Теория множеств

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Понятие множества

Под ***множеством*** понимается некоторая, вполне определенная совокупность объектов или элементов.

Георг Кант: объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью.

Определение

Если a есть один из объектов множества A, то a есть элемент A, или принадлежит A.

$$a \in A$$

Не принадлежность: $a \notin A$

Определение.

Множество A есть подмножество множества B ($A \subseteq B$), если каждый элемент A есть элемент B;

то есть, если $x \in A$, то $x \in B$.

В частности, каждое множество есть подмножество самого себя.

$A \not\subseteq B$, если существует элемент A, не принадлежащий B.

Определение

Пусть A и B – некоторые множества.

A равно B ($A = B$), если для любого $x : x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

$A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то элемент записывают $A \subset B$, A есть ***собственное подмножество*** B.

Определение.

Пустое множество $\varnothing$ или {}, есть множество, которое не содержит элементов.

Универсальное множество ***U*** есть множество, обладающее свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

Операции над множествами

Определение.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B.

Обозначается $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \text{и} \ x \in B\}.$$

Определение.

Пересечение множеств в общем случае:

Если $I = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, то

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k =$$

$$= \{x : x \in A_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

Обозначается $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \ и \ x \in B\}.$$

Определение.

Объединение множеств в общем случае:

Пусть $I = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, то

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k =$$

$$= \{x : \text{существует } i \in I \text{ такое, что } x \in A_i\}.$$

Определение

Пусть A и B множества. ***Разностью множеств*** $A - B$ называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Симметрическая разность множеств A и B

обозначается $A \Delta B$ есть множество $(A - B) \cup (B - A)$

Определение.

Дополнение множества A,

обозначается A'

- это множество элементов универсума, которые не принадлежат A.

$$U - A = \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

Теорема

Для произвольных множеств A и B справедливо равенство

$$A - B = A \cap B'$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
a \in A - B &\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \notin B) \Leftrightarrow && \text{определение разности } A - B \\
&\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in B') \Leftrightarrow && \text{определение дополнения} \\
&\Leftrightarrow a \in (A \cap B'). && \text{определение пересечения}
\end{aligned}$$

Теорема

Для произвольных множеств A и B имеет место

а) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

б) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Доказательство (а):

$$
\begin{aligned}
a \in (A \cap B)' &\Leftrightarrow a \notin (A \cap B) \Leftrightarrow && \text{определение дополнения} \\
&\Leftrightarrow \sim(a \in (A \cap B)) \Leftrightarrow && \text{определение } \notin \\
&\Leftrightarrow \sim((a \in A) \wedge (a \in B)) \Leftrightarrow && \text{определение пересечения} \\
&\Leftrightarrow \sim(a \in A) \vee \sim(a \in B) \Leftrightarrow && \text{закон логики де Моргана} \\
&\Leftrightarrow (a \notin A) \vee (a \notin B) \Leftrightarrow && \text{определение } \notin \\
&\Leftrightarrow (a \in A') \vee (a \in B') \Leftrightarrow && \text{определение дополнения} \\
&\Leftrightarrow a \in (A' \cup B'). && \text{определение объединения}
\end{aligned}
$$

Теорема

Для произвольных множеств A, B и C справедливы равенства

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Доказательство (а):

$$
\begin{array}{rll}
a \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in (B \cup C)) \Leftrightarrow & \text{определение пересечения} \\
& \Leftrightarrow (a \in A) \wedge ((a \in B) \vee a \in C) \Leftrightarrow & \text{определение объединения} \\
& \Leftrightarrow ((a \in A) \wedge (a \in B)) \vee & \text{определение пересечения} \\
& \quad \vee ((a \in A) \wedge (a \in C)) \Leftrightarrow & \text{закон логики де Моргана} \\
& \Leftrightarrow (a \in (A \cap B)) \vee (a \in (A \cap C)) \Leftrightarrow & \text{определение пересечения} \\
& \Leftrightarrow a \in ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \Leftrightarrow & \text{определение } \notin \\
& \Leftrightarrow (a \in A') \cup (a \in B'). & \text{определение объединения}
\end{array}
$$

Определение

Множество всех подмножеств множества *A*, или ***булеан*** множества *A*,

обозначается $P(A)$,

есть множество, состоящее из всех подмножеств множества *A*.

Следовательно, булеан множества $A = \{1, 2, 3\}$ есть множество

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Определение.

Декартово произведение множеств *A* и *B*,

обозначается $A \times B$,

есть множество $\{(a, b) : a \in A \text{ и } b \in B\}$.

Объект (a, b) называется упорядоченной парой с первой компонентой a второй компонентой *b*.

Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, и $B = \{r, s\}$. Тогда

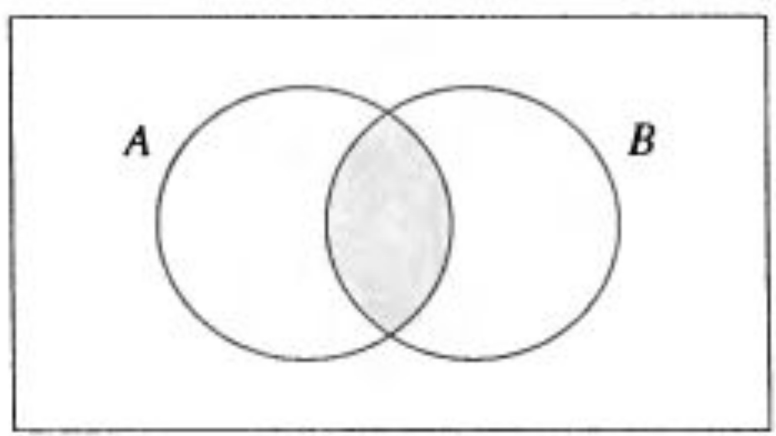
$A \times B = \{(1, r), (1, s), (2, r), (2, s), (3, r), (3, s)\}$.

Если каждое из множеств A и B представляет собой множество действительных чисел, то $A \times B$ представляет собой ***декартову плоскость***, на которой упорядоченные пары чисел используются для графического изображения функций.

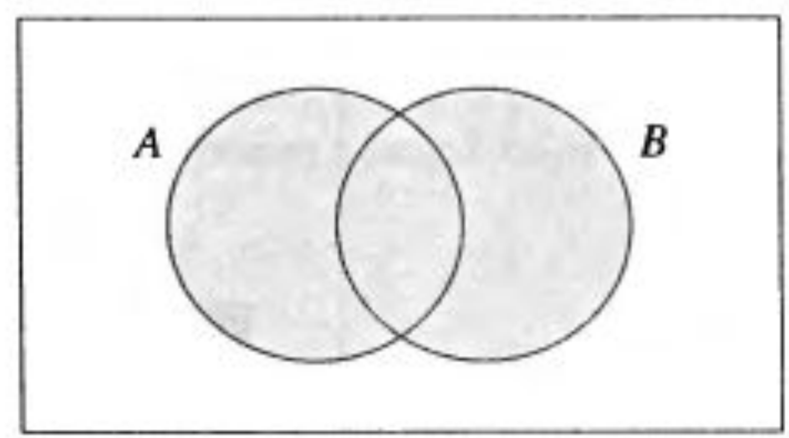
Диаграммы Венна

Перейдем к обозначениям, принятым в булевой записи

$A \cap B$

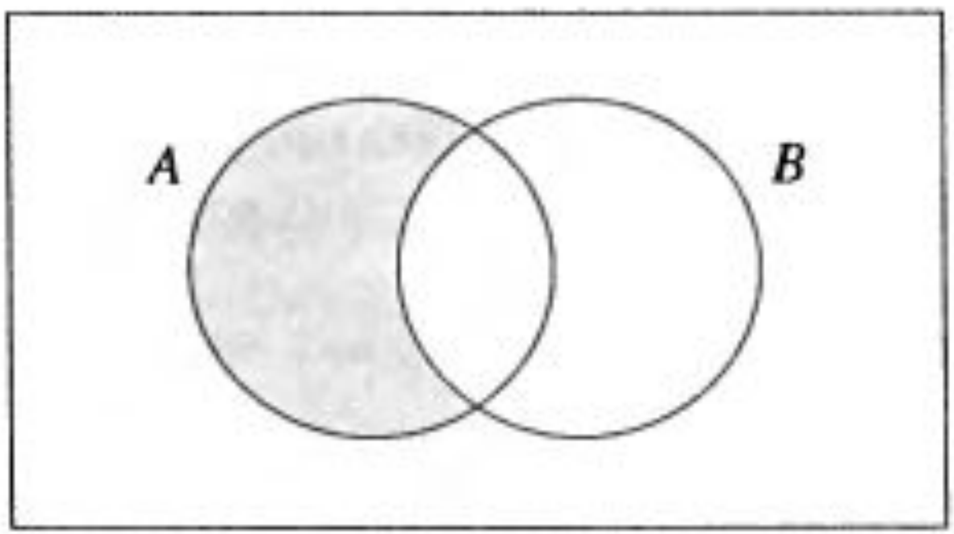


$A \cup B$

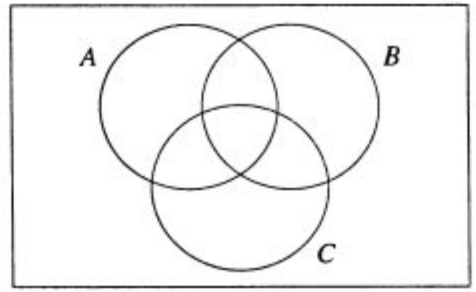


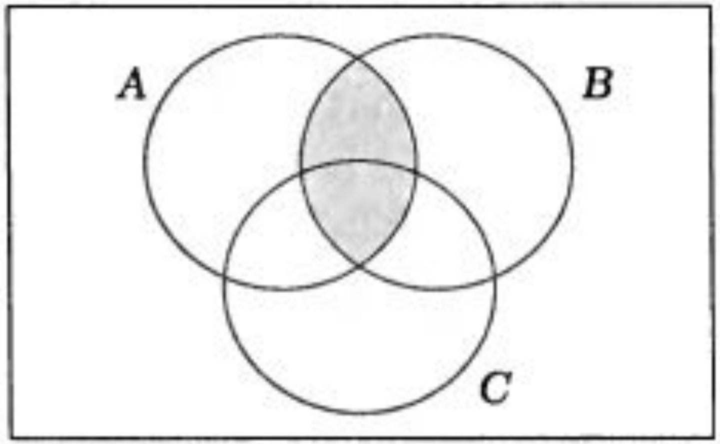
Диаграммы Венна

A - *B*

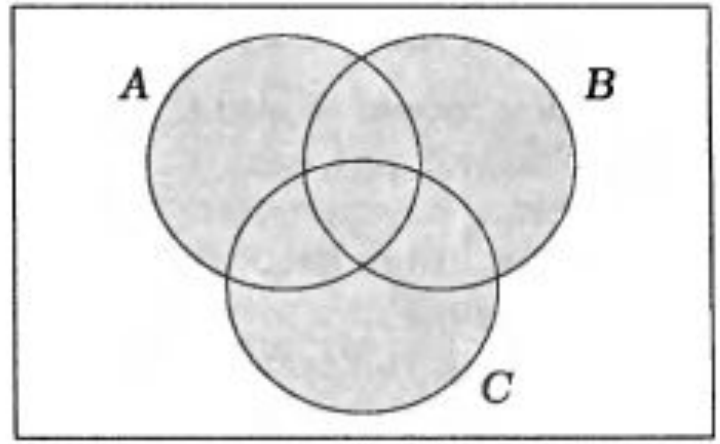


Диаграммы Венна

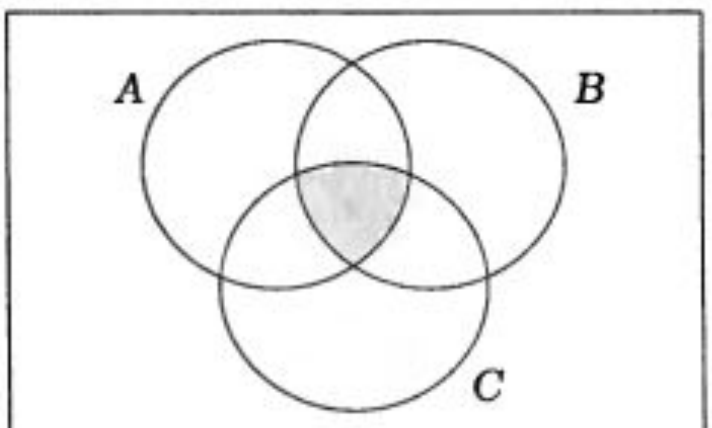




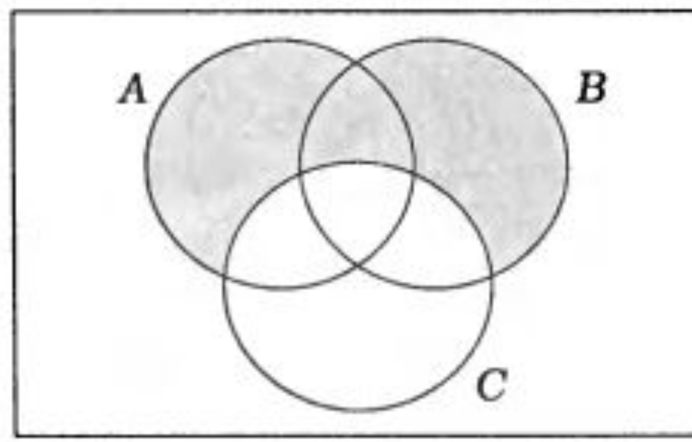
$A \cap B$



$A \cup B \cup C$

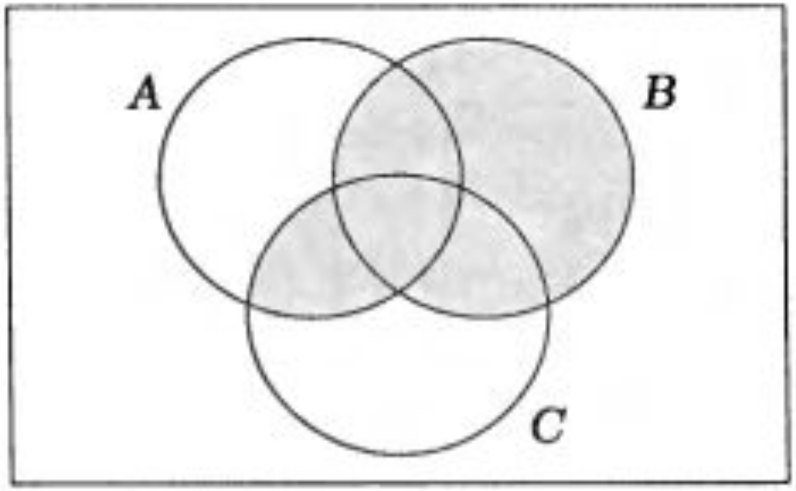


$A \cap B \cap C$



$(A \cup B)-C$

Диаграммы Венна



$(A \cap C) \cup B$

Теорема

Пусть A, B и C – подмножества универсального множества U. Тогда справедливы

а) ***Законы идемпотентности***

$$A \cap A = A;$$
$$A \cup A = A.$$

б) ***Двойное дополнение***

$$(A')' = A.$$

в) ***Законы де Моргана***

$$(A \cup B)' = A' \cap B';$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

г) ***Свойства коммутативности***

$$A \cap B = B \cap A;$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

д) ***Свойства ассоциативности***

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

е) ***Свойства дистрибутивности***

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

ж) *Свойства тождества*

$$A \cup \varnothing = A;$$
$$A \cap \boldsymbol{U} = A.$$

з) *Свойства дополнения*

$$A \cup A' = \boldsymbol{U};$$
$$A \cap A' = \varnothing.$$

Мощность

Определение

Мощность множества есть просто количество содержащихся в нем элементов.

Пустое множество есть конечное множество мощности 0.

Если существует взаимно однозначное соответствие между множеством A и множеством $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, то A есть конечное множество мощности n.

Множество А называется счетно бесконечным, если существует взаимно однозначное соответствие между множеством А и множеством $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Множество называется счетным, если оно конечно или счетно бесконечно.

Теорема

а) Пусть A *и* B – непересекающиеся конечные множества. Тогда множество $A \cup B$ конечно. Если A имеет мощность n и B имеет мощность m, то $A \cup B$ имеет мощность $m + n$.

б) Пусть A *и* B – непересекающиеся счетно бесконечные множества. Тогда множество $A \cup B$ - счетно бесконечное множество.

в) Пусть A *и* B – непересекающиеся счетные множества. Тогда множество $A \cup B$ - счетное множество.

Теорема.

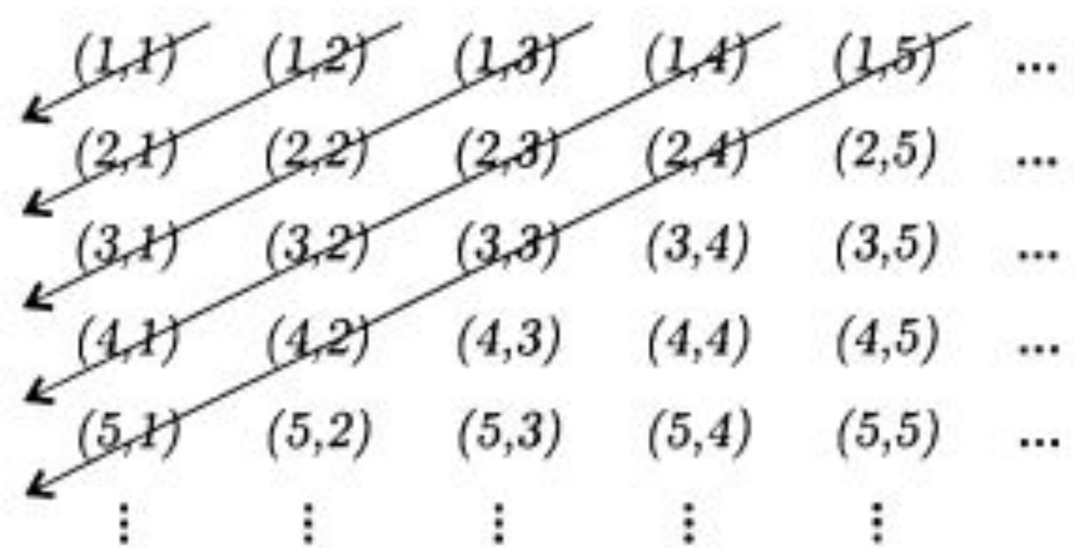
Подмножество счетного множества счетно.

Теорема.

Пусть S – счетно бесконечное множество, тогда множество $S \times S$ также счетно бесконечное.

Доказательство:

Если N – множество натуральных положительных чисел, то $N \times N$ счетно.



По диагональным стрелкам определяют соотношение φ:

$\varphi(1)=(1, 1)$, $\varphi(2)=(1, 2)$, $\varphi(3)=(2, 1)$, $\varphi(4)=(1, 3)$, $\varphi(5)=(2, 3)$…

Функция φ устанавливает взаимно однозначное соответствие.

Упорядоченная пара (m, n) расположена на $m+n-1$ диагонали и является m-ым элементом вдоль диагональной линии. ⇒

Множество $N\times N$ счетно. S – счетно бесконечное множество. ⇒

Существует взаимно однозначное соответствие $\theta : N \to S$.

Соответствие $\theta \times \theta : N \times N \to S \times S$ определяется так:

$$\theta \times \theta\ (a, b) = (\ \theta(a), \theta(b)).$$

Функция $\theta \times \theta$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $N \times N$ и $S \times S$.

Теорема.

Множество Q^+ положительных рациональных чисел является счетно бесконечным.

Доказательство:

Рассмотрим подмножество M множества $N \times N$ вида

$\{(a, b): (a, b) \in \times N, a$ и b – взаимно простые$\}$.

Функция $\varphi : Q+ \to M$,

$\varphi (a / b) = (a, b)$ – есть искомое взаимно однозначное соответствие.

Множество $N \times N$ - счетно бесконечное множество $\Rightarrow$ M также счетно бесконечное. $\Rightarrow$ $Q+$ – счетно бесконечное множество.

Теорема.
Если A и B – счетные множества, то $A \cup B$ также счетно.

Доказательство:
Множество $A - B$ счетно как подмножество счетного множества A.
Множества $A - B$ не пересекаются, следовательно
$(A - B) \cup B = A \cup B$ являются счетными.

Все множества счетны?!
Существуют бесконечные, но несчетные множества!

Теорема.

Пусть R – множество действительных чисел. Множество $I = \{x : x \in R$ и $0 < x < 1\}$ не является счетным.

$$\begin{aligned}
a_1 &= .a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots\\
a_2 &= .a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots\\
a_3 &= .a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots\\
a_4 &= .a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\ldots\\
a_5 &= .a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\ldots\\
&\vdots\quad\vdots\qquad\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= .1425958273\ldots\\
a_3 &= .2837462982\ldots\\
a_4 &= .1985723986\ldots\\
a_5 &= .2309847621\ldots\\
&\vdots\quad\vdots\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Теорема.

Множество действительных R несчетно.

Доказательство:

Если бы R было счетным, то множество $I \subseteq R$ было бы счетным.

Теорема.

Не существует взаимно однозначного соответствия между множеством S и его булеаном $P(S)$.

Пример (Парадокс Рассела)

Пусть S – множество всех множеств.

Пусть $W = \{x : x \notin x\}$. Пустое множество принадлежит W, т.к. оно не принадлежит самому себе.

На самом деле, большинство множеств принадлежит W.

Однако S не принадлежит W, т.к. $S \in S$.

$W \in W$?

Если $W \in W$, то оно принадлежит множеству всех множеств, которые сами себе не принадлежат. $\Rightarrow$ $W \notin W$.

Однако, если предположить $W \notin W$, то W принадлежит множеству всех множеств, которые не принадлежат сами себе. Таким множеством является $W \Rightarrow W \in W$. Противоречие.

Последний слайд лекции

!!