Үздіксіздік теңдеуі

- Қайсыбір көлемдегі зарядтың уақыт бойынша өзгерісі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV$$

- туындысымен беріледі

- Екінші жағынан, бірлік уақыттағы өзгеріс осы уақыттың ішінде берілген көлемнен шығатын немесе керісінше, оның ішіне кіретін зарядтың мөлшерімен анықталады. Бірлік уақытта көлемді шектеп тұрған беттің ***d*f** элементі арқылы өтетін заряд мөлшері ρ**v**d**f** болады, мұндағы **v** – зарядтың кеңістіктің ***d*f** элементі тұрған нүктесіндегі жылдамдығы. ***d*f** векторы,барлық кездерде де қабылданғандай , бетке сыртқы нормал бойымен бағытталған, яғни қарастырылып отырған көлемнен сыртқа қарай бағытталған нормал бойымен бағытталған.

- . Сондықтан егер заряд біздің көлемнен шығатын болса, ρ**v**d**f** оң да, ал заряд оған кіретін болса теріс болады. Демек, берілген көлемнен бірлік уақытта шығатын зарядтың толық мөлшері болады, мұнда интеграл осы көлемді шектеп тұрған толық тұйықталған бет бойыша алынады.

- Алынған екі өрнекті салыстыра отырып,
- $$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f}$$ *(29,1)*
- деп табамыз. Оң жақта минус таңбасы қойылған , себебі егер көлемдегі толық заряд артатын болса, онда сол жағы теріс болады.

- Зарядтың сақталу заңын білдіретін теңдеу (29,1) дегеніміз интегралдық түрде жазылған *үзіксіздік теңдеуі* болып табылады. ρ**v** дегеніміздің тоқ тығыздығы екендігін ескере отырып, (29,1)-ді

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \mathbf{j} d\mathbf{f} \qquad (29,2)$$

- түрінде жазуға болады.

- Бұл теңдеуді дифференциалдық түрде жазамыз. (29,2)-нің оң жағында Гаусс теоремасын, яғни

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{f} = \int div\mathbf{j} dV$$

- қолданып,

$$\int (div\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = 0$$

деп табамыз. Бұл теңдік кез келген көлем бойынша интегралдаған кезде орындалуы тиіс блғандықтан , инеграл астындағы өрнек нөлге те болуы керек

- . Бұл теңдік кез келген көлем бойынша интегралдаған кезде орындалуы тиіс блғандықтан , инеграл астындағы өрнек нөлге те болуы керек
- $$div\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ (29,3)
-
- Бұл – дифференциалдық түрдегі **үздіксіздік теңдеуі.**

- δ-функция түрінде ρ үшін жазылған (28,1) өрнектің (29,3) теңдеуді автоматты түрде қанағаттандыратындығына оңай көз жеткізуге болады. Ықшамдық үшін тек жалғыз заряд бар деп аламыз. Сөйтіп,
- $\rho = e\delta(r - r_0$
- Сонда тоқ:
- $\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(r - r_0)$
- мұндағы **v** – зарядтың жылдамдығы $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ туындысын табамыз. Заряд қозғалған кезде оның координаттары, яғни өзгереді

,

Сондықтан

- $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial r_0}\frac{\partial r_0}{\partial t}$$
- Бірақ $\frac{\partial r_0}{\partial t}$ дегеніміз зарядтың **v** жылдамдығы ғой. Одан әрі ρ дегеніміз $r - r_0$ айырмасының функциясы болатындықтан,

$$\frac{\partial \rho}{\partial r_0} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}$$

- Демек

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} grad\rho = -div\rho\mathbf{v}$$

- Төртөлшемдік түрде (29,3) үздіксіздіктің теңдеуі тоқтың 4-векторының 4-дивергенциясының нөлге теңдігімен өрнектеледі:
- $$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad (29,4)$$
- Өткен параграфта біз тұтас кеңістікте орналасқан толық зарядты

$$\frac{1}{c}\int j^i \, dS_i$$

түрінде жазуға болатындығын көрдік, мұнда интегралдау гипербет бойынша $x^0 = const$ жүргізіледі.

Басқа уақыт мезетінде толық заряд басқа, осіне перпендикуляр болатын гипербет бойынша алынған осындай интегралмен өрнектелді. (29,4) теңдеуінің, шындығындада, зарядтың сақталу заңына әкелетіндігін оңай тексеруге болады, яғни қандай гипербет бойынша интегралдсақ та, интегралының бірдей болатындығына келеміз. Осындай екі гипержазық бойынша алынған интегралының айырмасын түрінде жазуға болады, мұнда интеграл қарастырылып отырған гипержазықтардың арасындағы 4-көлемді қамтитын тұйықталған түгел гипербет бойынша алынадыұбұл интералдың іздеп отырған айырмадан айырмашылығы, шексіз алыстағы гипербет бойынша алынған интегралға тең, ол бірақ жоғалып кетеді, себебі шексіздікке зарядтар жоқ). (6,15) Гаусс теоремасының көмегімен бұл интегралды екі гипержазықтық арасындағы 4-көлем бойынша алынған интегралмен алмастырып,

- $\oint j^i\, dS_i = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} d\Omega = 0$ 9,5)
- болғандығына көз жеткізуге болады. Міне, дәлелдемек болғанымыз осы еді.
- Келтірілген дәлелдеменің интегралдау (үшөлшемдік) кеңістікті түгел қамтитын кез келген екі шексіз гипербет бойынша (тек болатын гипержазықтықтар бойынша ғана емес) жүргізілетін екі интегралы үшін де күшін сақтайтыны анық. Осыдан қандай болмасын осындай гипербеттер бойынша интегралдау жүргізілсе де,
 интегралыныңмәні, шындығында да, бірдей (кеңістіктегі толық зарядка тең болатындығын көреміз.

- Біз электродинамика теңдеулерінің калибрлік инварианттылығы мен зарядтың сақталу заңының арасындағы тығыз байланыс жайлы сөз еткенбіз. Оны тағы да бір рет әсердің (28,6) өрнегін көрсете кетейік. -ді A_i ге $A_i - \frac{\partial r}{\partial x^i}$ алмастырғанда (28,6)-дің екінші мүшесіне

$$\frac{1}{c^2}\int j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} d\Omega$$

- интегралы қосылады.

- (29,4) үздіксіздіктің теңдеуі түрінде жазылған зарядтың сақталу заңы интеграл астындағы өрнекті $\frac{\partial}{\partial x^i}(fj^i)$
- 4-дивергенция түрінде жазуға мүмкіндік береді, осыан кейін Гаусс теоремасына сәйкес 4-көлем бойынша интегралдау шекаралық гипербеттер бойнша интегралға түрленеді. Әсерлі вариациялау кезінде бұл интегралдар түсіп қалады. Сөйтіп, олар қозғалыс теңдеулеріне әсер етпейді.