Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

НАЗАД, В ИСТОРИЮ!

Понятие числовой последовательности возникло и развивалось задолго до создания учения о функциях.

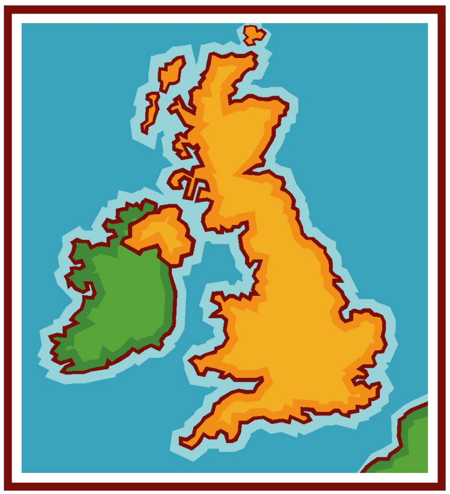
На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий **АРХИМЕД** (ок. 287–212 гг. до н.э)

Термин "прогрессия" был введен римским автором Боэцием (в 6 веке) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Названия "арифметическая" и "геометрическая" были перенесены из теории непрерывных пропорций, которыми занимались древние греки.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (в 3 веке). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида "Начала" (3 век до н. э.).

Правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в сочинении «Книги абака» в 1202г. (Леонардо Пизанский)

Англия XVIII век



В XVIII в. в английских учебниках появились обозначения арифметической и геометрической прогрессий:

Арифметическая ÷

Геометрическая ∷


00:00:02
00:04:04

-Я желаю достойно вознаградить тебя, Сета, за прекрасную игру, которую ты придумал, -сказал царь.

Мудрец поклонился.

-Я достаточно богат, чтобы исполнить самое смелое твое пожелание, - продолжал царь. - Назови награду, которая тебя удовлетворит, и ты получишь ее.

Сета молчал.

-Не робей, - ободрил его царь. – Выскажи свое желание. Я не пожалею ничего, чтобы исполнить его.

-Велика доброта твоя, повелитель. Но дай срок обдумать ответ. Завтра я сообщу тебе мою просьбу.

Сета улыбнулся хитро, покинул дворец и стал дожидаться у ворот дворца.

- Почему так хитро улыбнулся Сета?
- Прав ли был индусский царь, считая просьбу Сеты ничтожной, полагая, что все зерна пшеницы уместятся в один мешок?
-

За обедом царь вспомнил об изобретателе шахмат и послал узнать, унес ли Сета свою жалкую награду.

-Повелитель, - был ответ, - приказание твое исполняется. Придворные математики исчисляют число следуемых зерен.

Царь нахмурился. Он не привык, чтобы повеления его исполнялись так медлительно.

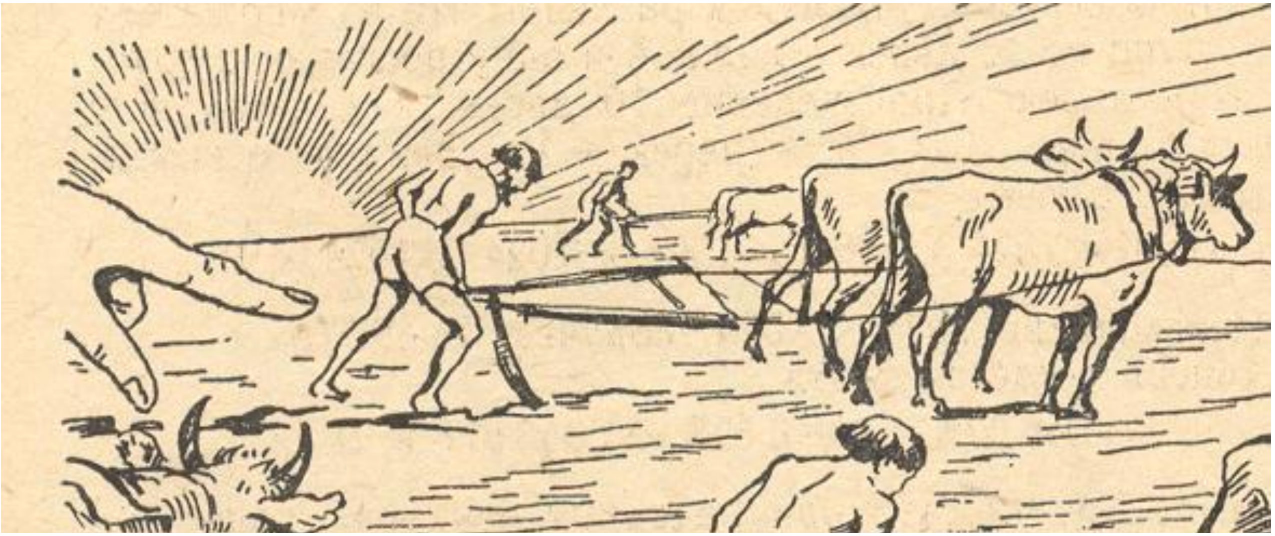
Вечером, отходя ко сну, царь еще раз осведомился, давно ли Сета со своим мешком пшеницы покинул ограду дворца.

-Повелитель, - ответили ему, - математики твои трудятся без устали и надеются еще до рассвета закончить подсчет.

-Как бы велико оно ни было, - надменно перебил царь, - житницы мои не оскудеют. Награда обещана и должна быть выдана..

- Не в твоей власти, повелитель, исполнять подобные желания. Во всех амбарах твоих нет такого числа зерен, которое потребовал Сета. Нет его и в житницах целого царства. Не найдется такого числа зерен и на всем пространстве Земли. И если желаешь непременно выдать обещанную награду, то прикажи превратить земные царства в пахотные поля, прикажи осушить моря и океаны, прикажи растопить льды и снега, покрывающие далекие северные пустыни.

Пусть все пространство их будет сплошь засеяно пшеницей. И все то, что родится на этих полях, прикажи отдать Сете. Тогда он получит свою награду…



С изумлением внимал царь словам старца.

- Назови мне это чудовищное число,- сказал он в раздумьи.

18 446 744 073 709 551 615

-Восемнадцать квинтильонов четыреста сорок шесть квадрильонов семьсот сорок четыре триллиона семьдесят три миллиарда семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча шестьсот пятнадцать, о повелитель!

Такова легенда. Действительно ли было то, что здесь рассказано, неизвестно, - но что награда, о которой говорит предание, должна была выразиться именно таким числом в этом ты сам можешь убедиться.

Фактически, число зерен, о которых идет речь, является суммой 64 членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен 2. Обозначим эту сумму через S:

$$S = 1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots\ldots+2^{62}+2^{63}$$

$$S = 2^{64} - 1$$

Значит, подсчет зерен сводится к перемножению 64 двоек. Для облегчения выкладок заменим $2^{64} = (2^{10})^6 \cdot 2^4 =$

$=1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 16 =$

$=1048576 \cdot 1048576 \cdot 1048576 \cdot 16 - 1$

и получим искомое число зерен:

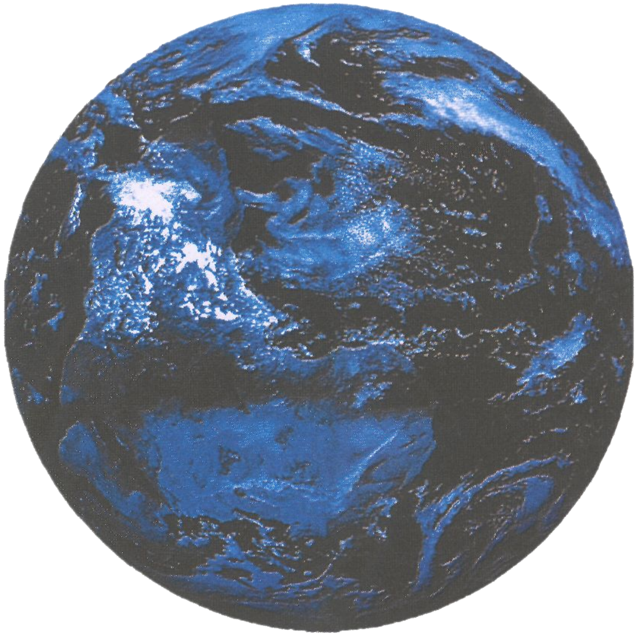
18 446 744 073 709 551 615

Масса такого числа зерен больше триллиона тонн.

Индусский царь не в состоянии был выдать подобной награды.

Но будь он силен в математике, он бы не попал впросак…

Вывод



Если бы царю удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая моря, и океаны, и горы, и пустыню, и Арктику с Антарктикой, и получить удовлетворительный урожай, то, пожалуй, лет за 5 он смог бы рассчитаться.

Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли. Это превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называют *геометрической прогрессией*

***q*-знаменатель геометрической прогрессии.**

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots$$

$$q =$$

Рекуррентная формула n-го члена геометрической прогрессии

$$b_1 = b, \quad b_n = b_{n-1} \cdot q$$

$$(n = 2,3,4,...)$$

$$b, q - \textit{заданные} \;\; \textit{числа}, \;\; b \neq 0, \;\; q \neq 0$$

Определите, является ли заданная последовательность геометрической прогрессией. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии

1) *1, 4, 16, 64,… .*

b1 = *q=*

2) *8, -8, 8, -8, 8, -8, 8, -8, 8, -8, 8, -8, … .*

b1 = *q=*

3) *100, 50, 25, 12,5 … .*

b1 = *q=*

4) *81, -27, 9, -3, … .*

b1 = *q=*

Определите, является ли заданная последовательность геометрической прогрессией. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии

1) 1, 4, 16, 64,… .

$b1 = 1, \quad q = 4.$

2) 8, -8, 8, -8, 8, -8, 8, -8, 8, -8, 8, -8, … .

$b1 = 8, \quad q = -1.$

3) 100, 50, 25, 12,5 … .

$b1 = 100 \quad q = 0,5$

4) 81, -27, 9, -3, … .

$b1 = 81, \quad q =$

Найдите первые шесть членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b1 = 1, \quad q = 2$

$b2=$

$b3=$

$b4=$

$b5=16$

$b6=32$

2) $b1 = 10, \quad q = -1$

$b2=-10,$

$b3= 10,$

$b4= -10,$

$b5= 10,$

$b6= -10$

3) $b1 = 1000, \quad q=0{,}1$

$b2=$

$b3=$

$b4=$

$b5= 0{,}1$

$b6= 0{,}01$

Найдите первые шесть членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b1 = 1, \quad q = 2$

$b2 = 2,$

$b3 = 4,$

$b4 = 8,$

$b5 = 16,$

$b6 = 32$

2) $b1 = 10, \quad q = -1$

$b2 = -10,$

$b3 = 10,$

$b4 = -10,$

$b5 = 10,$

$b6 = -10$

3) $b1 = 1000, \quad q = 0{,}1$

$b2 = 100,$

$b3 = 10,$

$b4 = 1,$

$b5 = 0{,}1,$

$b6 = 0{,}01$

Аналитическое задание геометрической прогрессии

$$b_1 = b_1,$$

$$b_2 = b_1 \cdot q.$$

Что здесь?

Что здесь?

Что здесь?

$$b_n = \boxed{\text{Что здесь?}}$$

Это формула n-го члена геометрической прогрессии

Аналитическое задание геометрической прогрессии

$$b_1 = b_1,$$

$$b_2 = b_1 \cdot q.$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 q^2,$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 q^3,$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3) q = b_1 q^4 \quad и \quad т.д.$$

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Это формула n-го члена геометрической прогрессии

Две формулы n-го члена арифметической прогрессии:

$$b_1 = b, \quad \boxed{b_n = b_{n-1} \cdot q}$$

$$(n = 2,3,4,\dots)$$

$$b, q - \text{заданные числа}, \; b \neq 0, \; q \neq 0$$

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Характеристическое свойство геометрической прогрессии

$$b_n = b_{n-1}q$$

$$b_{n+1} = b_n q$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Если все члены прогрессии положительны, то

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Найдите знаменатель и четвертый член геометрической прогрессии:

1)∺(bn) *1, 3, 9,… .*

q= *b4=* *3=*

1)∺(bn) *1, 1/3, 1/9,… .*

q= *b4=* *=*

1)∺(bn) *-1, -2,… .*

q= *b4=* *=* *=*

Найдите знаменатель и четвертый член геометрической прогрессии:

1) ÷÷(bn) 1, 3, 9,… .

$q = 3, \quad b4 = 9 \cdot 3 = 27$

1) ÷÷(bn) 1, 1/3, 1/9,… .

$q = 1/3, \quad b4 = 1/9 \cdot 1/3 = 1/27$

1) ÷÷(bn) -1, -2,… .

$q = 2, \quad b4 = b1 \cdot q^{4-1} = -1 \cdot 2^{3} = -8$

Найдите первый член геометрической прогрессии, если $b_5=400$; $b_6=800$.

Дано:

Найти: b_1

Решение:

$b_4=400:2=200$

$b_3=200:2=100$

$b_2=100:2=50$

$b_1=50:2=25$

Ответ: $b_1=25$

Найдите первый член геометрической прогрессии, если $b_5=400$; $b_6=800$.

Дано: ÷(bп), *b5= 400   b6= 800*

Найти: b1

Решение: q=800:400=2

b4=400:2=200

b3=200:2=100

b2=100:2=50

b1=50:2=25

Ответ: b1=25

Найдите b_4 член геометрической прогрессии, если $b_1=3$, $q=-2$.

Дано:

Найти:

Решение: $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

$b_4=3\cdot(-2)^{4-1}$

$b_4=3\cdot(-2)^3$

$b_4=3\cdot(-8)$

$b_4=-24$

Ответ: $b_4=-24$

Найдите b_4 член геометрической прогрессии, если $b_1=3$, $q=-2$.

Дано: (bп); $b1=3$ $q= -2$

Найти: $b4$

Решение: $bn=b1\cdot q^{n-1}$

$$b4=3\cdot(-2)^{4-1}$$

$$b4=3\cdot(-2)^{3}$$

$$b4=3\cdot(-8)$$

$$b4=-24$$

Ответ: $b4=-24$

Зная формулу n-го члена геометрической прогрессии найдите b_1 и q, если $b_n=3\cdot 2^{n-1}$.

Дано: [illegible] b[illegible]

Найти: [illegible], [illegible]

Решение: [illegible] = [illegible] = [illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible] = [illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible] = [illegible] = [illegible]

Ответ: $b1=$[illegible], $q=$[illegible]

Зная формулу n-го члена геометрической прогрессии найдите b_1 и q, если $b_n=3\cdot2^{n-1}$.

Дано: ÷(bп), $bn=3\cdot2^{n-1}$

Найти: $b1$, q

Решение: $b1=3\cdot2^{1-1}=3\cdot2^0=3$

$b2=3\cdot2^{2-1}=3\cdot2^1=6$

$q=b2:b1=6:3=2$

Ответ: $b1=3$, $q=2$

Формула суммы первых n членов:

$$S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}, где\_q \neq 1$$

$$S_n = b_1 \cdot n, где\_q = 1$$

Пример $S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}, где\_q \neq 1$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1$$

2. Геометрическая прогрессия называется <u>бесконечно убывающей</u>,

если модуль её знаменателя меньше 1

(|q|<1)

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$