

Дифференциальные уравнения

- Основные понятия
- Дифференциальные уравнения первого порядка
- Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Основные понятия

При решении различных задач математики, физики и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные y' , y'' , ... $y^{(n)}$.

Такие уравнения называются **дифференциальными уравнением (ДУ)** (термин принадлежит Лейбницу, 1676)

Символически дифференциальное уравнение можно написать:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например, уравнение $x^3 y'' - 4xy' = y^3$

есть уравнение второго порядка.

Основные понятия

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, в противном случае – **ДУ в частных производных**.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, процесс отыскания решения называется **интегрированием** ДУ

Например, рассмотрим уравнение: $y'' + 4y = 0$

Функция $y = \sin 2x$ является решением уравнения, так как:

$$y' = 2 \cos 2x, \quad y'' = -4 \sin 2x$$

При подстановке функции и ее производных в уравнение получим тождество:

$$-4 \sin 2x + 4 \sin 2x = 0$$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение можно записать в виде:

$$y' = f(x; y),$$

то его называют ДУ первого порядка, **разрешенным относительно производной**.

Уравнение первого порядка может быть записано также в **дифференциальном виде**:

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$$

$P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – известные функции.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга постоянными величинами.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Например, решением уравнения

$$y' = 2x$$

является функция $y = x^2$, а также функция $y = x^2 + 1$

и вообще любая функция вида $y = x^2 + C$

Чтобы решение дифференциального уравнения приобрело конкретный смысл, его надо подчинить дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 , называют **начальным условием** и записывают в виде:

$$y(x_0) = y_0; \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Общим решением ДУ первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x; C),$$

содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

- ▶ Функция $\varphi(x; C)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении C .
- ▶ Каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$ можно найти такое значение постоянной C_0 , что функция $\varphi(x; C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется функция, полученная из общего решения при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде: $\Phi(x; y; C) = 0$, то такое решение называется **общим интегралом**, уравнение $\Phi(x; y; C_0) = 0$ называется **частным интегралом**.

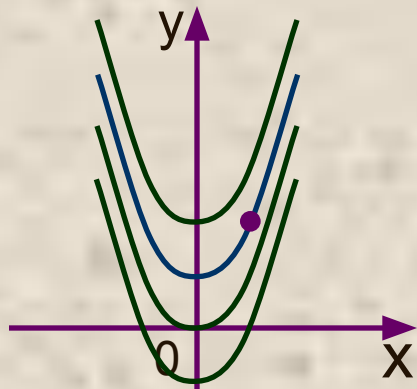
Дифференциальные уравнения первого порядка

График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

С геометрической точки зрения, общее решение ДУ первого порядка есть семейство интегральных кривых на плоскости XOY .
Частное решение - одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $M(x_0; y_0)$

Например, общее решение ДУ $y' = 2x$ есть семейство парабол:

$$y = x^2 + C$$



Частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y(1) = 2$ - это одна парабола, проходящая через точку $M(1, 2)$ с уравнением:

$$y = x^2 + 1$$

Задача отыскания частного решения ДУ, удовлетворяющего заданному начальному условию называется **задачей Коши**.

Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является уравнение вида:

$$P(x)dx = Q(y)dy \quad (1)$$

Такое уравнение называется уравнением с **разделенными переменными**.

Проинтегрировав это уравнение почленно, получим:

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy + C \text{ - общий интеграл ДУ.}$$

Более общий случай описывают уравнения с **разделяющимися переменными**, которые имеют вид:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) сводится к уравнению (1) путем почленного деления его на

$$P_2(x) \cdot Q_1(y) \neq 0$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0 \implies \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx = \int -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy + C$$

Замечание: при проведении почленного деления ДУ на $P_2(x)Q_1(y)$ могут быть потеряны некоторые решения.

Поэтому следует отдельно решить уравнение $P_2(x)Q_1(y) = 0$ и установить те решения, которые не могут быть получены из общего решения – **особые решения**.

Уравнение

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (3)$$

также сводится к уравнению с разделенными переменными.

Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \implies \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C$$

Уравнения с разделяющимися переменными

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0 \Rightarrow y(1+x)dx = x(y-1)dy$$

Разделим обе части уравнения на xy : $\frac{1+x}{x}dx = \frac{y-1}{y}dy \Rightarrow$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy \Rightarrow x + \ln|x| = y + \ln|y| + C$$

Решим уравнение $xy = 0$
Общий интеграл ДУ

Его решения: $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями данного ДУ, но не входят в общее решение, значит это **особое решение**.

Решить задачу Коши: $y' = -\frac{y}{x}$; $y(4) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\Rightarrow y = \frac{C}{x}$$

Подставим начальные условия: $1 = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4$

Общее решение $y = \frac{4}{x}$ — частное решение ДУ

Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим задачу, приводящую к ДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

Задача: материальная точка массы m замедляет свое движение под воздействием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V . Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если $V(0) = 100$ м/с, $V(1) = 50$ м/с.

Решение:

Примем за переменную время t , отсчитываемое от начала замедления точки. Тогда скорость V будет функцией t : $V = V(t)$.

Воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F = m \cdot V'(t)$$

В нашем случае $F = -kV^2$

$k > 0$ - коэффициент пропорциональности

Уравнения с разделяющимися переменными

Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$-kV^2 = m \cdot V' \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m}V^2 \Rightarrow \int \frac{dV}{V^2} = \int -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{V} = -\frac{k}{m}t + C \Rightarrow V = \frac{1}{\frac{k}{m}t + C}$$

По условию задачи: $V(0) = \frac{1}{C} = 100 \Rightarrow C = \frac{1}{100}$

$$V(1) = \frac{1}{\frac{k}{m} + \frac{1}{100}} = 50 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{100}$$

Скорость точки изменяется по закону:

$$V = \frac{100}{t+1}$$

$$V(3) = 25$$