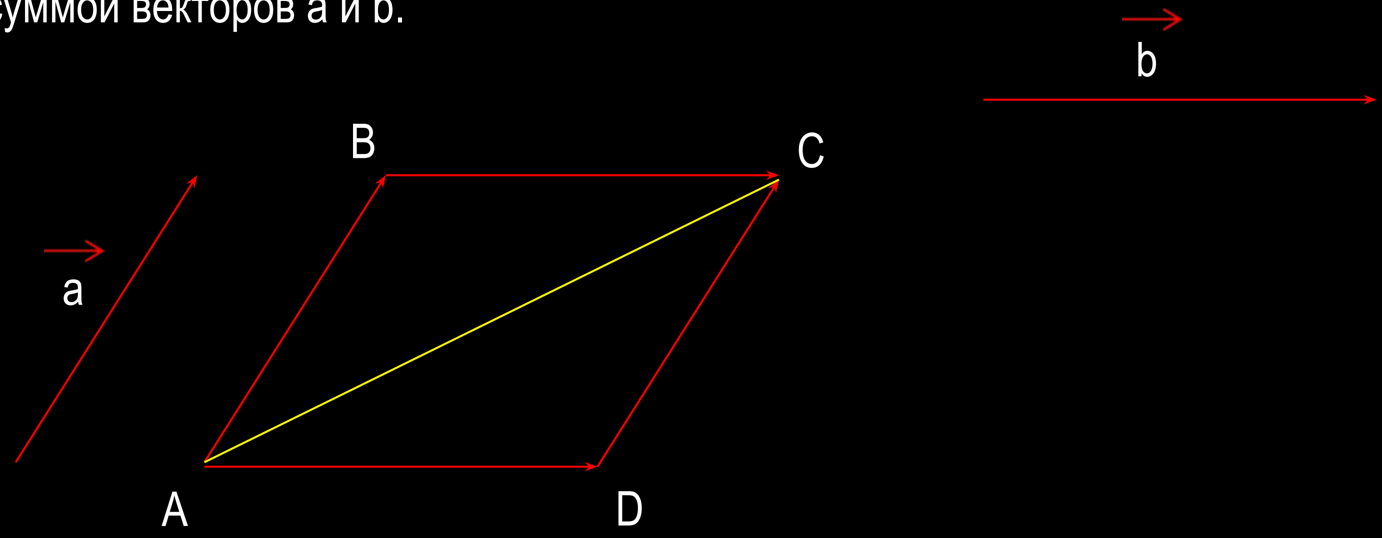
- Правило треугольника

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости точку А и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Полученный вектор $\overrightarrow{AC}$ называют ***суммой*** *векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и пишут: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



- Правило параллелограмма

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости точку А и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Из этого достроим параллелограмм ABCD так, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, а $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Построим вектор $\overrightarrow{AC}$, который будет также являться диагональю ABCD, и будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Теорема 1. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно:*

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон);

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон).

Доказательство. 1) Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. От

некоторой точки А плоскости отложим векторы $\vec{AB}=\vec{a}$ и $\vec{AD}=\vec{b}$. (рис 1)

Тогда получим параллелограмм ABCD. По правилу треугольника $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=$

$=\vec{a}+\vec{b}$. Аналогично, $\vec{AC}=\vec{AD}+\vec{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Следовательно, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2)Отметим точку А на плоскости и отложим векторы $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{BC}=\vec{b}$ и $\vec{CD}=\vec{c}$ (рис 2 на след слайде). Тогда $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\vec{AB}+\vec{BC})+\vec{CD}=\vec{AC}+\vec{CD}=\vec{AD}$.

С другой стороны, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{AB}+(\vec{BC}+\vec{CD})=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}$. Отсюда имеем $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ =

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Ч.Т.Д.

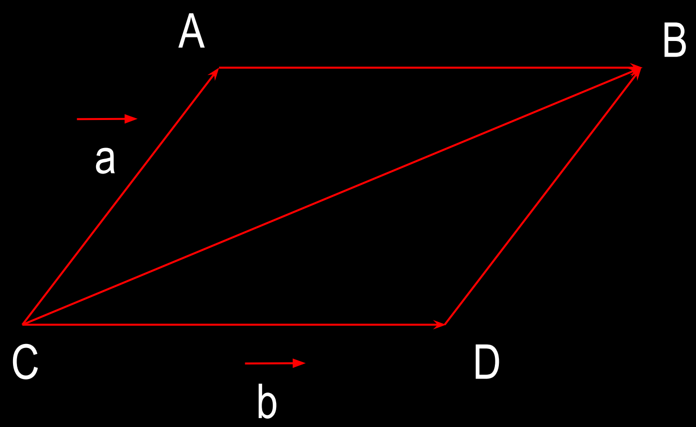


Рис 1

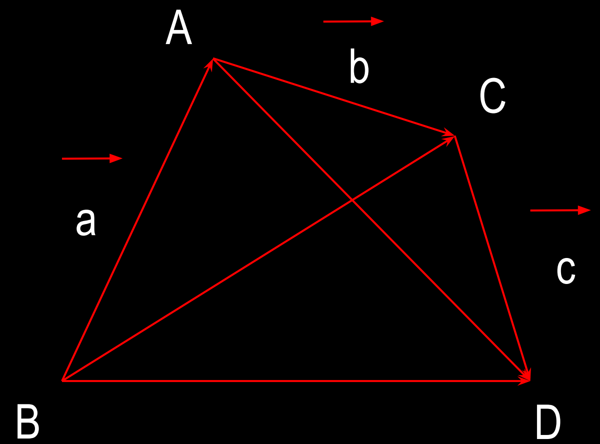
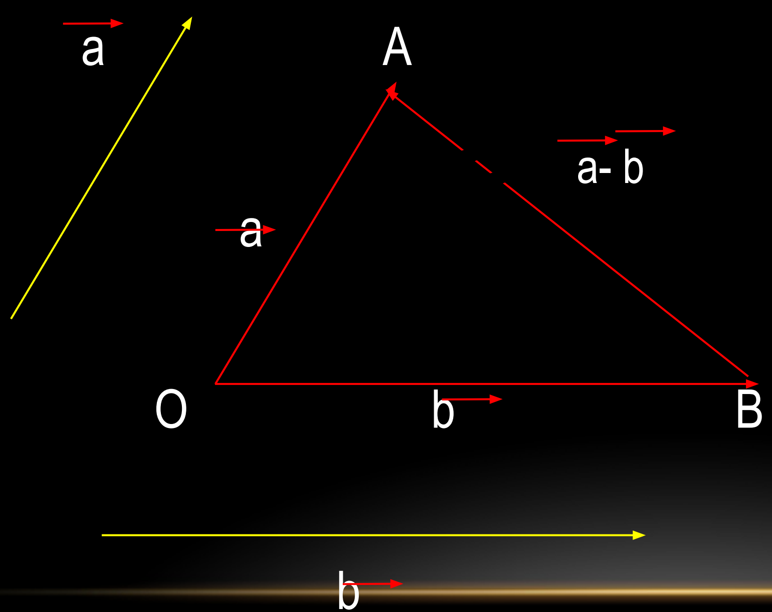


Рис 2

РАЗНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ равен вектору $\vec{a}$. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

От некоторой точки О откладываем векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности $\vec{a} - \vec{b}$. Так как $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$, то $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}= \vec{a} - \vec{b}$.



УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

***Произведением** вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на число k называется вектор, модуль которого равен числу $|k| \cdot |\vec{a}|$ и сонаправлен с вектором $\vec{a}$ при $k > 0$, противоположно направлен с вектором $\vec{a}$ при k* < 0. Произведение числа k на вектор $\vec{a}$ записывают так: $k \cdot \vec{a}$.

Если $k=0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

<u>Теорема.</u> *Для любых чисел α, β и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ верно равенство:*

1. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ *(сочетательный закон);*
2. $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ *(I распределительный закон);*
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ *(II распределительный закон).*

Доказательство 1. Если $\alpha\beta > 0$, т.е. числа α и β имеют одинаковые знаки, то вектор $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$; $\alpha(\beta\vec{a})$ и $\vec{a}$ сонаправлены, а если числа α и β имеют разные знаки, то векторы $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$; $\alpha(\beta\vec{a})$ и $\vec{a}$ противоположно направлены. Поэтому при любых α, β векторы $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ сонаправлены. Теперь осталось показатать равенство их модулей:

<u>$|(\alpha\cdot\beta)\vec{a}|=|\alpha\beta|\cdot|\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$ и $|\alpha(\beta\vec{a})|=|\alpha||\beta\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$.</u>

Следовательно, $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$. Ч.Т.Д

ПРИЗНАК КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ

Теорема. Чтобы вектор $\vec{b}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, необходимо и достаточно существование числа α такого, что $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

Доказательство. Если $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по определению.

Ч.Т.Д

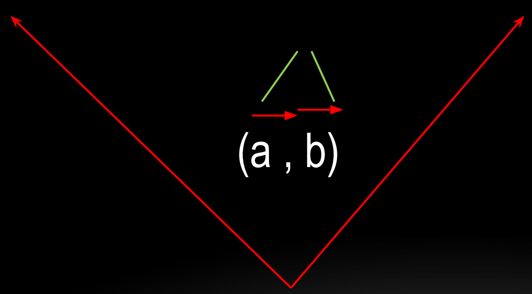
Следствие. Для того, чтобы точка C лежала на прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы существовало число α такое, что $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$.

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется ***угол*** *BAC. Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол, образованный при откладывании этих векторов от одной точки.*

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают через $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0°, а если векторы противоположно направлены, то угол между ними равен 180 °



СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением *двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла угла между ними, т.е. скалярное произведение векторов равно числу* $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

$\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

Скалярное произведение равных векторов называется **скалярным квадратом** этого вектора и обозначается через $\vec{a}^2$.

$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}^2|$, т.е $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. *Для любых векторов a и b верно равенство*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. *Для любых векторов a, b и c любого действительного числа α верно равенство*

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3. *Для любых векторов a, b и c верно равенство*

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

ДОПОЛНОИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ. ИСТОРИЯ ВЕКТОРОВ.

- Раздел математики, изучающий векторы и действия над ними называется **векторной алгеброй.**
- Основные действия над векторами, изученные нами ранее, составляют основу **векторной алгебры.**
- **3 векторных направления : геометрическое, алгебраическое, физическое.**
- Основатель векторного исчисления-норвежец **Каспар Вессель (1745-1818)**
- Дальнейшее развитие дали **англичанин Уильям Гамильтон (1805-1865),** основавший алгебру комплексных чисел и другие теории, являющиеся основой векторного исчисления, ввел понятие вектор, и немец **Герман Грассман (1809-1877),** основавший понятие вектора с геометрической точки зрения независимо от Гамильтона.

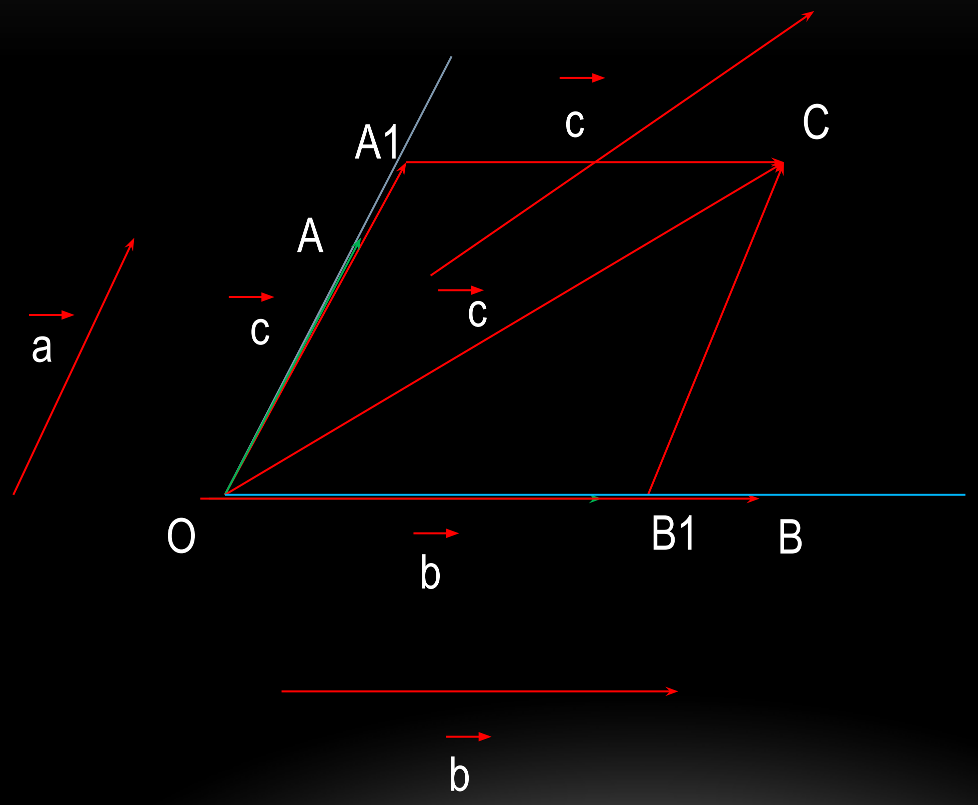
РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ

Теорема. *Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то для любого вектора $\vec{c}$ найдутся числа x и y такие, что выполняется равенство*

$$\underline{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}},$$

причем коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом. (рис на след слайде)

Из этой теоремы вытекает, что любой вектор можно разложить по двум произвольным неколлинеарным векторам. Если на плоскости выбраны такие 2 неколлинеарных вектора, то они называются ***базисными векторами*** плоскости. Итак, любые 2 неколлинеарных вектора можно принять в качестве базисных векторов и любой вектор этой плоскости однозначно разлагается по этим базисным векторам. А действительные числа x и y называются ***координатами вектора*** $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.


A1
c
C
A
c
c
a
O
b
B1
B
b

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Пусть $\vec{i}$- единичный вектор, сонаправленнный с осью Ox, а $\vec{j}$ – единичный вектор, сонаправленный с осью Oy. Эти векторы называют ***координатными векторами.*** Так как векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны, то их можно рассматри-вать в качестве базисных векторов. Тогда для любого вектора $\vec{a}$ плоскости Oxy найдутся единственные действительные числа x и y такие, что

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Здесь числа x и y называются ***координатами*** вектора $\vec{a}$ в прямоугольгой системе координат Oxy, и это записывается так: $\vec{a}$= (x; y).

СВОЙСТВА КООРДИНАТ ВЕКТОРА

1. ***У равных векторов соответствующие координаты равны: если***

$\vec{a}=(x;\ y)$, $\vec{b}=(u;\ v)$ *и* $\vec{a}=\vec{b}$, *то* $x=u$ и $y=v$.

Обратно, векторы, у которых соответствующие координаты равны между собой: если $\vec{a}=(x;\ y)$, $\vec{b}=(u;\ v)$ *и* $x=u$, $y=v$, *то* $\vec{a}=\vec{b}$.

2. ***При сложении векторов складываются их соответствующие координаты: если*** $\vec{a}=(x;y)$, $\vec{b}=(u;v)$, *то* $\vec{a}+\vec{b}=(x+u;\ y+v)$.

3. ***При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число, если*** $\vec{a}=(x;\ y)$ *и* λ*- число, то* $\lambda \cdot \vec{a}=(\lambda \cdot x;\ \lambda \cdot y)$.

Следствие. Координаты разности векторов равны разности соответствующих координат этих векторов : если $\vec{a}=(x;\ y)$, $\vec{b}=(u;\ v)$, то

$\vec{a}-\vec{b}=(x-u;\ y-v)$.

РАДИУС-ВЕКТОР. КООРДИНАТНЫЙ ВИД СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Если на плоскости Оху задана точка А (x;y), то вектор $\overrightarrow{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки А.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ = (x1;y1) и $\vec{b}$ = (x2;y2) определяется по формуле: $\mathbf{\vec{a} \cdot \vec{b} = x1 \cdot y2 + x2 \cdot y2}$.

КООРДИНАТНЫЙ ВИД КОЛЛИНЕАРНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ВЕКТОРОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ.

Если векторы $\vec{a}=(x1;y1)$ и $\vec{b}=(x2;y2)$ взаимно перпендикулярны, то $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) =$

$= 90°$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = 0$. Тогда имеем: $x1x2+y1y2=0$.

Это и есть ***условие перпендикулярности*** ненулевых векторов.

С помощью формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = x1 \cdot y2 + x2 \cdot y2$ можно найти косинус угла между векторами $\vec{a}=(x1;y1)$ и $\vec{b}=(x2;y2)$. Действительно, их формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ находим, что $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Отсюда получим $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{x1x2+y1y2}{\sqrt{x1^2+y1^2} \cdot \sqrt{x2^2+y2^2}}$

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ. НАПРАВЛЯЮЩИЙ ВЕКТОР И ВЕКТОР НОРМАЛИ ПРЯМОЙ.

Уравнение прямой можно задать различными способами. Например, в 8 классе мы определили прямую как серединный перпендикуляр некоторого отрезка. Теперь определим уравнение прямой с помощью векторов.

Пусть дана точка M_0 (x_0 ;y_0) и вектор $\vec{p}$ = (α;β) (см рис 1 на след слайде). Тогда через точку M_0 параллельно вектору $\vec{p}$ проходит одна и только одна прямая *l*. Точка M_0 называется ***начальной точкой*** прямой *l*, а вектор $\vec{p}$- ***направляющим вектором*** этой прямой. Если M (x;y) является произвольной точкой прямой *l*, то $\overrightarrow{M_0M}$ || p. Здесь направляющий вектор $\vec{p}$ = (α;β)не параллелен осям координат, т.е. α≠0, β≠0. Используя условие коллинеарности векторов, $\vec{p}$ и M_0M = (x-x ;y- y), получим уравнение:

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$$

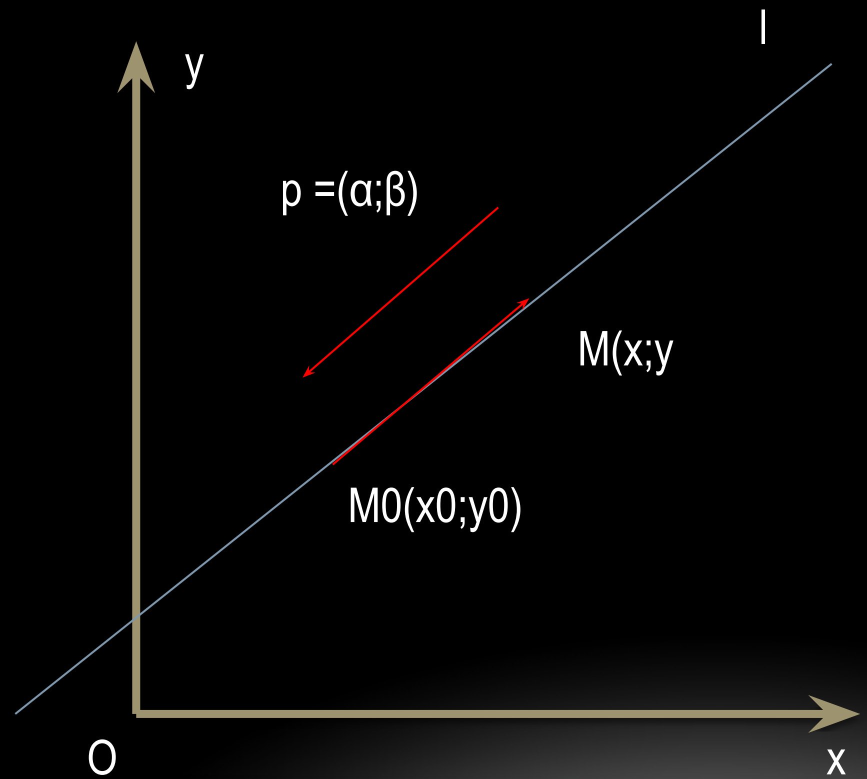


рис 1

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ