Исчисление предикатов

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Предикаты

Многие утверждения, имеющие форму высказываний, на самом деле такими не являются, так как содержат переменные, значения которых не указано.

$$\begin{aligned} P(x): &\quad 3 + x = 5; \\ Q(x,y,z): &\quad x^2 + y^2 \geq z^2; \\ R(x,y): &\quad x^2 + y^2 \geq 0; \\ S(x): &\quad -1 \leq \sin(x) \leq 1, \end{aligned}$$

Такие утверждения называются ***предикатами***.

Предикат с одной переменной, называется ***одноместным предикатом .***

Предикат с двумя переменной, называется ***двуместным предикатом .***

Предикат с ***n*** переменными, называется ***n - местным предикатом .***

Некоторые предикаты истинны для каждого возможного набора значений переменных

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$

для любого x истинно $S(x)$

$$\forall x S(x)$$

Символ $\forall x$ называется универсальным квантором (***квантором всеобщности***).

Читается “для любого *x*”, “для каждого *x*”.

Множество значений, которое может принимать *x*, называется ***универсом***, или ***предметной областью***.

Квантор всеобщности

Предикат

$$\forall x \; \forall y \;\; R(x, y)$$

Читается “для каждого *x*, для каждого у имеет место $R(x, y)$”, или “для каждого *x* и для каждого *y* имеет место $R(x, y)$ ”.

Квантор существования

Символ $\exists x$ называется квантором существования.

Выражение $\exists x$ относится к значению x из предметной области.

$$\exists x\, P(x)$$

Читается “существует x”, “найдется x”.

Построение отрицания

Если $D(x)$ – предикат, то высказывание $\forall x\, D(x)$ истинно только тогда, когда высказывание $D(x)$ истинно для любого x.

Отрицание для высказывания $\forall x\, D(x)$:

$$\sim\forall x\, D(x) \quad \text{или} \quad \exists x\, (\sim D(x))$$

Построение отрицания

Если $G(x)$ - предикат, отрицание существования такого x, что $G(x)$ истинно, записывается в виде

$$\sim(\exists x\, G(x)) \text{ или } \forall x(\sim G(x))$$

Тождества

$$\sim \forall x\, (D(x)) \equiv \exists x\, (\sim D(x))$$

$$\sim \exists x\, (G(x)) \equiv \forall x\, (\sim G(x))$$

Отрицание высказывания, содержащего более одного квантора, осуществляется путем последовательного рассмотрения каждого квантора, начиная с первого

Перейдем к обозначениям, принятым в булевой записи

Например, для отрицания $(\forall x)(\forall y)R(x,y)$ имеем

$$\sim(\forall x)(\forall y)R(x,y) \equiv \exists x\sim(\forall y)R(x,y) \equiv$$
$$\equiv (\exists x)(\exists y)\sim R(x,y)\,.$$

Аналогично,

$$\sim(\exists x)(\forall y)\,(\exists z)\,Q(x,y,z) \equiv (\forall x)\sim(\forall y)\,(\exists z)\,Q(x,y,z) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\exists y)\sim(\exists z)\,Q(x,y,z) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\exists y)(\forall z)\sim Q(x,y,z)\,.$$

Соотношения

1) ***Универсальная конкретизация***

   Из универсальности $\forall x\, P(x)$ следует истинность $P(a)$ для произвольного a из универса

2) ***Универсальное обобщение***

   Если произвольное a из универса обеспечивает истинность $P(a)$, следовательно $\forall x\, P(x)$ истинно.

3) ***Экзистенциональная конкретизация***

   Из истинности $\exists x\, P(x)$ следует, что существует конкретное b такое, что $P(b)$ истинно.

4) ***Экзистенциональное обобщение***

   Из существования конкретного c из универса, для которого $P(c)$ истинно, следует $\exists x\, P(x)$.

Теорема

Для произвольных предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, имеющих одну предметную область

а) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$;

б) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$;

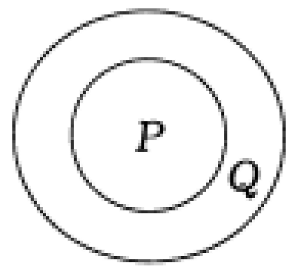
в) из $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ следует, что $\forall x(P(x) \vee Q(x))$;

г) из $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ следует, что $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$.

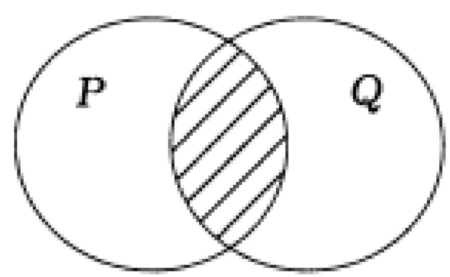
Диаграммы Эйлера

Для неформальной проверки правильности умозаключений, включающих утверждения типа “для всех”, “для каждого”.

Утверждение “Все *p* есть *q*”



Утверждение “Некоторые *p* есть *q*”



Пример

Умозаключение

Все студенты IIT выдающиеся

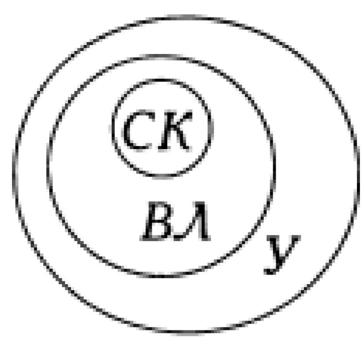
Все выдающиеся люди - ученые

Все [illegible]денты IIT - ученые

СК – студенты IIT

ВЛ – выдающиеся люди

У - ученые



Теорема

Если n^2 четно, то и n четно.

Доказательство: ***Доказательство методом контрапозиции***

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Т.е. доказательство $\sim q \rightarrow \sim p$ эквивалентно доказательству $p \rightarrow q$

Утверждение $\sim q \rightarrow \sim p$ означает:

Если n не является четным, то n^2 тоже не является четным.

Пусть n - целое число, не является четным

$$n = 2L + 1$$

$n^2 = (2L + 1)\,2 = 4L^2 + 4L + 1 = 2\,(2L^2 + 2L) + 1.$

Если $J = 2L^2 + 2L$

$$n^2 = 2J + 1$$

Ч.т.д.

Множество целых чисел Z содержит подмножество N положительных целых чисел.

Аксиомы:

1. Целое число 1 есть положительное целое число.
2. Множество положительных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. Если a и b - целые положительные числа, то $a + b$ и $a \cdot b$ – целые положительные числа.
3. (***Аксиома трихотомии***) Для каждого целого числа а истинным является одно из утверждений:

   а) a – положительное целое число;

   б) $a = 0$;

   в) $-a$ - отрицательное целое число.

Применение доказательства ***методом перебора***.

Выбор из трех возможностей обычно имеет вид

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \rightarrow (r \vee s \vee t) \\ & r \rightarrow q \\ & s \rightarrow q \\ & t \rightarrow q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Теорема

Пусть n - целое число. Тогда $n^2 \geq 0$.

Доказательство:

n – целое число, по аксиоме трихотомии либо положительное, либо отрицательное, либо равно 0.

Если n положительно, то $n \cdot n$ положительно по аксиоме 2, $n^2 \geq 0$.

Если отрицательно, то $n = -m$ для некоторого положительного целого m.

$n^2 = (-m)(-m) = m^2$ опять является положительным, $n^2 \geq 0$.

Если $n = 0$, то $n^2 = 0 \Rightarrow n^2 \geq 0$.

$n^2 \geq 0$. Ч.т.д.

Последний слайд лекции