Многогранники

К этому разделу отнесем два основных типа задач:

1) задачи на вычисление;

2) задачи на сечения.

К задачам на вычисление относятся те, где требуется найти линейные элементы правильных призм и пирамид, а именно: сторону основания, боковое ребро, апофему и т. д., далее угловые элементы: двугранные углы при основании, линейные углы при вершине; площади: боковой поверхности, полной поверхности, основания.

В основе второго типа задач — задач на построение лежит умение построить сечение данного многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. В задачах этого типа сечение задается точкой и прямой, тремя точками, двумя точками и прямой, параллельной плоскостью сечения и т. д.

Многогранником называется тело, граница которого состоит из многоугольников.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами многоугольника**.

Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями многогранника**.

Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые**.

Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он называется **выпуклым**.

Например, тетраэдр, октаэдр, параллелепипед — выпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.

1. Призма

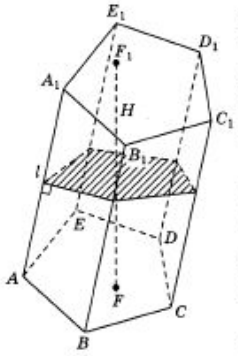


Рис. 1

Призмой (рис. 1) называется многогранник, у которого две грани $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (**основания призмы**) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани (AA_1B_1B; BB_1C_1C и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой (AA_1, BB_1 и т. д.).

Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями**, а ребра AA_1, BB_1 и т. д. называются **боковыми**.

Перпендикуляр FF_1, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы.

Если в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник и т. д., то призма называется соответственно **треугольной**, **четырехугольной** и т. д.

Призма называется **прямой**, если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется **наклонной**.

Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма называется **правильной**.

У правильной призмы все боковые грани — **равные прямоугольники**.

Сечение, которое образовано плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы, называется **перпендикулярным сечением** (см. рис. 1).

Произвольная призма

$$S_{бок.} = P_{сеч.} \cdot l; \quad V = S_{осн.} \cdot H; \quad V = S_{сеч.} \cdot l;$$
$$S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$$

Прямая призма

$$S_{бок.} = P \cdot H; \quad S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}; \quad V = S_{осн.} \cdot H.$$

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

2. Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 2).

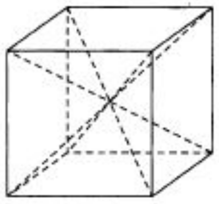


Рис. 2

У параллелепипеда **6 граней** и все они параллелограммы.

Противоположные грани попарно равны и **параллельны**.

Параллелепипед имеет **4 диагонали**, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Любая грань параллелепипеда может быть принята за **основание**.

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется **прямым**.

Прямой параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 3).

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани квадраты, называется **кубом**.

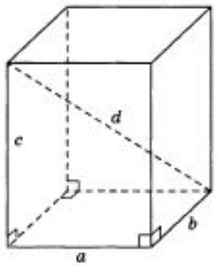


Рис. 3

Прямоугольный параллелепипед (рис. 3):

$$S_{бок.} = P \cdot H = 2(a + b)c;$$
$$V = abc;$$
$$S_{полн.} = 2(ab + bc + ac);$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Куб

Если a — ребро куба, то

$$V = a^3; \; d = a\sqrt{3}; \quad S_{полн.} = 6a^2.$$

3. Пирамида

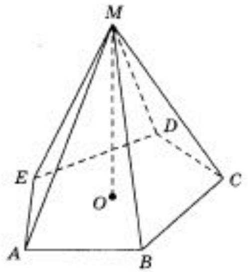


Рис. 4

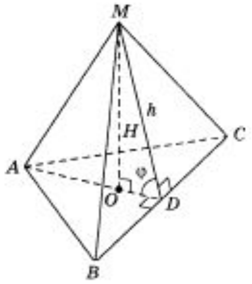


Рис. 5

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — **основание пирамиды** — произвольный многоугольник $ABCDE$ (рис. 4), а остальные **боковые грани** — треугольники с общей вершиной M.

Перпендикуляр MO, опущенный из вершины на основание, называется **высотой пирамиды**.

Если в основании пирамиды треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д.

Треугольная пирамида называется **тетраэдром** (четырехгранником).

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания, то пирамида называется **правильной** (рис. 5).

В правильной пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани — равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани MD называется **апофемой** правильной пирамиды.

Произвольная пирамида

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};\quad V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Правильная пирамида (рис. 5)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}P \cdot h;\quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};\quad V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то часть пирамиды, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой** (рис. 6).

Параллельные грани усеченной пирамиды (ABC и $A_1B_1C_1$) называются ее **основаниями**; расстояние между ними (OO_1) — **высотой**.

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она получена, была правильной.

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции.

Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

Произвольная усеченная пирамида

$$V = \frac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

Правильная усеченная пирамида (рис. 6)

$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, где P_1, P_2 — периметры оснований.

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2$, где S_1, S_2 — площади оснований.

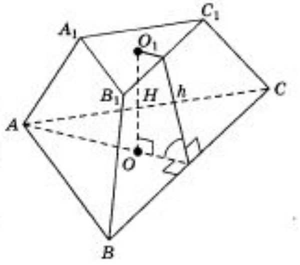


Рис. 6

4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

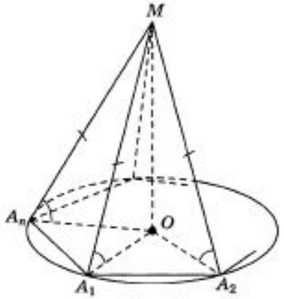


Рис. 7

1. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы (рис. 7), длины всех боковых ребер равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка O является также точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

2. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды (рис. 8).

3. Если высота треугольной пирамиды $MABC$ проходит через точку пересечения высот ΔABC, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е. $AM \perp BC$, $MC \perp AB$ и $MB \perp AC$. Справедливо и обратное утверждение (рис. 9).

4. Если MO — высота пирамиды $MABC$ и $MA \perp BC$, то $(MAO) \perp BC$ (рис. 9).

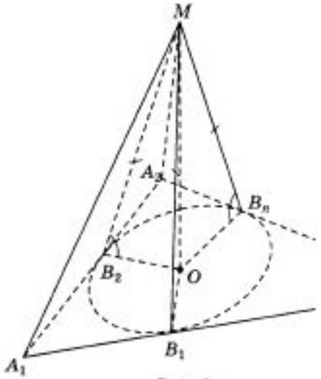


Рис. 8

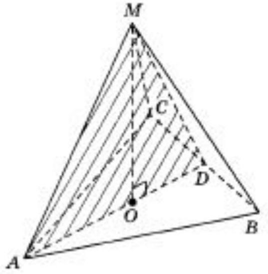


Рис. 9

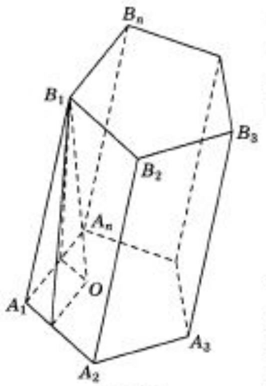


Рис. 10

5. Если в наклонной призме $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1, то точка O основания высоты B_1O лежит на биссектрисе $\angle A_1$ (рис. 10).

Круглые тела

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно трудно поддаются изображению. Это замечание прежде всего относится к шару. По этой причине при решении стереометрических задач, как правило, сам шар (а тем более шары) стараются не изображать, так как многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхность (боковая и полная) и соответственно параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или просто конуса), то здесь добавляются угол при вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

1. Цилиндр

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром** (рис. 11).

Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги — **основаниями цилиндра.**

Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, а длина образующей — **высотой цилиндра**.

Прямая OO_1 называется **осью цилиндра**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, представляет собой **прямоугольник**, у которого две стороны — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра, а само сечение называется **осевым**.

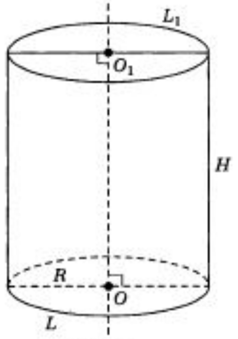


Рис. 11

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, является **кругом**.

$$S_{бок.} = 2\pi RH;\quad S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.};$$
$$S_{полн.} = 2\pi R(R + H);\quad V = \pi R^2 H.$$

2. Конус

Конусом называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L (рис. 12).

Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг — **основанием конуса**.

Точка C — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса.**

Прямая OC называется **осью конуса**, а отрезок OC называется **высотой конуса**.

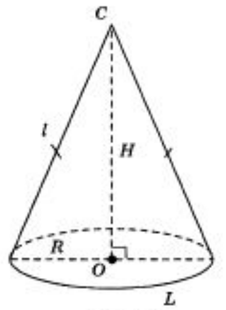


Рис. 12

Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым**.

$$S_{бок.} = \pi Rl;\quad S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.};$$
$$S_{полн.} = \pi R(R + l);\quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

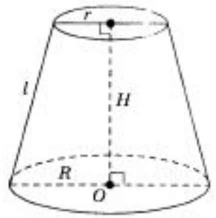


Рис. 13

Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к его оси, то та часть конуса, которая заключена между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 13).

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой** усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{бок.} = \pi l(R + r);\quad S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2;\quad S_1 = \pi R^2;$$
$$S_2 = \pi r^2;\quad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

3. Шар

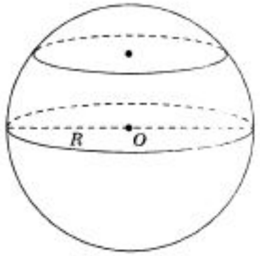


Рис. 14

Шаровой, или **сферической**, **поверхностью** (или просто **сферой**) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — **центра** шара (точка O, рис. 14).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Шар можно получить вращением полукруга (или круга) около его диаметра.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр O, представляет собой наибольший круг.

Если плоскость имеет со сферой только одну общую точку, то она называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка — **точкой касания** плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Верно и обратное.

Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**.

Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника**.

$$S_{шара} = 4\pi R^2 = \pi D^2;\quad V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

1. Шаровой сегмент (рис. 15).

Если S — площадь сферической поверхности сегмента, h — высота, V — объем, r — радиус основания, то

$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$
$$S_{полн.} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$
$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

2. Шаровой сектор (рис. 15).

$$S = \pi R(2h + r);$$
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi d^2 h.$$

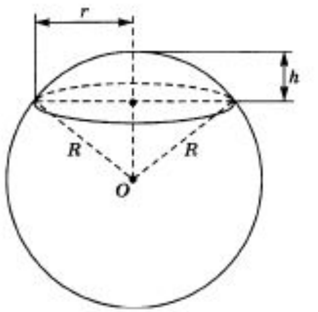


Рис. 15

3. Шаровой пояс (рис. 16).

Если h — высота шарового пояса, r_1 и r_2 — радиусы оснований, то

$$S_{бок.} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$
$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$
$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

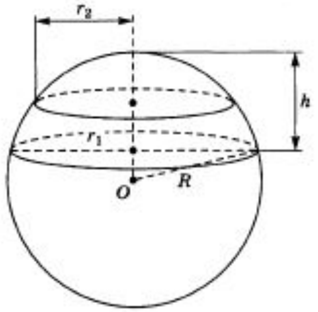


Рис. 16

Раздел II

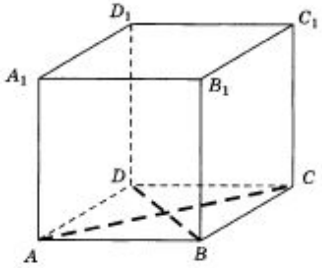
ЗАДАЧИ В ТАБЛИЦАХ

§ 1. Угол между двумя прямыми

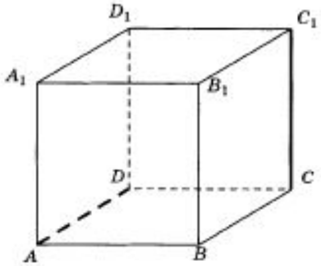
КУБ

Таблица 1

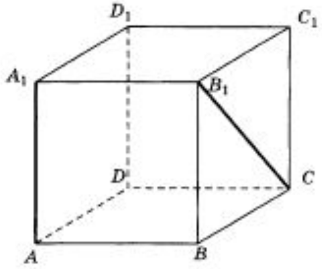
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD.



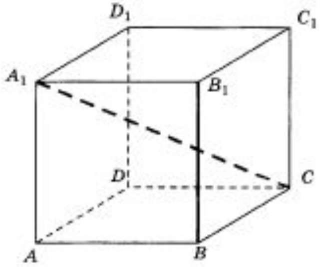
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми CC_1 и AD.



3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C.

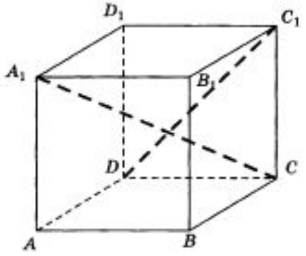


4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BB_1 и A_1C.

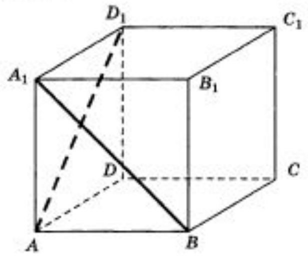


Продолжение табл. 1

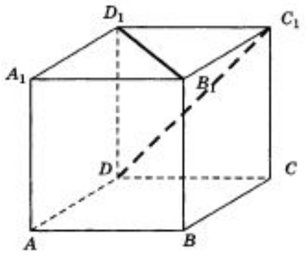
5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и DC_1.



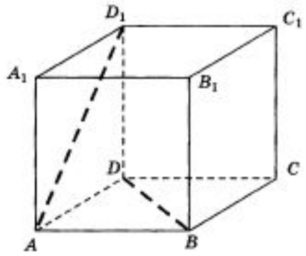
6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и A_1B.



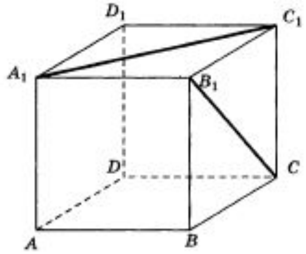
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и D_1B_1.



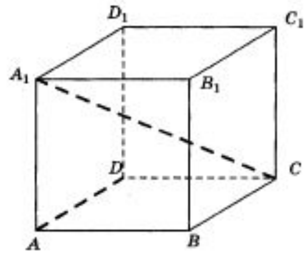
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и BD.



9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C.

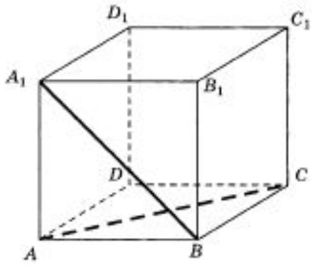


10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и AD.

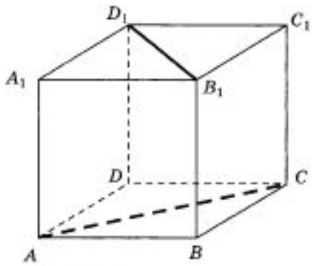


Продолжение табл. 1

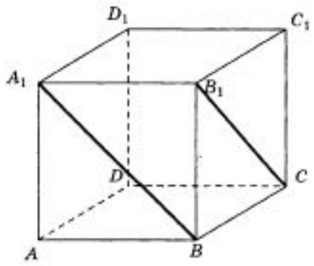
11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и AC.



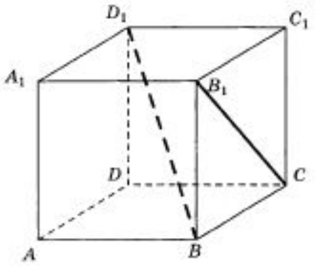
12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и B_1D_1.



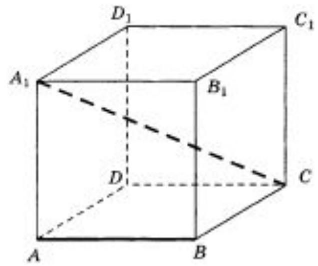
13 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и CB_1.



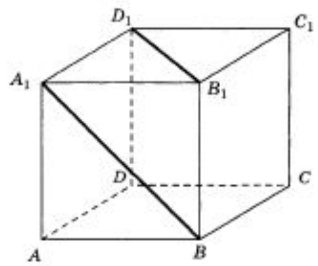
14 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми B_1C и BD_1.



15 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и CA_1.

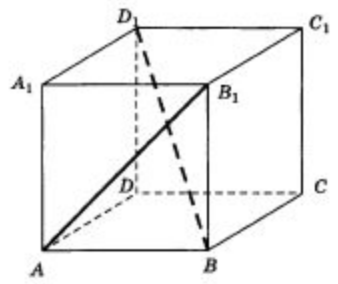


16 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и B_1D_1.

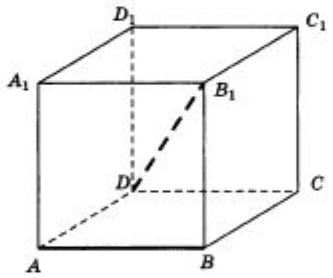


Окончание табл. 1

17 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1.



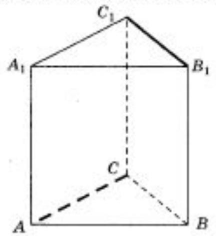
18 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и DB_1.



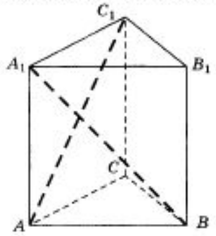
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 2

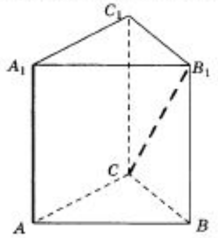
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1C_1.



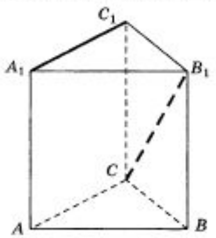
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B.



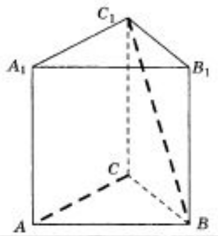
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C.



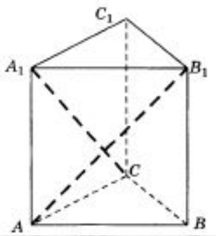
5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C.



3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и BC_1.

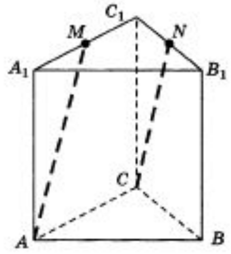


6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и A_1C.

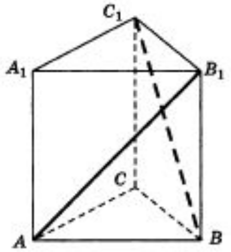


Окончание табл. 2

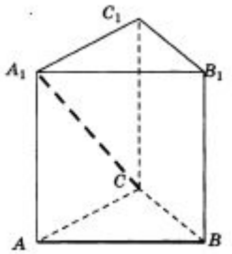
7 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AM и CN, где M и N — соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1.



9 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



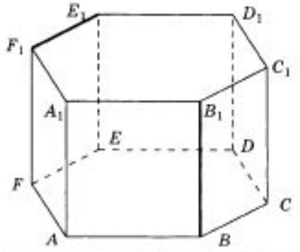
8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и CA_1.



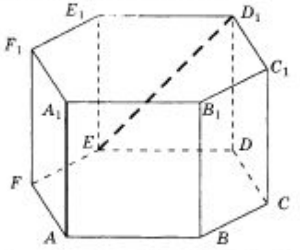
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 3

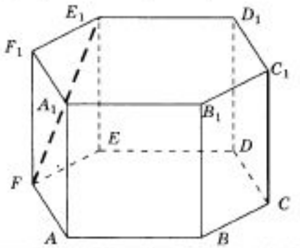
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BB_1 и F_1E_1.



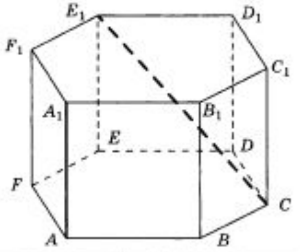
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и D_1E.



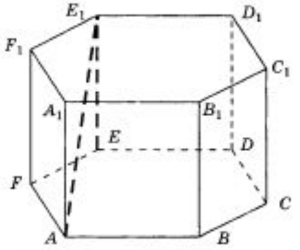
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми CC_1 и FE_1.



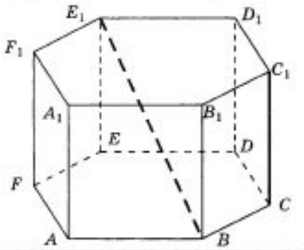
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и E_1C.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AE_1 и EE_1.

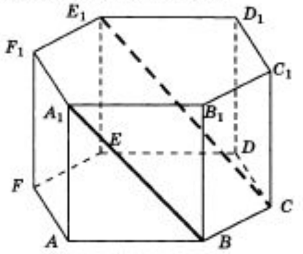


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми CC_1 и BE_1.

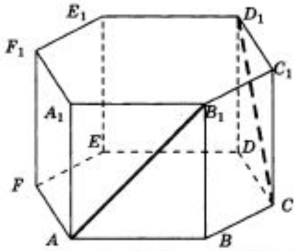


Продолжение табл. 3

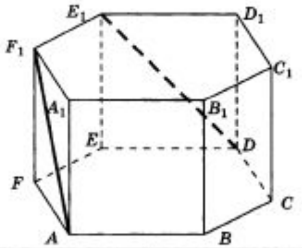
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1B и E_1C.



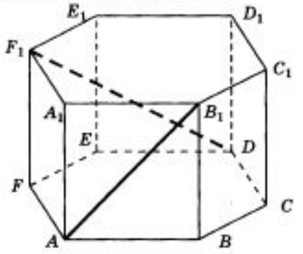
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и D_1C.



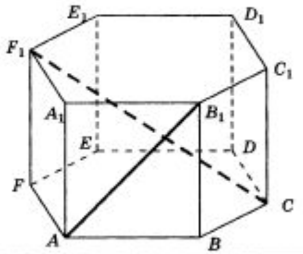
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AF_1 и DE_1.



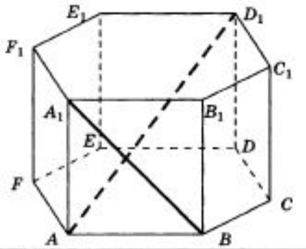
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и F_1D.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми F_1C и AB_1.

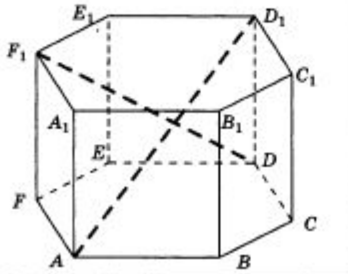


12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1B и AD_1.

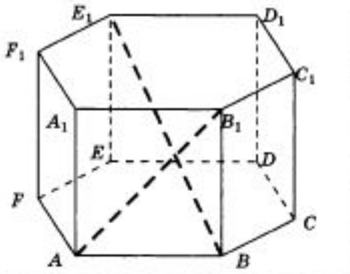


Продолжение табл. 3

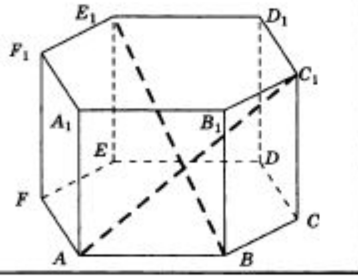
13 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD_1 и F_1D.



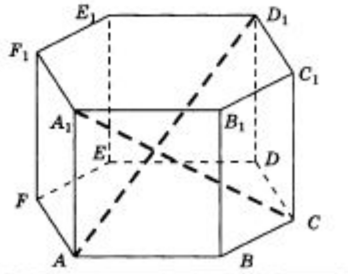
14 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BE_1 и AB_1.



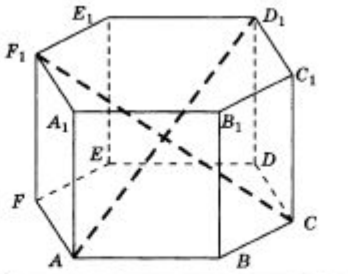
15 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BE_1.



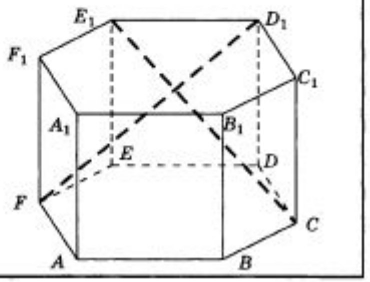
16 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1C и AD_1.



17 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD_1 и CF_1.

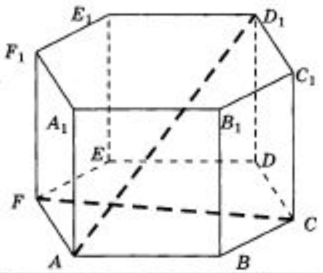


18 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми FD_1 и CE_1.

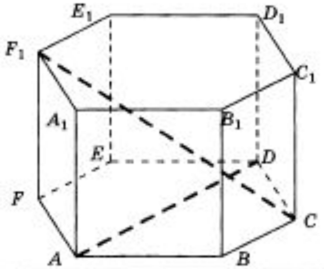


Продолжение табл. 3

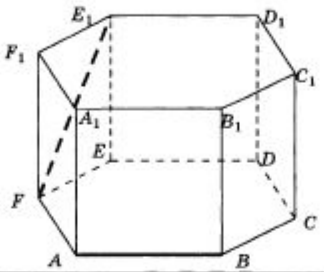
19 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми FC и AD_1.



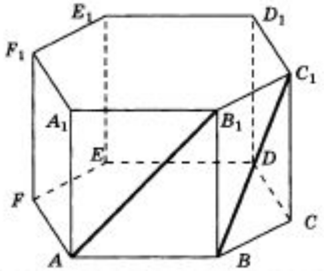
20 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD и CF_1.



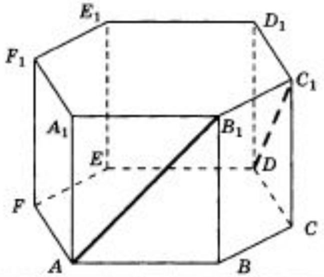
21 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и FE_1.



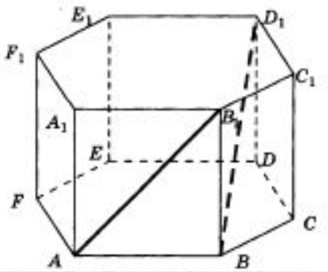
22 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



23 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DC_1.

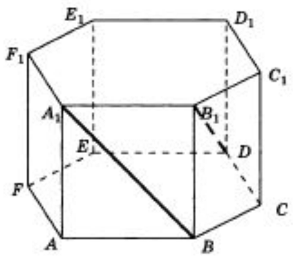


24 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1.



Окончание табл. 3

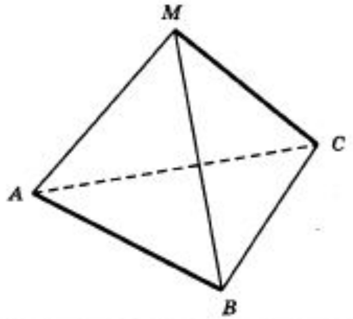
25 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BA_1 и DB_1.



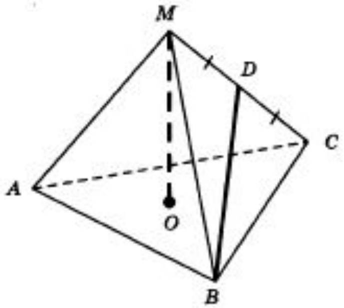
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 4

1 В правильном тетраэдре $MABC$ найдите угол между прямыми AB и CM.



2 В правильном тетраэдре $MABC$ найдите угол между высотой MO и медианой BD боковой грани MBC.



3 В правильном тетраэдре $MABC$ точка D — середина ребра CM. Найдите угол между прямыми BC и AD.