Национальный
исследовательский
Томский политехнический
университет

1.Алгебра высказываний

Логика и теория алгоритмов

Аксёнов Сергей Владимирович
к.т.н., доцент каф.ОСУ ТПУ

Литература к курсу

1. Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф. Дискретная математика и математическая логика - М.: Финансы и статистика, 2006. - 368 с.
2. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений - 2-е изд., стер. - М.: Академия, 2008. - 448 с.
3. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М.: Наука, 1971. - 320 с.
4. Новиков П.С. Элементы математической логики - М.: Наука, 1973. - 400 с.
5. Соболева Т.С., Чечкин А.В. Дискретная математика: учебник для студ. ВУЗов; под ред. Чечкина А.В. - М.: Академия, 2006. - 256 с.

Темы лекции

1. Высказывания и операции над ними
2. Формулы алгебры высказываний
3. Тавтологии алгебры высказываний
4. Логическая равносильность формул
5. Нормальные формы для формул алгебры высказываний
6. Логическое следование формул

Понятие высказывания

<u>Опр.</u> *Высказывание* – предложение, о котором можно судить истинно оно или ложно.

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Конкретные высказывания обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, или тем же буквами с индексами внизу.

Примеры высказываний

A_1: Слоны умеют летать

A_2: Воздух – это смесь газов

A_3: 27>104

B_1: Подосиновик – ядовитый гриб

B_2: Человек не может жить без сердца

C_1: Париж – столица Франции

C_2: Все дети любят шоколад

Функция истинности

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, \textit{если высказывание } P - \textit{истинно} \\ 0, \textit{если высказывание } P - \textit{ложно} \end{cases}$$

λ– Функция истинности,

Значение λ(P) – логическое значение, или значение истинности.

Для истинных высказываний используются обозначения: 1, И, T

Для ложных высказываний используются обозначения: 0, Л, F

Отрицание высказывания

Опр. *Отрицанием* высказывания P называется новое высказывание, обозначаемое ¬P, которое истинно, если высказывание P ложно, и ложно, если высказывание P истинно.

Таблица истинности операции отрицания

P	¬P
0	1
1	0

Конъюнкция двух высказываний

Опр. *Конъюнкцией* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \wedge Q$ (или P&Q), которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба исходных высказывания P и Q и ложно во всех остальных случаях.

Таблица истинности операции конъюнкции

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция двух высказываний

Опр. *Дизъюнкцией* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \vee Q$, которое ложно лишь в единственном случае, когда ложны оба исходных высказывания P и Q и истинно во всех остальных случаях.

Таблица истинности операции дизъюнкции

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация двух высказываний

<u>Опр.</u> *Импликация* двух высказываний P и Q – есть новое высказывание, обозначаемое $P \to Q$, которое ложно в единственном случае, когда высказывание P – истинно, а высказывание Q – ложно, а во всех остальных случаях – истинно.

Таблица истинности операции импликации

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность двух высказываний

Опр. *Эквивалентностью* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \leftrightarrow Q$, которое истинно в том и только том случае, когда оба операнда P и Q имеют одинаковое логическое значение, а во всех остальных случаях – ложно.

Таблица истинности операции эквивалентности

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Понятие формулы алгебры высказываний

Опр. *Пропозиционная переменная* – это переменная, вместо которой можно подставлять высказывание.

Опр. *Формула алгебры высказываний*

1. Каждая отдельная пропозициональная переменная есть формула алгебры высказываний.

2. Если F_1 и F_2 – есть формулы алгебры высказываний, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами алгебры высказываний.

3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме получившихся согласно п.1 и 2. нет

Примеры

Формулы алгебры высказываний

1. $(X \leftrightarrow Y)$
2. $((X \wedge Y) \rightarrow (Y \vee Z))$
3. $((\neg Y \leftrightarrow Z) \vee \neg X)$
4. $((\neg X \vee Y) \wedge ((\neg Z \leftrightarrow \neg Y) \vee (X \rightarrow Z)))$

Не являются формулами алгебры высказываний

1. (XZ)
2. $(Z \vee Y \neg)$
3. $((\neg Y \wedge) \rightarrow X)$

Логическое значение составного высказывания

Если в формулу алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ вместо пропозиционных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ подставить конкретные высказывания $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно, то получится некоторое новое составное высказывание $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Это высказывание называется *конкретизацией* формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ на наборе высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Т. Логическое значение составного высказывания $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ равно значению формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ на наборе $\lambda(A_1), \lambda(A_2), \ldots, \lambda(A_n)$ логических значений составляющих высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т.е.

$$\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n))=F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), \ldots, \lambda(A_n))$$

Составление таблиц истинности для формул

<u>Пример</u> Составить таблицу истинности для формулы $(X \to Z) \leftrightarrow (Y \vee \neg Z)$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	$\lambda(\neg Z)$	$\lambda(Y \vee \neg Z)$	$\lambda(X \to Z)$	$\lambda((X \to Z) \leftrightarrow (Y \vee \neg Z))$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Классификация формул алгебры высказываний

<u>Опр.</u> Формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *выполнимой*, если некоторая её конкретизация является истинным высказыванием.

<u>Опр.</u> Формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *опровержимой*, если некоторая её конкретизация является ложным высказыванием.

<u>Опр.</u> Формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *тавтологией*, или *тождественно истинной*, если все возможные её конкретизации являются истинными.

<u>Опр.</u> Формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *противоречием*, или *тождественно ложными*, если все возможные её конкретизации являются ложными.

Основные тавтологии Ч.1

1. Закон исключённого третьего: $P \vee \neg P$
2. Закон отрицания противоречия: $\neg(P \wedge \neg P)$
3. Закон двойного отрицания: $\neg\neg P \leftrightarrow P$
4. Закон тождества: $P \to P$
5. Закон контрапозиции: $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
6. Закон силлогизма (правило цепного заключения):
   $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$
7. Закон противоположности: $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$
8. Правило добавления антецедента («истина из чего угодно»): $P \to (Q \to P)$
9. Правило «из ложного что угодно»: $\neg P \to (P \to Q)$

Основные тавтологии Ч.2

10. Правило «modus ponens»: $(P \land (P \to Q)) \to Q$
11. Привило «modus tollens»: $((P \to Q) \land \neg Q) \to \neg P$
12. Правило перестановки посылок:

$$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$$

13. Правило объединения (и разъединения) посылок:

$$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \to R)$$

14. Правило разбора случаев:

$$((P \to R) \land (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \lor Q) \to R)$$

15. Правило приведения к абсурду:

$$((\neg P \to Q) \land (\neg P \to \neg Q)) \to P,$$

$$(\neg P \to (Q \land \neg Q)) \to P$$

Свойства конъюнкции и дизъюнкции

Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

1. Законы идемпотентности: $(P \wedge P) \leftrightarrow P$, $(P \vee P) \leftrightarrow P$
2. Законы упрощения: $(P \wedge Q) \rightarrow P$, $P \rightarrow (P \vee Q)$
3. Законы коммутативности: $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$, $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$
4. Законы ассоциативности: $(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$,

   $(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$
5. Законы дистрибутивности: $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$,

   $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$
6. Законы поглощения: $(P \wedge (P \vee Q)) \leftrightarrow P$, $P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P$
7. Законы де Моргана: $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$,

   $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

Свойства импликации и эквивалентности Ч.1

Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

1. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
2. $P \to (Q \to (P \wedge Q))$
3. $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$
4. $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$
5. $(\neg Q \wedge (P \to Q)) \to \neg P$
6. $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \to Q$
7. $(P \to Q) \to ((P \vee R) \to (Q \vee R))$
8. $(P \to Q) \to ((P \wedge R) \to (Q \wedge R))$
9. $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$

Свойства импликации и эквивалентности Ч.2

Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

10. $(P \to Q) \vee (Q \to P)$

11. $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$

12. $((P \to Q) \wedge (R \to Q)) \leftrightarrow ((P \vee R) \to Q)$

13. $((P \to Q) \wedge (P \to R)) \leftrightarrow (P \to (Q \wedge R))$

14. $P \leftrightarrow P$

15. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$

16. $((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \to (P \leftrightarrow R)$

Выражение одних логических операций через другие

Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

1. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$
2. $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
3. $(P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$
4. $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
5. $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(P \to \neg Q)$
6. $(P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
7. $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \to Q)$

Основные правила получения тавтологий

Т. (правило заключения) Если формулы F и F → H являются тавтологиями, то формула H также тавтология.

$$\models F,\ \models F \to H \Rightarrow\ \models H$$

Т. (правило подстановки) Если формула F, содержащая пропозиционную переменную X, является тавтологией, то подстановка в формулу F вместо переменной X любой формулы H снова приводит к тавтологии.

$$F(X),\ \models F \Rightarrow\ \models S_X^H F$$

$S_X^H F$ - формула, полученная из F в результате подстановки в неё формулы H вместо пропозиционной переменной X.

Понятие равносильности формул

<u>Опр</u>. Формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $H(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ алгебры высказываний называются *равносильными (эквивалентными)*, если при любых значениях входящих в них пропозиционных переменных логические значения получающиеся из формул F и H высказываний совпадают.

$F \cong H \Leftrightarrow \lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = \lambda(H(A_1, A_2, \ldots, A_n))$, где

A_i – любые конкретные высказывания.

Примеры

$P \wedge \neg P \cong Q \wedge \neg Q$

$\neg Q \wedge (\neg P \vee Q) \cong \neg P$

$((P \to Q) \wedge (P \to R)) \cong (P \to (Q \wedge R))$

Признак равносильности формул

Т. (признак равносильности формул) Две формулы F и H алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow H$ является тавтологией

$$F \cong H \Leftrightarrow \vDash F \leftrightarrow H$$

Сл. Отношение равносильности между формулами алгебры высказываний:

1. Рефлексивно: $F \cong F$
2. Симметрично: если $F_1 \cong F_2$, то $F_2 \cong F_1$
3. Транзитивно: если $F_1 \cong F_2$ и $F_2 \cong F_3$, то $F_1 \cong F_3$

Равносильные преобразования формул

<u>Лемма</u> (о замене) Если $G(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \cong H(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, то для любой формулы алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \ldots, Y, \ldots, X_n)$ имеет место равносильность $F(F(X_1, X_2, \ldots, G(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n), \ldots, X_n) \cong F(X_1, X_2, \ldots, H(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m), \ldots, X_m)$.

<u>Опр</u>. Переход от одной формулы к равносильной её формуле называется *равносильным преобразованием* формулы.

<u>Замечание</u> Если некоторая формула алгебры высказываний является тавтологией, то всякая равносильная её формула также является тавтологией:

$$\vDash F,\ F \cong H \Rightarrow \vDash H$$

Примеры равносильного преобразования

<u>Задача</u> Упростить формулу $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \wedge (P \vee Q)$.

$((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \wedge (P \vee Q) \cong ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \wedge (P \vee Q) \cong (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee P) \wedge (P \vee Q)) \cong (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge Q)) \cong (\neg P \vee Q) \wedge P \cong (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P) \cong Q \wedge P$

<u>Задача</u> С помощью равносильных преобразований докажите, что формула $((P \to Q) \to P) \wedge \neg P$ является тождественно ложной.

$((P \to Q) \to P) \wedge \neg P \cong ((\neg P \vee Q) \to P) \wedge \neg P \cong$

$\cong (\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \wedge \neg P \cong ((P \wedge \neg Q) \vee P) \wedge \neg P \cong P \wedge \neg P \cong \mathbf{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \not\models ((P \to Q) \to P) \wedge \neg P$

Понятие нормальных форм

<u>Опр</u>. Конъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Пример $X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3$, $\neg X_1 \wedge \neg X_2$, $\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \neg X_4$

<u>Опр</u>. Дизъюнктивным одночленом одночленом от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Пример $X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3 \vee \neg X_4$, $\neg X_1 \vee \neg X_2$, $X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3$

<u>Опр</u>. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов.

Пример $(X_1 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (\neg X_1 \vee X_3)$

<u>Опр</u>. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов.

Пример$(\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3)$

Совершенные нормальные формы

<u>Опр</u>. Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется *совершенным*, если от него от каждой пары $X_i, \neg X_i$ входит только один представитель.

<u>Опр</u>. Нормальная форма (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется *совершенной* от этих переменных, если в неё входят лишь совершенные одночлены (дизъюнктивные или конъюнктивные соответственно) от $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Пример СКНФ

$(\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3 \vee \neg X_4)$

Пример СДНФ

$(X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$

Представление формул алгебры высказываний СДНФ

Т. (о представлении формул алгебры высказываний совершенными дизъюнктивными нормальными формулами) Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от n аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) СДНФ.

Алгоритм нахождения СДНФ

Необходимо выбрать все те наборы значений её переменных, на которых формула принимает значение 1; для каждого такого набора выписать совершенный конъюнктивный одночлен, принимающий значение 1 на этом наборе и только на нём; полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединить знаками дизъюнкции.

Пример нахождения СДНФ

Задача Для формулы $(X \vee \neg(Y \to Z)) \wedge (X \vee Z)$ найти СДНФ

Таблица истинности для данной формулы

X	Y	Z	$Y \to Z$	$\neg(Y \to Z))$	$X \vee \neg(Y \to Z)$	$X \vee Z$	$(X \vee \neg(Y \to Z)) \wedge (X \vee Z)$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1

Результат СДНФ: $(X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$

Пример нахождения СДНФ

<u>Задача</u> Для формулы $(X \vee \neg(Y \to Z)) \wedge (X \vee Z)$ найти СДНФ

$(X \vee \neg(Y \to Z)) \wedge (X \vee Z) \cong (X \vee \neg(\neg Y \vee Z)) \wedge (X \vee Z) \cong$

$\cong (X \vee (Y \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Z) \cong (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Z) \wedge (X \vee Z) \cong$

$\cong (X \wedge X \wedge X) \vee (X \wedge X \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Z \wedge X) \vee (X \wedge \neg Z \wedge Z)$

$\vee (Y \wedge X \wedge X) \vee (Y \wedge X \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z \wedge X) \vee (Y \wedge \neg Z \wedge Z)$

$\cong X \vee (X \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)$

$\cong (X \wedge 1 \wedge 1) \vee (X \wedge Z \wedge 1) \vee (X \wedge \neg Z \wedge 1) \vee (X \wedge Y \wedge 1) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \cong (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Z \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Z \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \cong (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$

Представление формул алгебры высказываний СКНФ

Т. (о представлении формул алгебры высказываний совершенными конъюнктивными нормальными формулами) Каждая формула алгебры высказываний от *n* аргументов, не являющаяся тавтологией, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) СКНФ.

Алгоритм нахождения СДНФ

Необходимо выбрать все те наборы значений её переменных, на которых формула принимает значение 0; для каждого такого набора выписать совершенный дизъюнктивный одночлен, принимающий значение 0 на этом наборе и только на нём; полученные совершенные дизъюнктивные одночлены соединить знаками конъюнкции.

Пример нахождения СКНФ

Задача Для формулы $((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X$ найти СКНФ

Таблица истинности для данной формулы

X	Y	Z	$X \vee Y$	$(X \vee Y) \to Z$	$\neg X$	$((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

Результат СКНФ: $(X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$

Пример нахождения СКНФ

Задача Для формулы $((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X$ найти СДНФ

$((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X \cong (\neg(X \vee Y) \vee Z) \leftrightarrow \neg X \cong ((\neg(X \vee Y) \vee Z) \to \neg X) \wedge (\neg X \to (\neg(X \vee Y) \vee Z))) \cong (\neg(\neg(X \vee Y) \vee Z) \vee \neg X) \wedge (X \vee (\neg(X \vee Y) \vee Z))) \cong(((X \wedge \neg Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee \neg X) \wedge (X \vee Z \vee (\neg X \wedge \neg Y)) \cong (X \wedge \neg Z \wedge X) \vee (X \wedge \neg Z \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Z \wedge \neg X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg Z \wedge X) \vee (Y \wedge \neg Z \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z \wedge \neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge X) \vee (\neg X \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg X \wedge \neg Y) \cong (X \wedge \neg Z) \vee (Y \wedge \neg Z \wedge X) \vee (\neg X \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \cong (X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \cong (X \vee \neg X \vee \neg X) \wedge (X \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z \vee \neg X) \wedge (X \vee Z \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee \neg X) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee Z \vee \neg X) \wedge (\neg Z \vee Z \vee \neg Y) \cong (X \vee Z \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee 0) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee \neg Y) \cong (X \vee Z \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee \neg Y) \cong (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z).$

Понятие логического следствия

Опр. Формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *логическим следствием* формул $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ если формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо всех её пропозиционных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ конкретных высказываний, при которых в истинное высказывание превращаются все формулы $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

$$F_1, \ldots, F_m \models H$$

Формулы $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называются *посылками*.

Пример логического следствия

<u>Задача</u> Определить справедливо ли следующее логическое следование: 1) $P \wedge R, \neg R \to \neg Q \vDash R$.

Таблица истинности

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg R \to \neg Q$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

<u>Вывод</u> Логическое следование $P \wedge R, \neg R \to \neg Q \vDash R$ справедливо

Признаки и свойства логического следствия

<u>Т</u>. (признак логического следствия) Формула H будет логическим следствием формулы F тогда и только тогда, когда формула $F \to H$ является тавтологией: $F \models H \Leftrightarrow \models F \to H$.

<u>Т</u>. Для любых формул F_1, F_2, …, F_m, H ($m \geq 2$) следующие утверждения равносильны:

1. $F_1, F_2, \ldots, F_m \models H$;
2. $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m \models H$;
3. $\models (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \to H$

<u>Т</u>. Отношение логического следования между формулами алгебры высказываний обладает следующими свойствами:

1) $F_1, F_2, \ldots, F_m \models F_i$ $i = 1,2,\ldots,m$;

- Если $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G_j$ для $j = 1,2,\ldots,p$ и $G_1, G_2, \ldots, G_p \models H$, то $F_1, F_2, \ldots, F_m \models H$.

Следование и равносильность формул

Т. Две формулы алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой: $F \cong H \Leftrightarrow F \vDash H,\ H \vDash F$

Замечание Если некоторая формула является тавтологией, то и всякое её логическое следствие также является тавтологией: $\vDash F,\ F \vDash H \Rightarrow \ \vDash H$

Правила логических умозаключений Ч.1

Правило modus ponens $\dfrac{F, F \to G}{G}$

Правило modus tollens $\dfrac{F \to G, \neg G}{\neg F}$

Правило введения конъюнкции $\dfrac{F, G}{F \wedge G}$

Правило удаления конъюнкции $\dfrac{F \wedge G}{F}, \dfrac{F \wedge G}{G}$

Правило введения дизъюнкции $\dfrac{F}{F \vee G}, \dfrac{G}{F \vee G}$

Контрапозиции $\dfrac{F \to G}{\neg G \to \neg F}$

Правила логических умозаключений Ч.2

Правило цепного заключения

$$\frac{F \to G, G \to H}{F \to H}$$

Правило перестановки посылок

$$\frac{F \to (G \to H)}{G \to (F \to H)}$$

Правило объединения и разъединения посылок

$$\frac{F \to (G \to H)}{(F \wedge G) \to H}, \frac{(F \wedge G) \to H}{F \to (G \to H)}$$

Правило расширенной контрапозиции

$$\frac{(F \wedge G) \to H}{(F \wedge \neg H) \to \neg G}$$

Нахождение следствий из данных посылок

Т. Формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, не являющаяся тавтологией, тогда и только тогда будет логическим следствием формул $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, …, $F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, не все из которых являются тавтологиями, когда все совершенные дизъюнктивные одночлены из разложения формулы H в СКНФ входят в СКНФ формулы $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \wedge \ldots \wedge F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Алгоритм для нахождения всех (неравносильных)формул, являющимися следствиями из посылок $F_1, \ldots, F_m$.

1.Составить конъюнкцию $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$.

2.Найти СКНФ формулы $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$.

3.Выписать все совершенные дизъюнктивные одночлены найденной СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих одночленов. Полученное множество формул – искомое.

Пример: Нахождение следствий из данных посылок

Задача Найти все неравносильные формулы, являющиеся следствиями из посылок $(P \wedge Q) \longrightarrow R$, $\neg R$.

Решение

СКНФ для формулы $((P \wedge Q) \longrightarrow R) \wedge (\neg R)$ имеет вид $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$.

Набор всех неравносильных формул, являющихся следствиями: $(P \vee Q \vee R)$, $(P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee \neg Q \vee \neg R)$, $(\neg P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$, $(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$, $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$, $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$.

Нахождение посылок для данного следствия

Т. Чтобы найти все формулы, логическим следствием каждой из которых будет данная формула $G(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ необходимо действовать согласно следующему алгоритму. Найти СКНФ для формулы $G(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; выявить все совершенные дизъюнктивные одночлены, которые в ней отсутствуют; составить всевозможные конъюнкции формулы $G(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ с недостающими дизъюнктивными одночленами. Получившаяся совокупность формул (вместе с формулой G) будет искомой (с точностью до равносильности формул).

Пример: Нахождение посылок для данного следствия

<u>Задача</u> Найти все не равносильные между собой и не тождественно ложные формулы алгебры высказываний, зависящие от переменных X и Y, для которых формула $X \leftrightarrow Y$ является логическим следствием.

<u>Решение</u>

Для формулы $X \leftrightarrow Y$ СКНФ имеет вид $(\neg X \lor Y) \land (\neg Y \lor X)$.

Недостающие одночлены $(X \lor Y)$ и $(\neg Y \lor \neg X)$. Поэтому искомыми посылками являются следующие формулы $(X \leftrightarrow Y) \land (X \lor Y)$, $(X \leftrightarrow Y) \land (\neg Y \lor \neg X)$, $(X \leftrightarrow Y) \land (X \lor Y) \land (\neg Y \lor \neg X)$.

После упрощения $(X \leftrightarrow Y) \land (X \lor Y) \cong X \land Y$, $(X \leftrightarrow Y) \land (\neg Y \lor \neg X) \cong \neg X \land \neg Y$, $(X \leftrightarrow Y) \land (X \lor Y) \land (\neg Y \lor \neg X) \cong 0$.

Результат: $X \leftrightarrow Y$, $X \land Y$, $\neg X \land \neg Y$.