Случайная величина

- ***Случайная величина*** – это переменная, которая принимает свои значения в зависимости от случайных обстоятельств.

- .***Дискретная случайная величин***
(точечная) принимает отдельные
- числовые значения (кубик: 1,2,3,4,5,6)
- ***Непрерывная случайная вел***
принимает любые значения из
некоторого интервала
(рост студентов).

Закон распределения случайной величины

Это связь между возможными **значениями** случайной величины и **вероятностями**, с которыми она эти значения принимает,

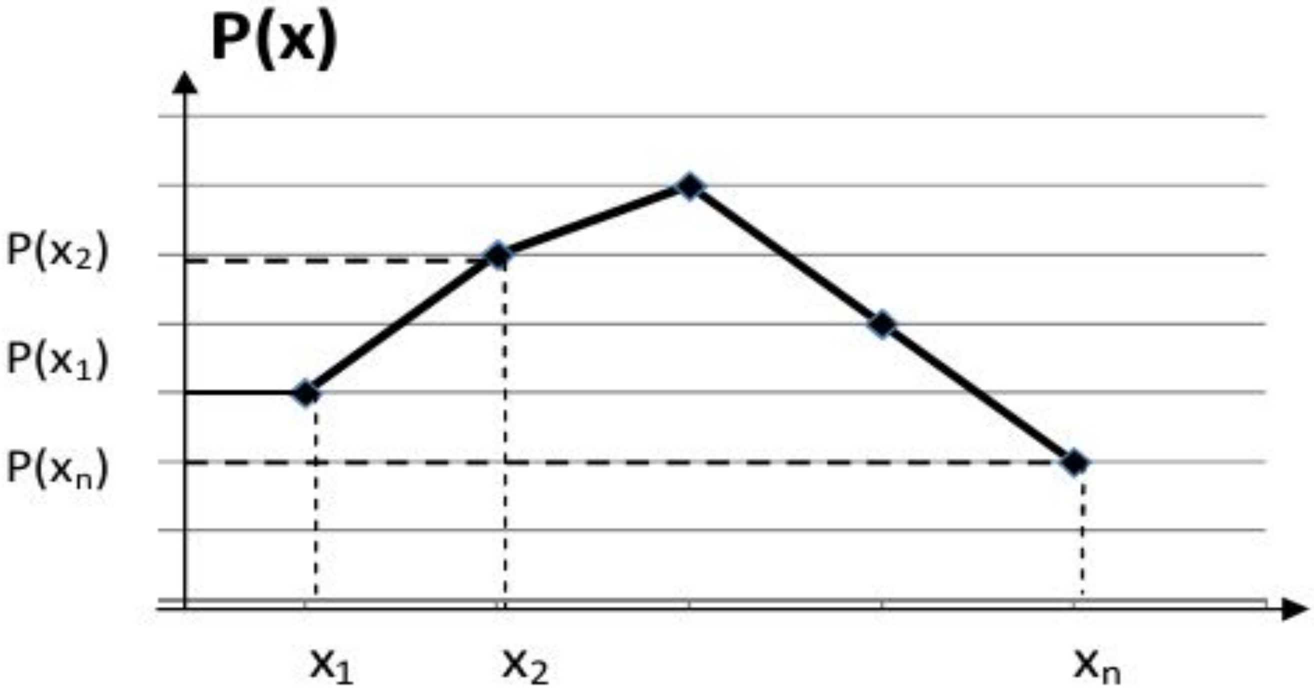
в виде 1**) таблицы** 2) **графика** 3) **функции распределения**

- ***<u>Дискретная случайная величина.</u>***
- **Таблица нормировки**

X	x_1	x_2	…	x_n
P(x)	$P(x_1)$	$P(x_2)$		$P(x_n)$

$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

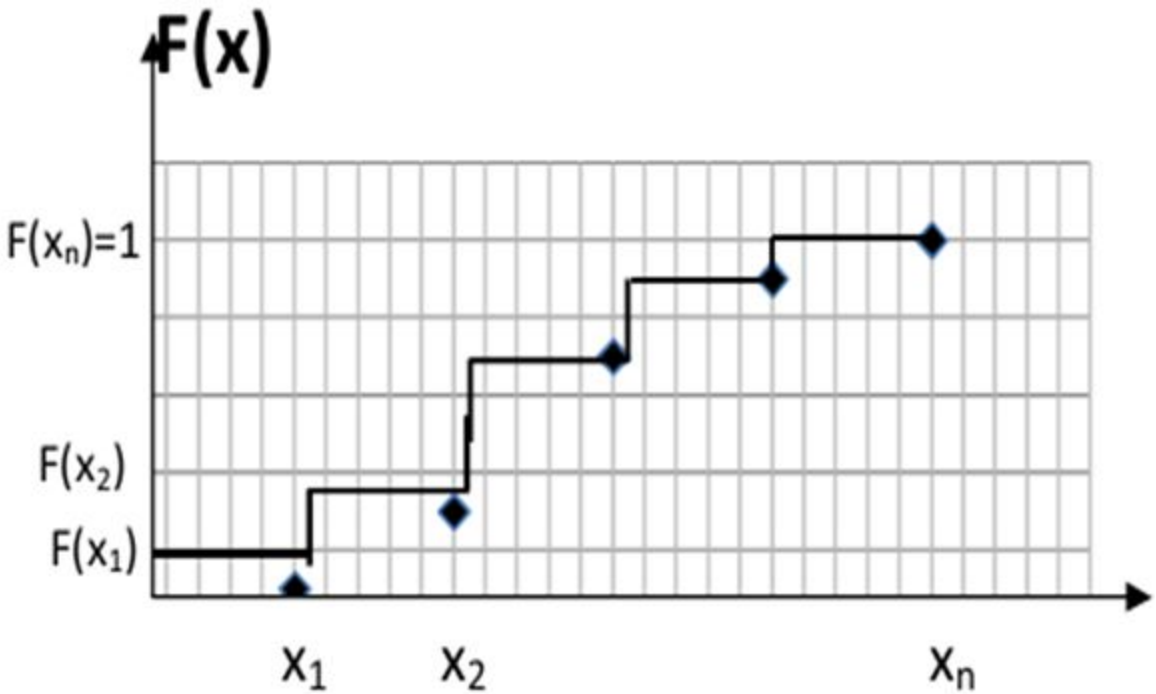
2).График: многоугольник распределения.



Функция распределения $F(x_0)$

- <u>*это вероятность*</u> того, что случайная величина X принимает значения, **меньшие или р**

$$F(x_0) = P(X \le x_0)$$



$$F(x_0) = \sum_{\substack{i \\ (x_i < x_0)}} P(x_i)$$

Свойства функции распределения

1). F(x) неубывающая: $F(x_2) \geq F(x_1)$ если $x_2 \geq x_1$

2). $F(-\infty)=0$; $F(+\infty)=1$

Вероятность попадания значения случайной величины в заданный интервал

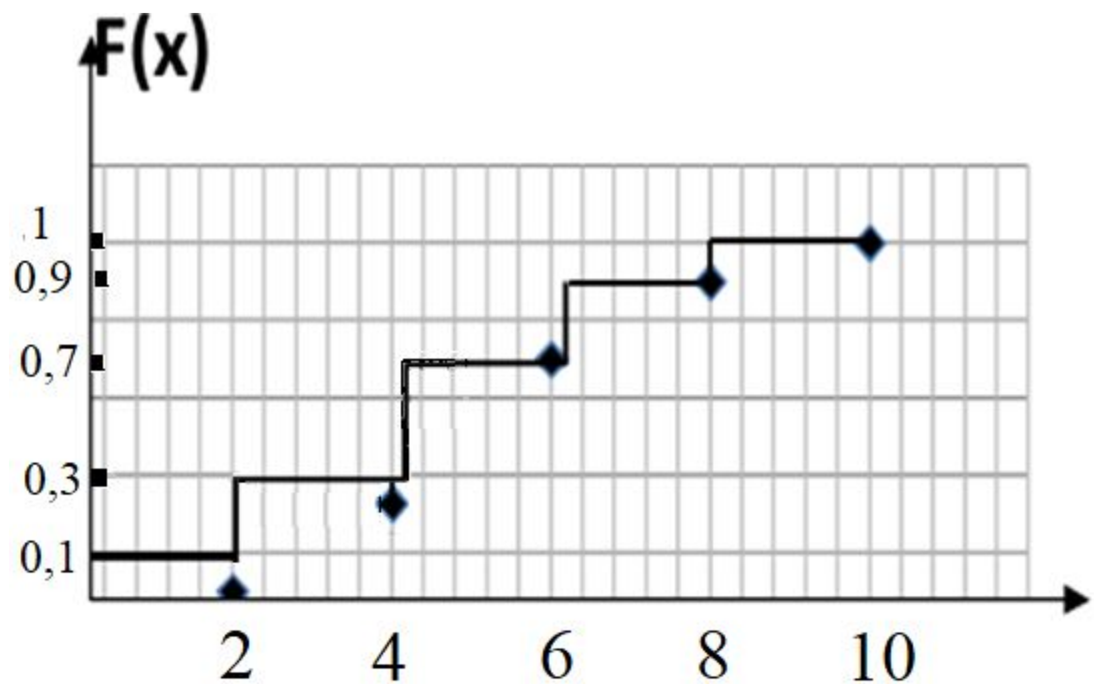
$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)}$$

Пример

X	2	4	6	8	10
P(x)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
F(x)	0,1	0,3	0,7	0,9	1

F(4)=P(X≤4)=P(2)+P(4)=0,1+0,2=0,3 **F(8)=P(X≤8**)=P(2)+P(4)+P(6)+P(8)==0,1+0,2+0,4+0,2=0,9

P(4<X≤8)=F(8)-F(4)=0,9-0,3=0,6

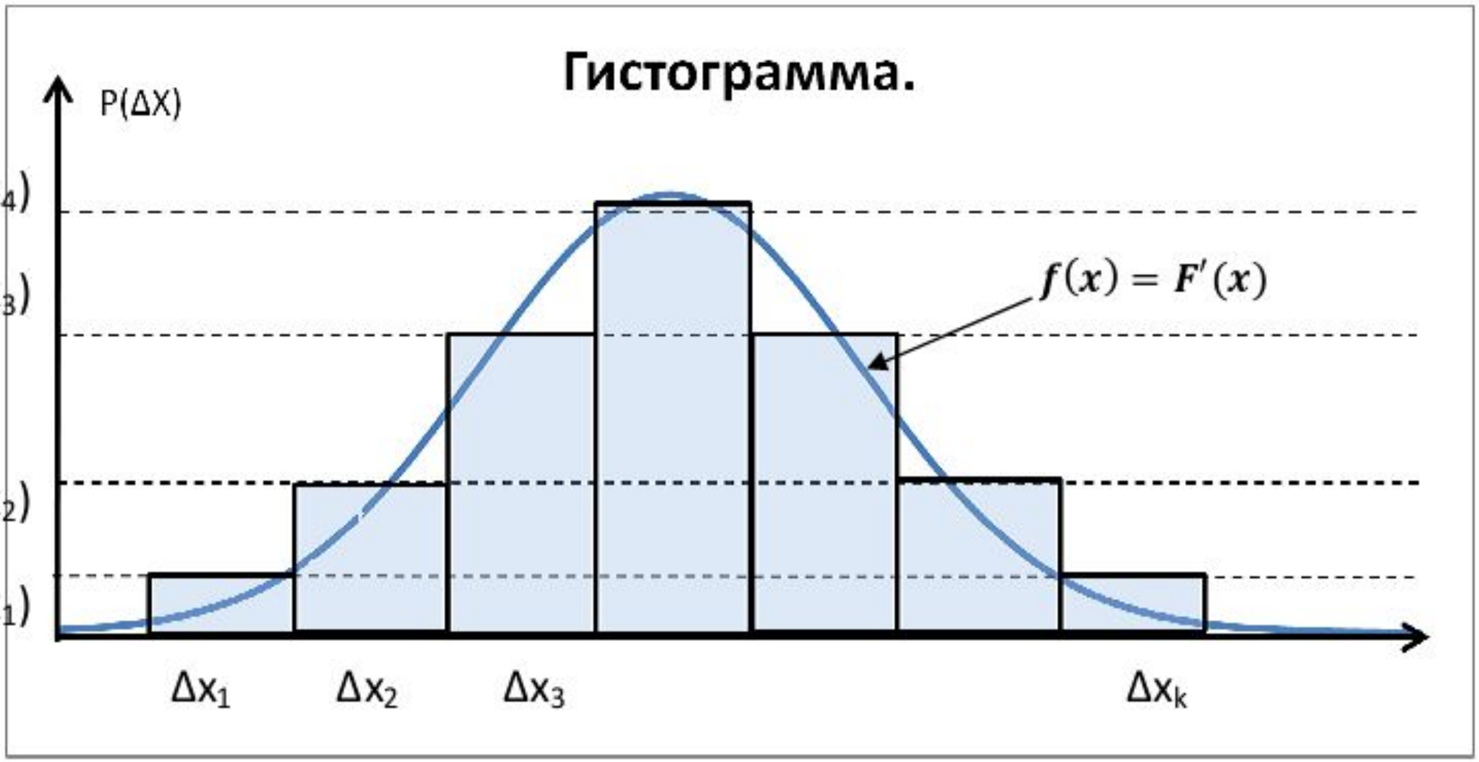


Непрерывная случайная величина

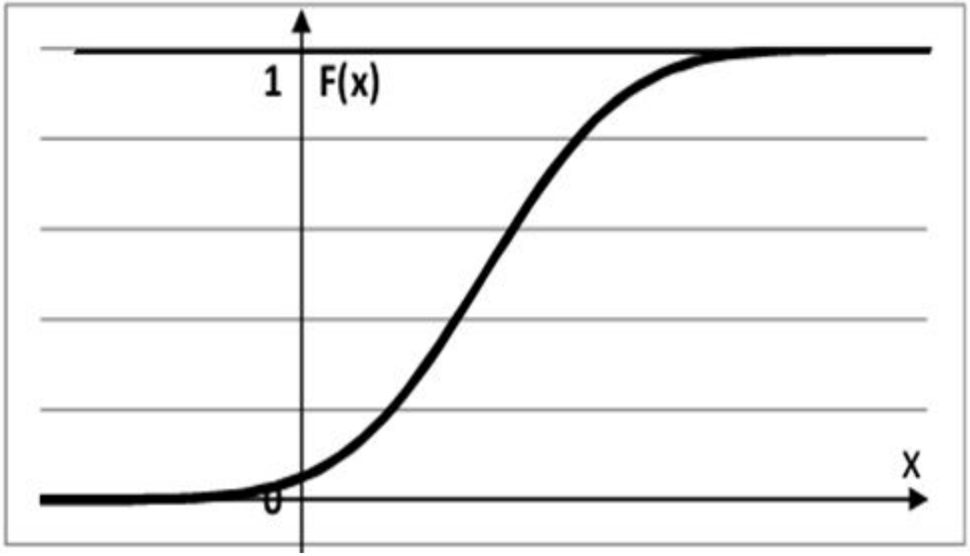
1) **Таблица***: Интервальный ряд распределения.*

X	**Δx_1**	**Δx_2**		**Δx_k**
$P(\Delta x)$	**$P(\Delta x_1)$**	**$P(\Delta x_2)$**		**$P(\Delta x_k)$**

2).График: Гистограмма.



3). Функция распределения. $\boxed{F(x_0) = P(X \le x_0)}$



1). F(x) неубывающая:

$F(x_2) \ge F(x_1)$ если $x_2 \ge x_1$

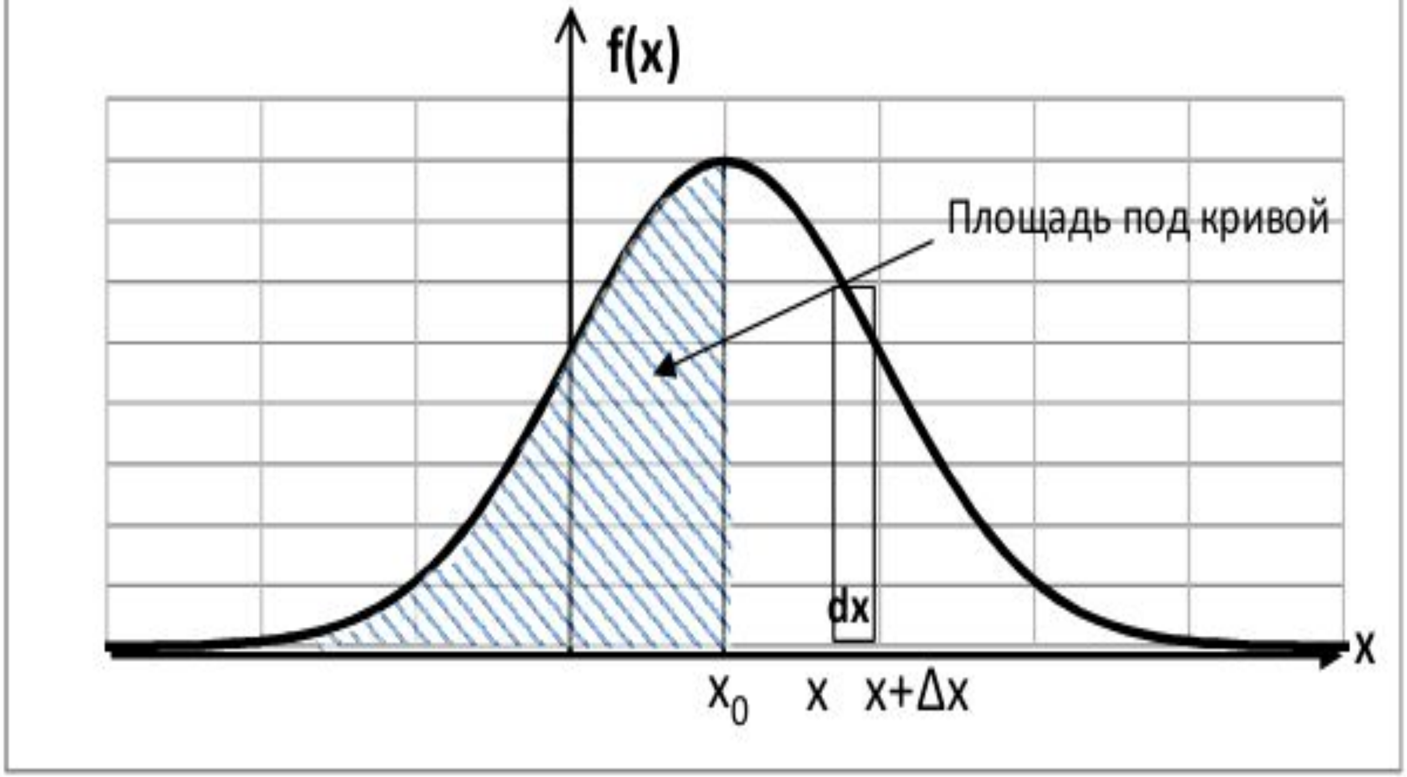
2). $F(-\infty)=0$; $F(+\infty)=1$

4). Функция плотности распределения f(x): (только для непрерывной случайной величины).

$$P(x < X \le x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$$

Найдём предел: $\boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)}$

Обозначим: . $\boxed{f(x) = F'(x)}$ это *функция плотности распределения*.



1). f(x) неотрицательная функция ($f(x) \geq 0$).

2). Вероятность попадания в элементарный интервал ***dx=(x+Δx)-x равна f(x)dx=dP.***

$$P(x < X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x) = F'(x) \cdot dx = f(x)dx = \boldsymbol{dP} -$$

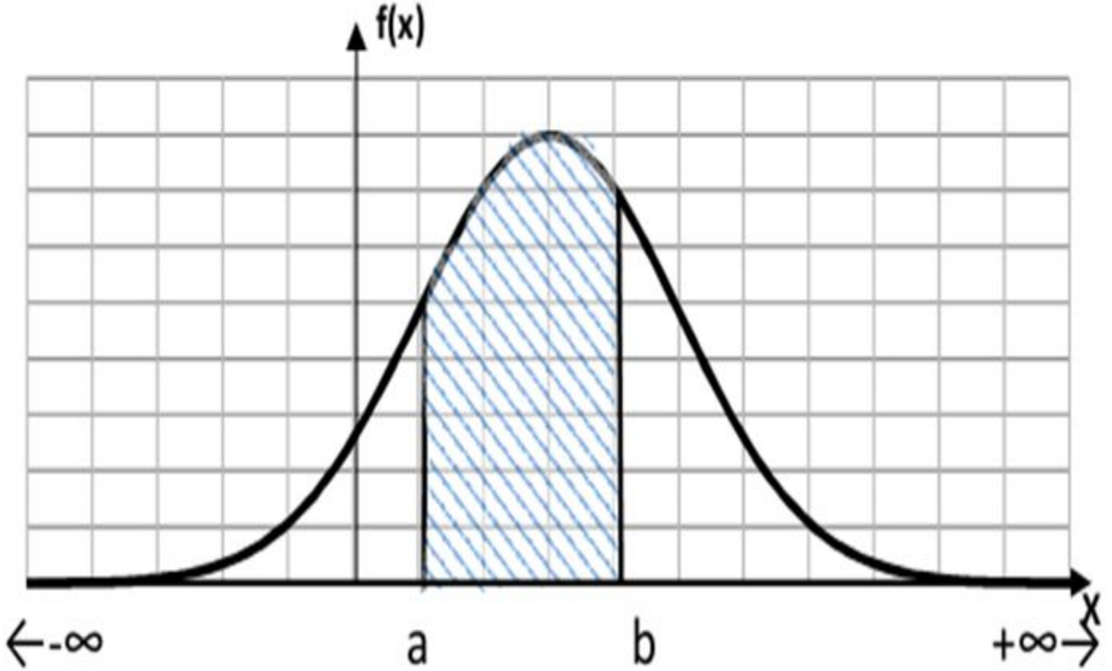
–элемент вероятности.

$$P(X \leq x_0) = F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$

3).Вероятность попадания случайной величины в интервал (a,b]:

$$\boxed{P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



Условие нормировки

Числовые характеристики случайной величины.

***1) Математическое ожидание*.** Это среднее значение случайной величины

- ***Дискретная величина***

- Пусть проведено **n** испытаний, случайная величина приняла значение
- x_1 -- m_1 раз, x_2 -- m_2 раз И так далее

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \cdots}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i)$$

$$При \quad n \to \infty \quad \overline{X} \to M[x] -$$

математическое ожидание

$$\boxed{M[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(x_i)}$$

Непрерывная величина

$$\boxed{M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx}$$

Числовые характеристики случайной величины.

- ***2) Дисперсия (рассеивание).*** Это математическое ожидание (среднее значение) квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания

Дискретная величина

$$D[X] = M(X - M[X])^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M[X])^2 \cdot P(x_i) =$$

$$= (x_1 - M[X])^2 \cdot p(x_1) + (x_2 - M[X])^2 \cdot p(x_2) + \cdots$$

Для удобства вычислений

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

Непрерывная величина

$$D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^2 \cdot f(x)\, dx$$

Числовые характеристики случайной величины

- Если X и Y независимые случайные величины,то

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]$$

Так как размерность дисперсии не совпадает с размерностью самой случайной величины (например, метры и квадратные метры), используют

3) Среднеквадратическое или стандартное отклонение

$$\boxed{\sigma\,[X]=\sqrt{D\,[X]}}$$

Законы распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение

- Пусть производится N независимых опытов(бросаем кубик 4 раза)
- В каждом опыте с одной и той же вероятностью *p* может наступить событие A (выпадание грани 6 ; p=1/6)
- Случайная величина - это число k наступ-лений события A в N опытах (грань 6 выпадает в 4 опытах 2 раза)

Биномиальное распределение

- Вероятность такой случайной величины вычисляют по формуле $P(N,k) = C_N^k \cdot p^k \cdot q^{N-k}$

где *q=1-p ;* $C_N^k = \dfrac{N!}{k! \cdot (N-k)!}$; *к!*=1•2• • •*к* факториал

$$P(4,2) = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-2} =$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^2 = \frac{150}{1296} = 0{,}11$$

Таблица биномиального распределения

k	0	1	...	N
P	P(N,0)	P(N,1)	...	P(N,N)

Задача кавалера де Мере

При четырехкратном бросании игральной кости что происходит чаще: выпадет шестерка хотя бы один раз или же шестерка не появится ни разу?

Эта одна из тех задач , с которыми кавалер де Мере обратился к Б.Паскалю в надежде узнать выигрышную стратегию.

Задача господина де Мере

$$P(N,k) = C_N^k \cdot p^k \cdot q^{N-k}$$

$$P(4,0) = \frac{4!}{0!\cdot 4!}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} = 0{,}482$$

$$\frac{1}{1296}$$

$$P(4,1) = \frac{4!}{01!\cdot(4-1)!}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-1} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296} = 0{,}385$$

Сколько раз из 4 бросаний вы-падет грань 6	0	1	2	3	4
Вероятность этого события	$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

Распределение Пуассона Редкие события

- **Если количество испытаний достаточно велико (N), а вероятность появления события в отдельно взятом испытании p весьма мала** (0,05-0,1 и меньше), то вероятность того, что в данной серии испытаний событие появится ровно **k** раз, можно приближенно вычислить **по формуле Пуассона**:,

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0,1,2...)$$

где $\lambda = N \cdot p$ параметр распределения- среднее число событий

- Если в биномиальном распределении зафиксировать k , а N увеличивать таким образом, чтобы произведение оставалось постоянным и равным , то получим распределение Пуассона
- Пример

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0,1,2...)$$

- На 1000 человек в среднем приходится 1 алкоголик. Найти вероятность того, что в городке с населением 8000 человек окажется 7 алкоголиков.
- Биномиальное распределение
- $P(8000,7) = C_{8000}^{7} \cdot (0{,}001)^7 \cdot (0{,}999)^{8000-7} =$
- Распределение Пуассона

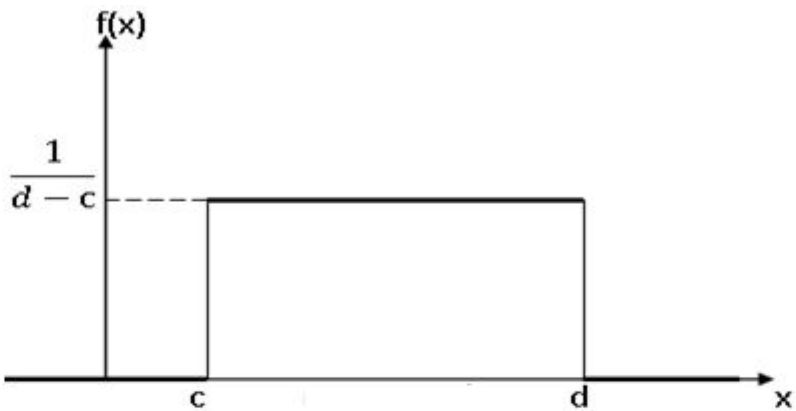
$$P_7 = \frac{8^7 \cdot e^{-8}}{7!} = 0{,}19$$

<u>Основные законы распределения непрерывной случайной величины</u>

<u>1.Равномерное или прямоугольное распределение.</u>

Случайная величина называется <u>*равномерно распределённой*</u> на интервале [c,d], если функция плотности распределения её на этом интервале

вна нулю.

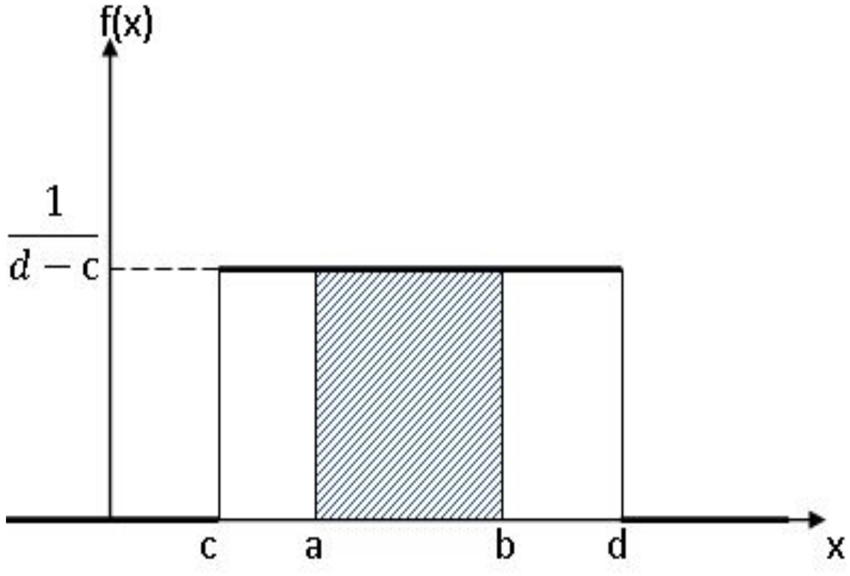


$$f(x)=\begin{cases} const, & \text{если } c \le x \le d \\ 0 & \text{если } x<c,\ x>d \end{cases}$$

$$\int_c^d f(x)\,dx=\int_c^d f(x)dx=\int_c^d const\,dx=const\int_c^d dx=const\cdot x\Big|_c^d=const\cdot(d-c)=1 \quad \Rightarrow$$

$$const=\frac{1}{d-c}$$

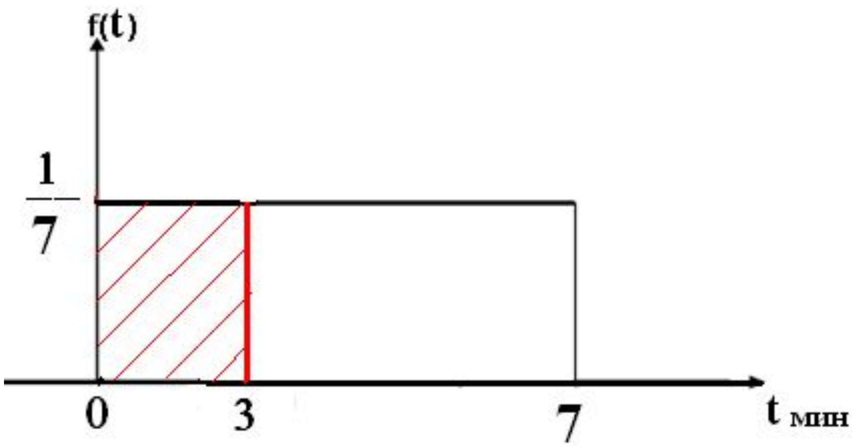
Равномерное распределение

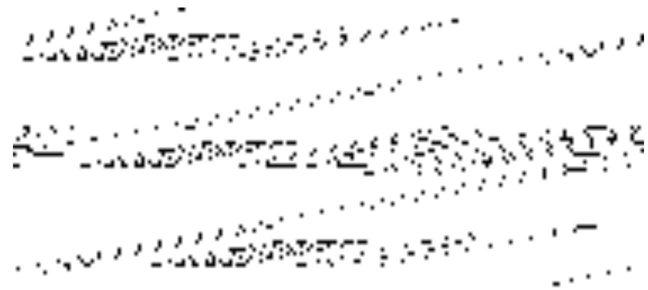


Вероятность того что X попадёт в интервал

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b \frac{1}{d-c}dx = \frac{1}{d-c} \cdot x\Big|_a^b = \frac{b-a}{d-c}$$

Больные попадают на флюорографическое обследование строго по расписанию работы кабинета и интервалом 7 минут. Составить функцию плотности случайной величины t – времени ожидании приглашения в кабинет больным, который наудачу подошёл к кабинету. Найти вероятность того, что он будет ждать приглашения не более 3 –х минут.





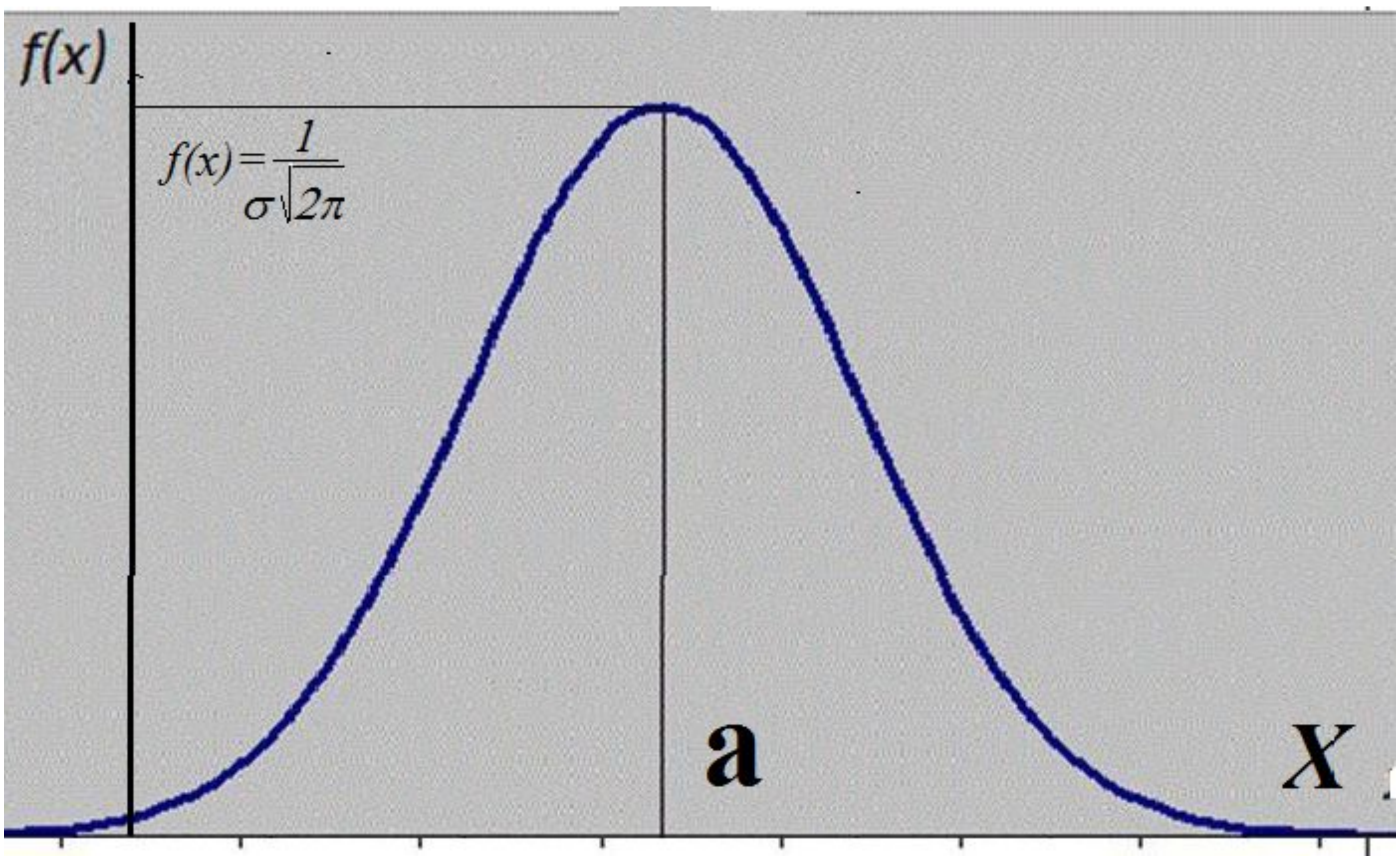
Вычислим вероятность того, что пассажир будет ожидать приглашения не более 3 минут:

$$P(0 \le t \le 3) = \frac{1}{7}\int_0^3 dt = \frac{1}{7}(t)\Big|_0^3 = \frac{1}{7}(3-0) = \frac{3}{7}$$

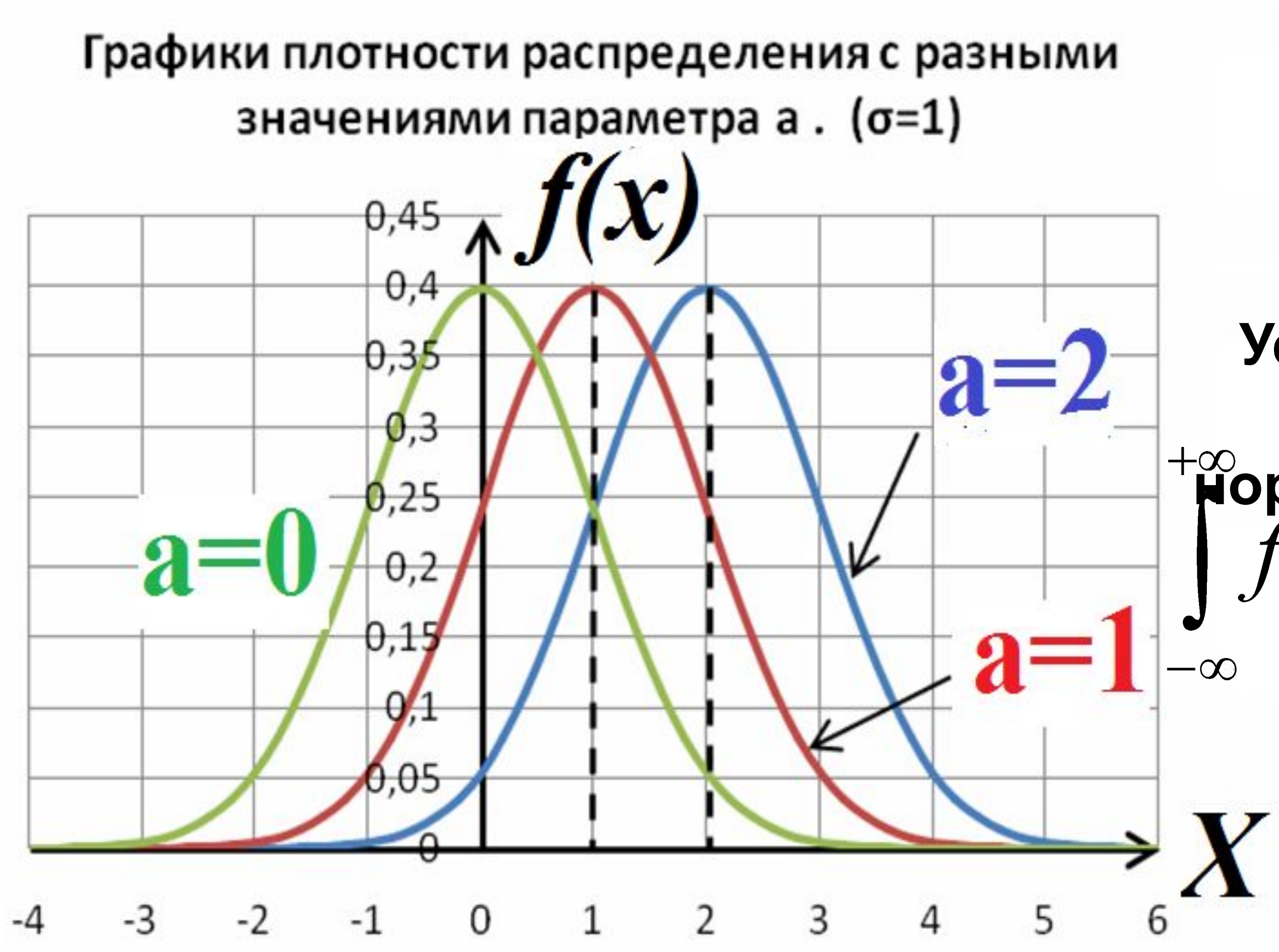
Нормальный закон распределения или распределение Гаусса

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

а и σ параметры распределения



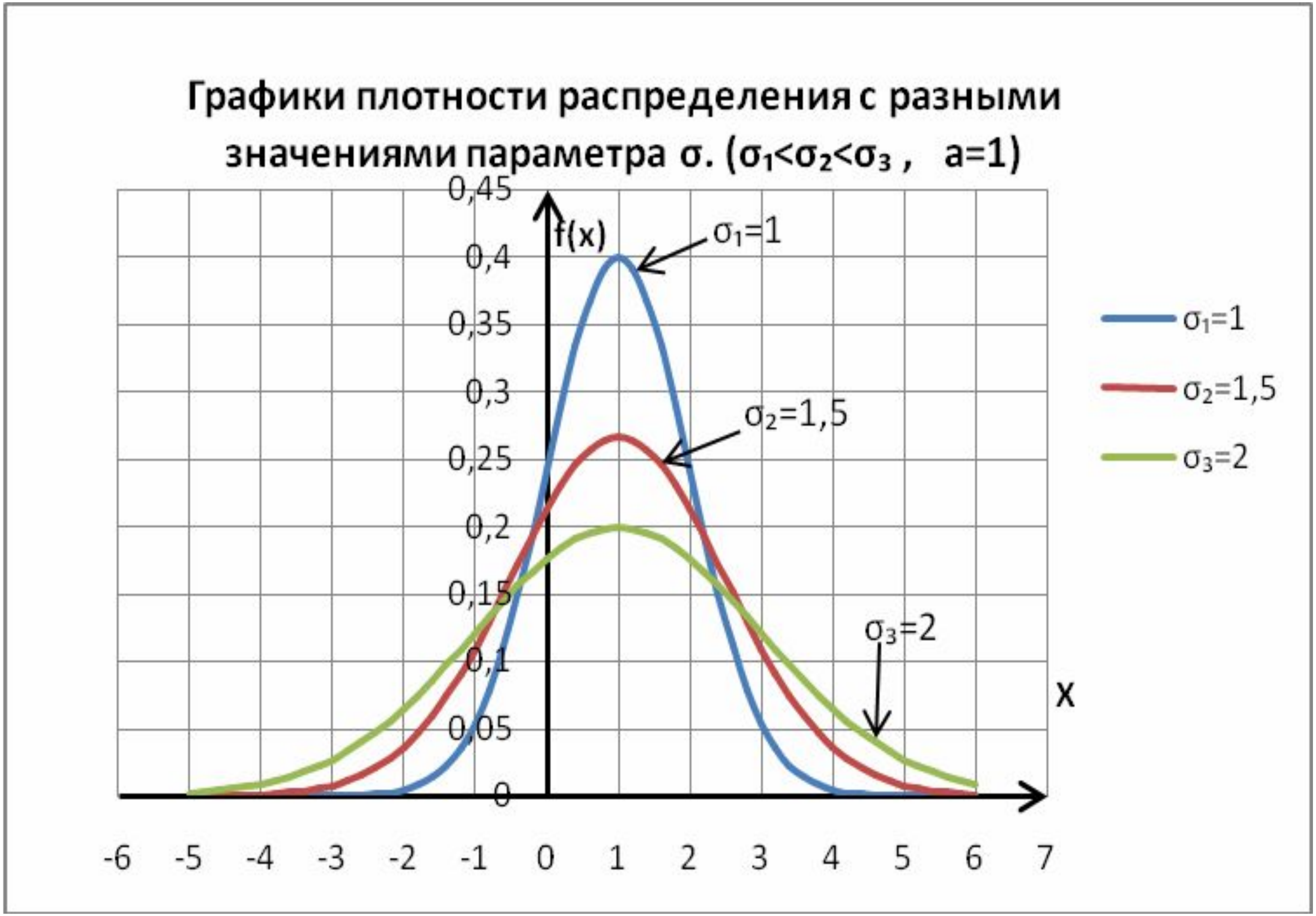
Нормальное распределение



Условие нормировк

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

С изменением параметра а кривая смещается по оси х:



С изменением параметра σ меняется форма кривой, но не площадь под ней

Параметры нормального распределения

математическое ожидание

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}\,dx = a$$

дисперсия.

$$D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^2\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}\,dx = \sigma^2$$

$\sigma = \sqrt{D}$ – ***среднее квадратическое отклонение***.

Нормальная функция распределения

$$F(x)=P(-\infty,x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}dx=$$

- *Введём замену переменной:*

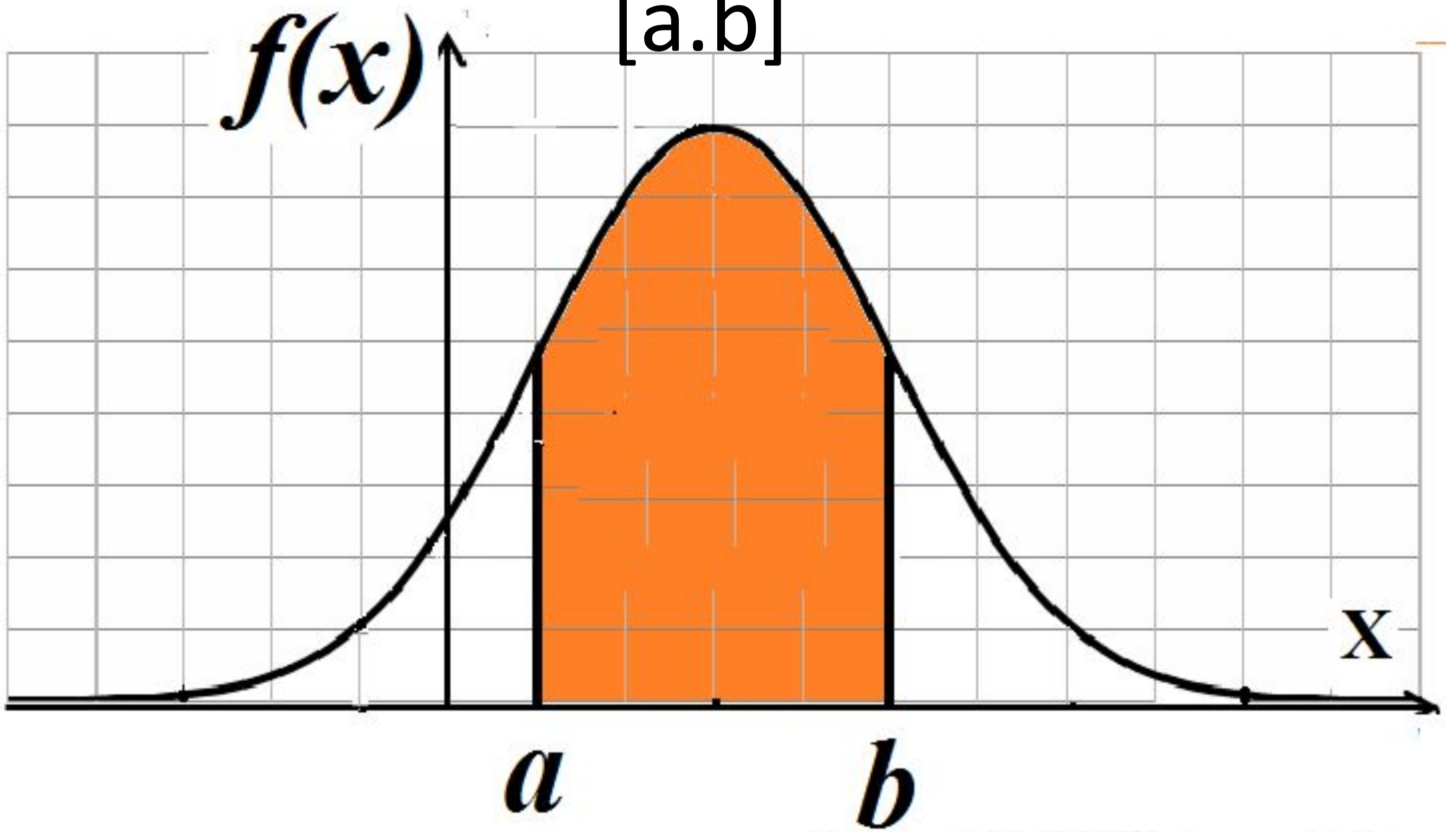
$$t=\frac{x-a}{\sigma}=\frac{x-M[X]}{\sigma[X]} \qquad dt=\frac{1}{\sigma}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-t^2}{2}}dt=\Phi(t)=\Phi\left(\frac{x-M[X]}{\sigma[X]}\right)$$

Свойства функции Ф(t)

$$\Phi(0)=0{,}5;\ \Phi(-\infty)=0;\ \Phi(+\infty)=1;\ \Phi(-t)=1-\Phi(t)$$

Вероятность попадания значений случайной величины в интервал [a.b]



$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - M[X]}{\sigma[X]}\right) - \Phi\left(\frac{a - M[X]}{\sigma[X]}\right)$$

Таблицы нормального распределения

t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)
0	0,5	0,3	0,6179	0,6	0,7257	0,9	0,8159
0,01	0,504	0,31	0,6217	0,61	0,7291	0,91	0,8186
0,02	0,508	0,32	0,6255	0,62	0,7324	0,92	0,8212
0,03	0,512	0,33	0,6293	0,63	0,7357	0,93	0,8238
0,04	0,516	0,34	0,6331	0,64	0,7389	0,94	0,8264
0,05	0,5199	0,35	0,6368	0,65	0,7422	0,95	0,8289
0,06	0,5239	0,36	0,6406	0,66	0,7454	0,96	0,8315
0,07	0,5279	0,37	0,6443	0,67	0,7486	0,97	0,834
0,08	0,5319	0,38	0,648	0,68	0,7517	0,98	0,8365
0,09	0,5359	0,39	0,6517	0,69	0,7549	0,99	0,8389
0,1	0,5398	0,4	0,6554	0,7	0,758	1	0,8413
0,11	0,5438	0,41	0,6591	0,71	0,7611	1,01	0,8438
0,12	0,5478	0,42	0,6628	0,72	0,7642	1,02	0,8461
0,13	0,5517	0,43	0,6664	0,73	0,7673	1,03	0,8485
0,14	0,5557	0,44	0,67	0,74	0,7704	1,04	0,8508
0,15	0,5596	0,45	0,6736	0,75	0,7734	1,05	0,8531
0,16	0,5636	0,46	0,6772	0,76	0,7764	1,06	0,8554
0,17	0,5675	0,47	0,6808	0,77	0,7794	1,07	0,8577
0,18	0,5714	0,48	0,6844	0,78	0,7823	1,08	0,8599
0,19	0,5753	0,49	0,6879	0,79	0,7852	1,09	0,8621
0,2	0,5793	0,5	0,6915	0,8	0,7881	1,1	0,8643
0,21	0,5832	0,51	0,695	0,81	0,791	1,11	0,8665
0,22	0,5871	0,52	0,6985	0,82	0,7939	1,12	0,8686
0,23	0,591	0,53	0,7019	0,83	0,7967	1,13	0,8708
0,24	0,5948	0,54	0,7054	0,84	0,7995	1,14	0,8729
0,25	0,5987	0,55	0,7088	0,85	0,8023	1,15	0,8749
0,26	0,6026	0,56	0,7123	0,86	0,8051	1,16	0,877
0,27	0,6064	0,57	0,7157	0,87	0,8078	1,17	0,879
0,28	0,6103	0,58	0,719	0,88	0,8106	1,18	0,881
0,29	0,6141	0,59	0,7224	0,89	0,8133	1,19	0,883

Пример 1

- Случайная величина распределена по нормальному закону. Параметры распределения: $a=4$, $\sigma=3$. Найти вероятность того, что случайная величина попадёт в интервал от (- ∞) до 5

$$t_2 = \frac{x-a}{\sigma} = \frac{5-4}{3} = 0{,}33 \qquad t_1 = \frac{-\infty-4}{3} = -\infty$$

$$P(-\infty \le x \le 5) = F(5) - F(-\infty) = \Phi\left(\frac{5-4}{3}\right) - \Phi(-\infty) =$$

$$\Phi(0{,}33) - 0 = \boxed{0{,}62}$$

Пример 2

Случайная величина распределена по нормально-му закону. Параметры распределения:a=4, $\sigma = 3$

- Чему равно x, если

$$P(X \le x) = 0{,}53$$

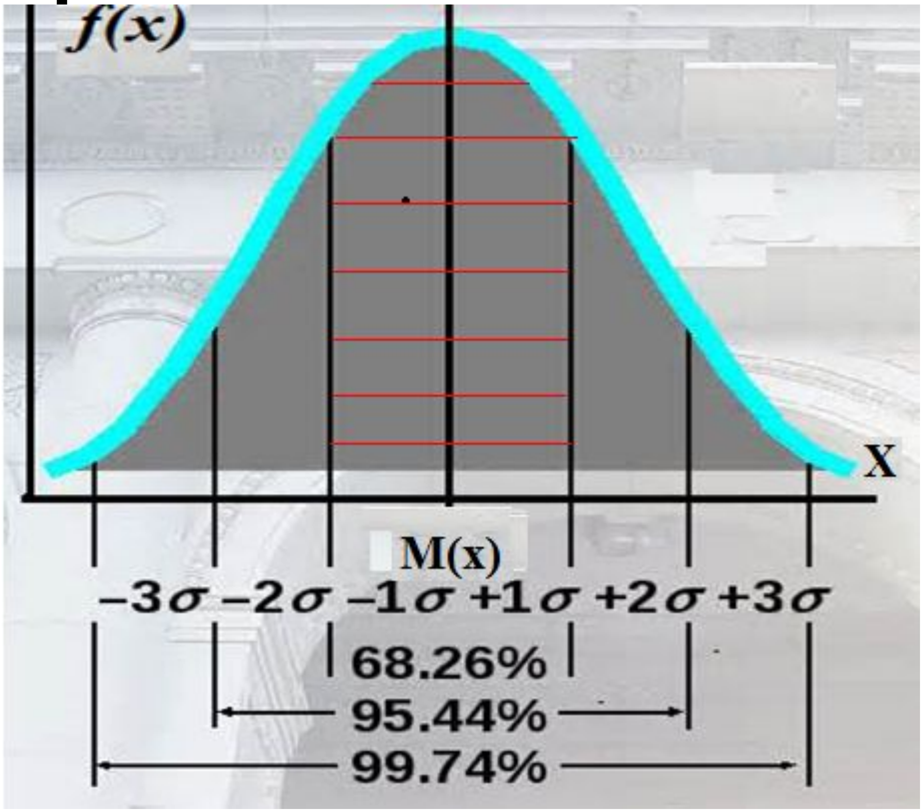
$$P(X \le x) = F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-4}{3}\right) = 0{,}53$$

- По таблице находим: для

$$\Phi(t) = 0{,}53 \Rightarrow t \approx 0{,}08 \Rightarrow \quad \frac{x-4}{3} = 0{,}08$$

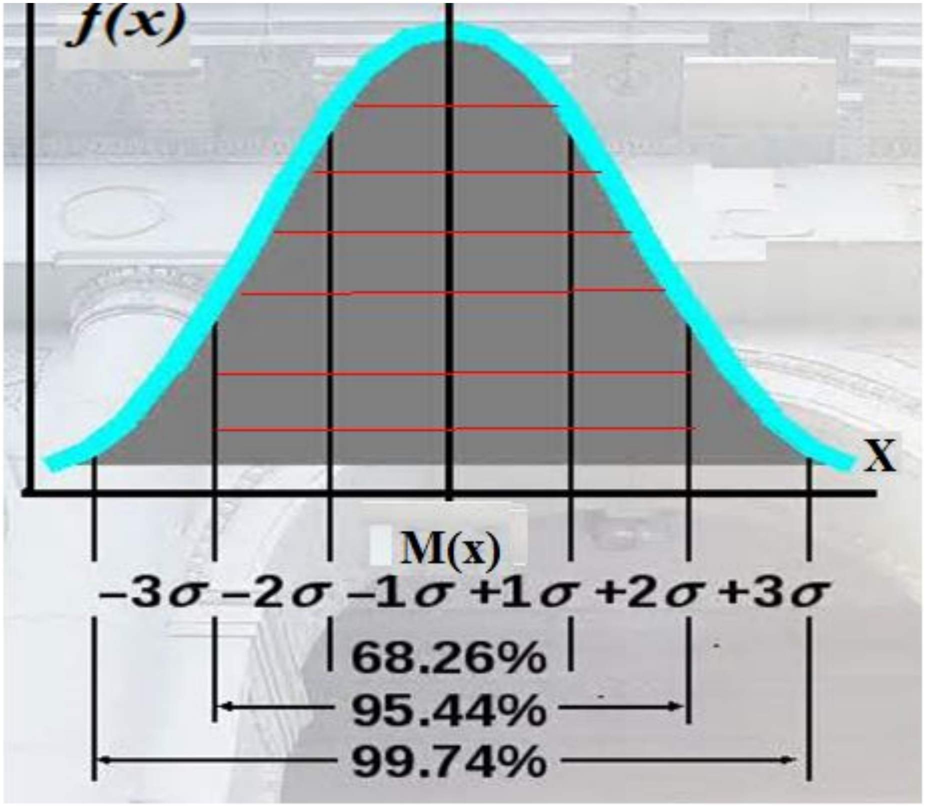
$$0{,}24 = x - 4 \Rightarrow \qquad \boxed{x = 4{,}24}$$

Правило 3-х сигм



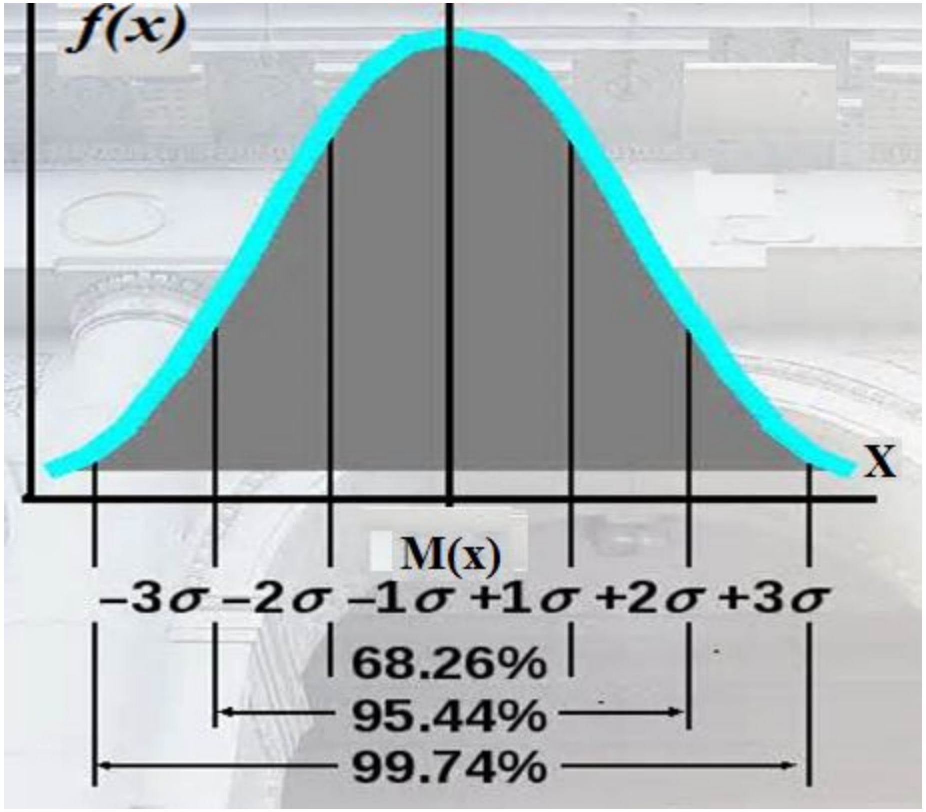
$$P\left(M[X]-\sigma[X]\le x\le M[X]+\sigma[X]\right)=\Phi\left(\frac{M[X]+\sigma[X]-M[X]}{\sigma[X]}\right)-\Phi\left(\frac{M[X]-\sigma[X]-M[X]}{\sigma[X]}\right)=$$

$$=\Phi(+1)-\Phi(-1)=\Phi(+1)-\left(1-\Phi(+1)\right)=2\cdot\Phi(+1)-1=2\cdot 0,84-1=0,68$$



$$P\left(M[X]-2\sigma[X]\le x\le M[X]+2\sigma[X]\right)=\Phi\left(\frac{M[X]+2\sigma[X]-M[X]}{\sigma[X]}\right)-\Phi\left(\frac{M[X]-2\sigma[X]-M[X]}{\sigma[X]}\right)=$$

$$=\Phi(+2)-\Phi(-2)=\Phi(+2)-\left(1-\Phi(+2)\right)=2\cdot\Phi(+2)-1=2\cdot 0{,}977-1=0{,}954$$



$$P(\mathrm{M}[X]-3\sigma[X]\le x\le \mathrm{M}[X]+3\sigma[X])=\Phi\left(\frac{\mathrm{M}[X]+3\sigma[X]-M[X]}{\sigma[X]}\right)-\Phi\left(\frac{\mathrm{M}[X]-3\sigma[X]-M[X]}{\sigma[X]}\right)=$$

$$=\Phi(3)-\Phi(-3)=\Phi(+3)-\big(1-\Phi(+3)\big)=2\cdot\Phi(+3)-1=2\cdot 0{,}9986-1=\mathbf{0{,}9972}$$

Математическая статистика.

Статистическая совокупность – это множество объектов, обладающих общими признаками, которые являются наиболее важными (типичными) для характеристики этих объектов.

Объём совокупности **n** –это число членов совокупности

Генеральная совокупность – это совокупность всех объектов, которые имеют типичную характеристику или признак. Это все возможные значения случайной величины. Объём генеральной совокупности). $n \to \infty$

Выборочная совокупность (выборка) – это отобранная тем или иным способом часть генеральной совокупности

Варианта – это числовое значение изучаемого признака (отдельные значения случайной величины)

Основные задачи, которые стоят перед математической статистикой

- Определение закона распределения случайной величины по имеющимся статистическим данным (по выборке – закон распределения для всей генеральной совокупности).
- Определение неизвестных параметров распределения (по выборке оценить параметры генеральной совокупности).
- Задача проверки правдоподобия выдвигаемых статистических гипотез

Сбор экспериментальных данных.

1) Получаем ***статистический ряд*** – совокупность числовых данных или выборку объёмом **n**:

$$X\{x_1, \quad x_2, \dots x_n\}$$

2) Производим ранжирование -- это расположение всех имеющихся вариант по возрастанию

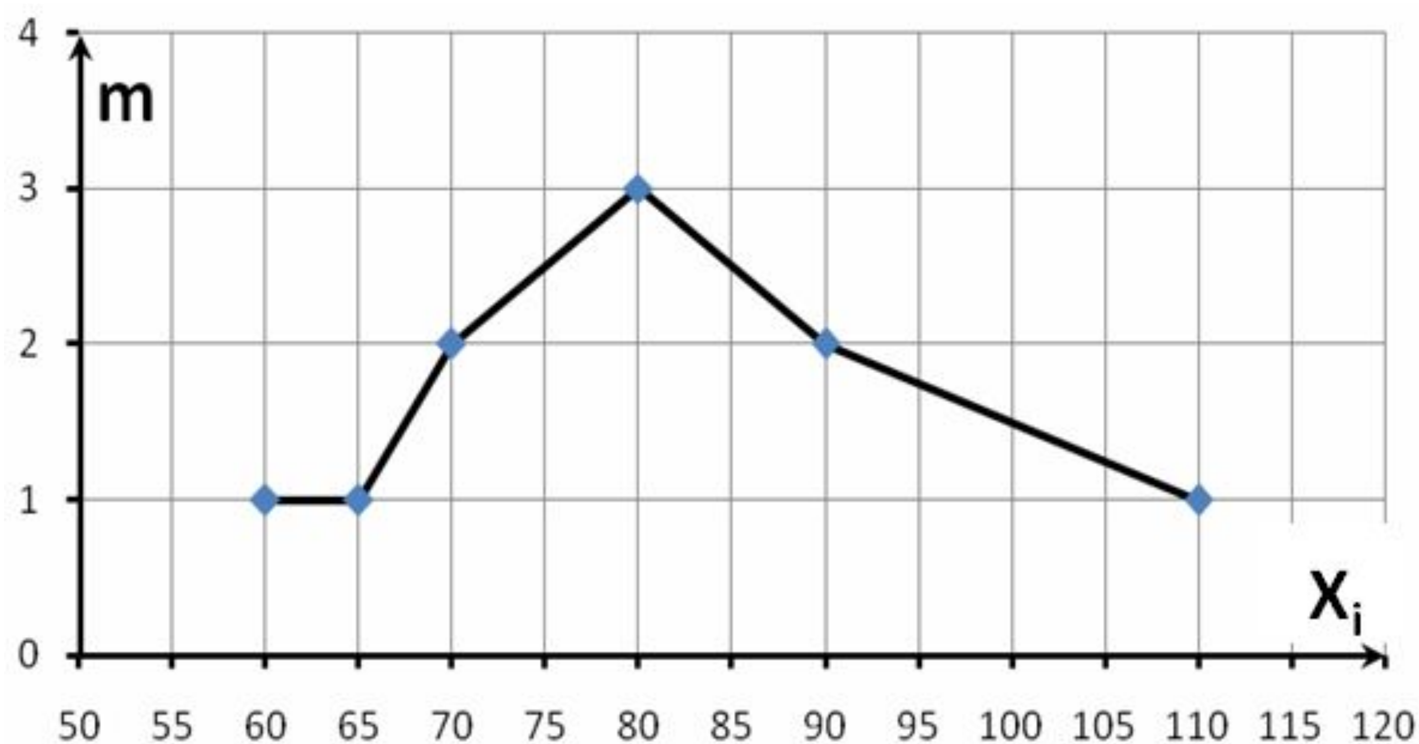
Пример: при измерении частоты пульса у 10 пациентов получены следующие результаты:
90, 110, 65, 80, 90, 60, 70, 80, 70, 80
Ранжированный ряд имеет вид: 60, 65, 70, 70, 80, 80, 80, 90, 90, 110.

3) Составляем вариационный ряд (статистическое распределение)

Дискретный вариационный ряд это таблица, состоящая из двух строк : конкретных значений вариант x_i и частот m_i (сколько раз случайная величина принимала данное значение).

x_i	60	65	70	80	90	110
m_i	1	1	2	3	2	1

<u>*полигон частот*</u>



***Для непрерывной* случайной величины** составляется интервальный вариационный ряд:

Первая строка - интервалы изменения признака,
Вторая строка- частоты, относящиеся к данным интервалам

. Число интервалов можно приблизительно определить по формулам:

$$k = \log_2 n$$ -берётся целая часть числа.

$$k = 5 \cdot \ln n$$ –(формула Брукса, 1963

Длина интервала ΔX рассчитывается по формуле: $\boxed{\Delta x = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{k}}$

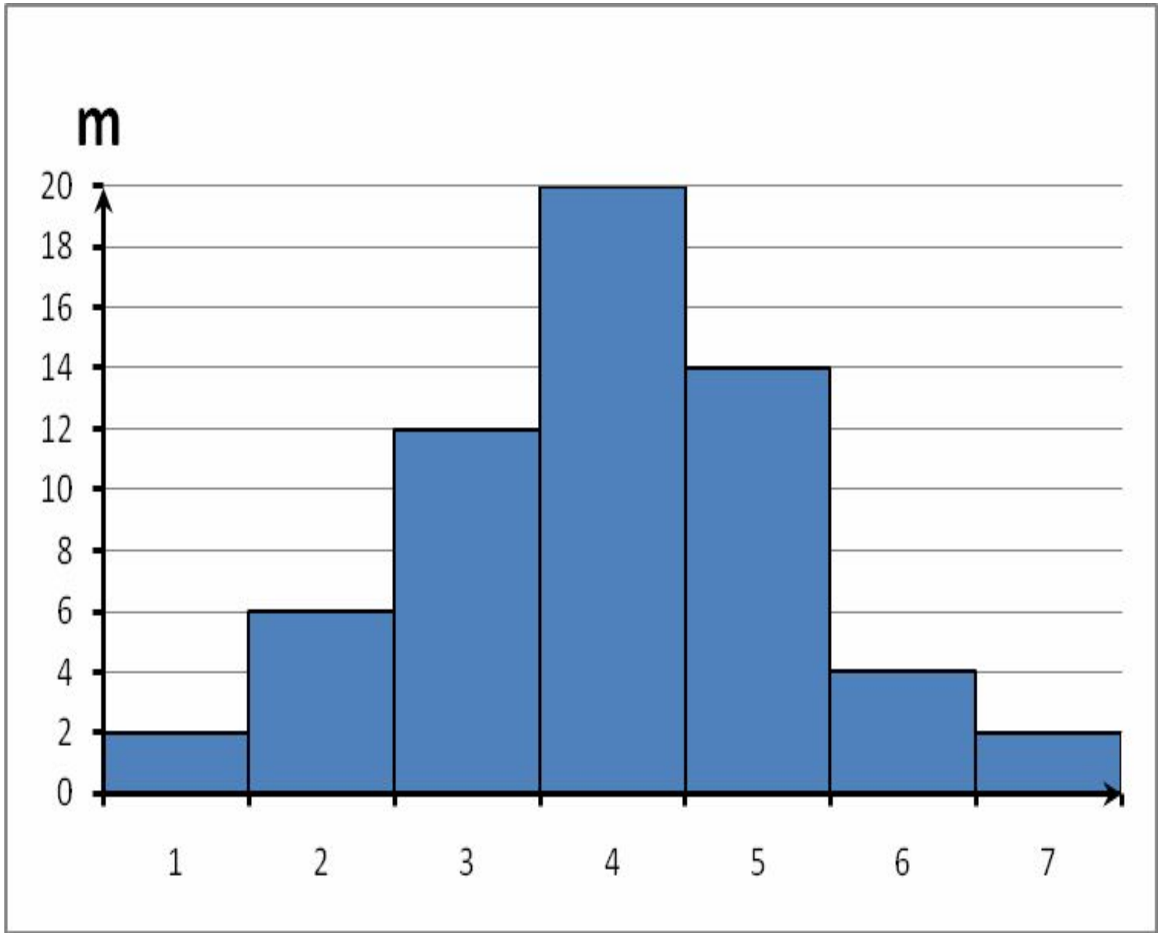
<u>*Пример.*</u> Анализ веса 60-ти новорожденных дал следующие результаты:min вес 1,5 кг, max вес 5 кг.

к=7

$$\Delta x = \frac{5\text{кг} - 1{,}5\text{кг}}{7} = 0{,}5\ \text{кг}$$

Интервальный вариационный ряд:

вес x_i (кг)	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5	4,5-5
число новорожденных m_i	2	6	12	20	14	4	2



Гистограмма:

Статистические характеристики совокупности

Генеральная совокупность (n→∞)

Математическое ожидание

$$M[X]=\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(x_i)=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Дисперсия

$$D[X]=\sum_{i=1}^{k}(x_i-M[X])^2 \cdot P(x_i)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2}{n}$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$$

Выборка (n-конечно)

Среднее арифметическое

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Оценка дисперсии

$$S_n^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

Оценка среднеквадратического отклонения

$$S_n=\sqrt{S_n^2}$$

Ошибка среднего арифметического

Извлечём из генеральной совокупности N выборок одинакового объёма n, тогда их средние арифметические сами будут являться значениями случайной величины и имеют отклонения от истинного значения M[X].

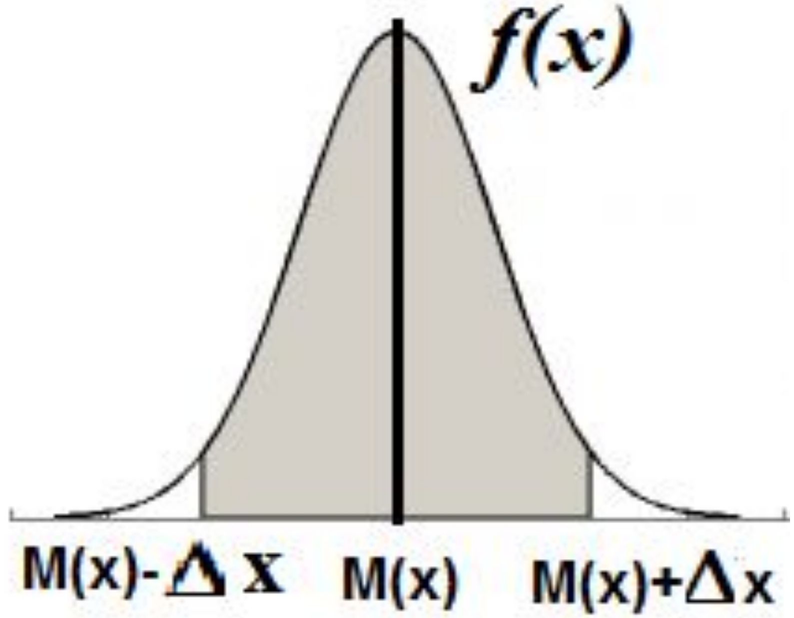
$$\overline{X}\left\{\overline{x}_1 . \overline{x}_2 , \ldots \overline{x}_N \right\}$$

Ошибка среднего арифметического $S_{\overline{x}}$ показывает насколько близко получаемое по выборке среднее арифметическое значение, приближается к истинному среднему M[X] генеральной совокупности

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n \cdot \left(n-1\right)}}$$

Интервальные оценки параметров
Доверительный интервал

$$M[X]-\Delta x \le \bar{x} \le M[X]\pm\Delta x$$



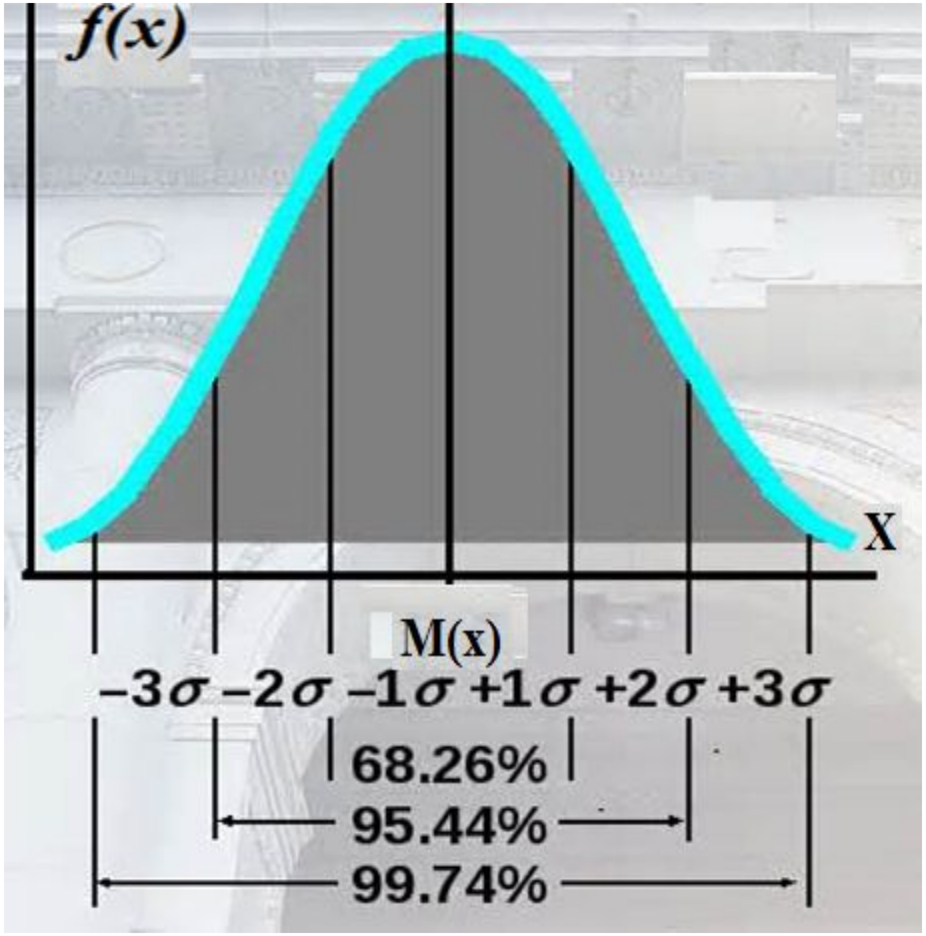
$$\int_{M[X]-\Delta x}^{M[X]+\Delta x} f(x)dx = F(M[X]+\Delta x)-F(M[X]-\Delta x)=$$

$$=P(M[X]-\Delta x \le \bar{x} \le M[X]+\Delta x)$$

Доверительным интервалом какого либо параметра, называют такой интервал, о котором можно сказать, что с вероятностью $P_Д$ он содержит в себе этот параметр.

Доверительные интервалы для нормального распределения

P_D ($\alpha=1-P_D$)	$\Delta X=t\cdot\sigma$ ($N\rightarrow\infty$)
0,95 (0,05)	$2\cdot\sigma$
0,99 (0,01)	$3\cdot\sigma$

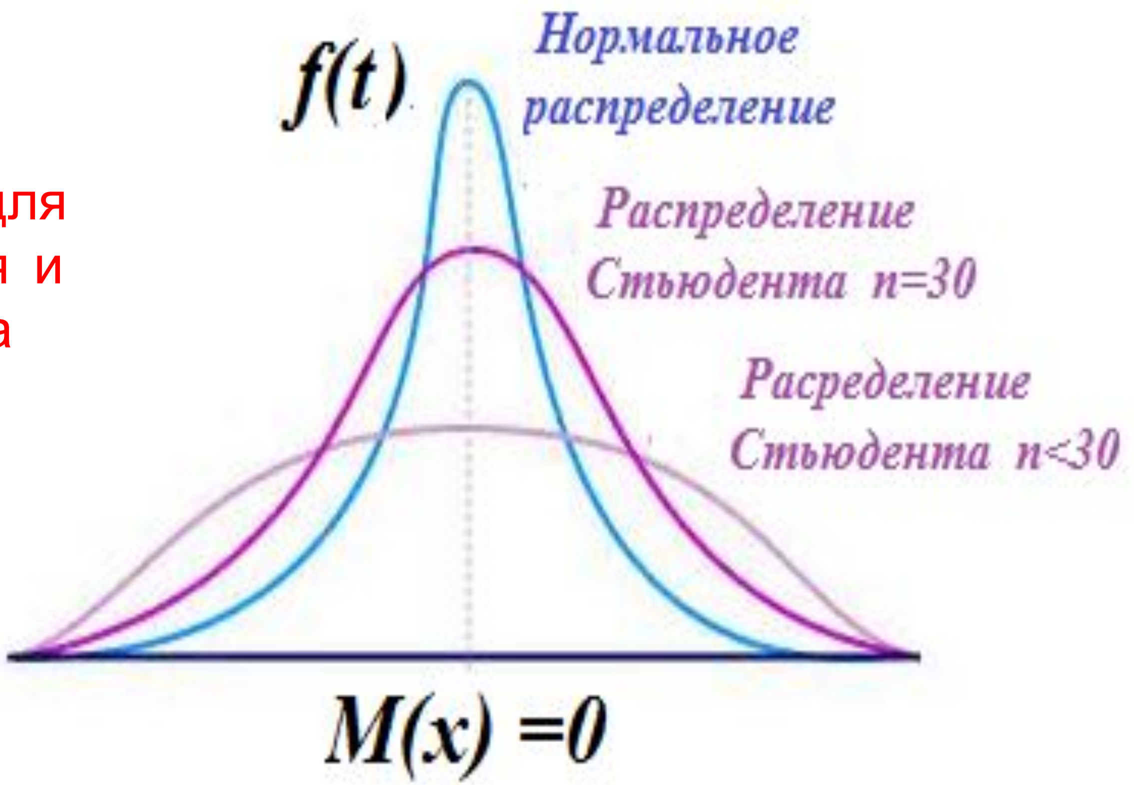


уровень значимости $\alpha=1-P_Д$.

Распределение Стьюдента (малые выборки)

Доверительные интервалы для нормального распределения и распределения Стьюдента

P_D (α=1-P_D)	$\Delta X = t \cdot \sigma$ ($N \to \infty$)	$\Delta X = \mathbf{t_{St}} \cdot S_{\overline{X}}$ **(N=4)**
0,95 (0,05)	$2 \cdot \sigma$	$2{,}78 \cdot S_{\overline{X}}$
0,99 (0,01)	$3 \cdot \sigma$	$4.60 \cdot S_{\overline{X}}$



$$\Delta X = t_{St}(P_D, n) \cdot S_{\bar{x}} = t_{St}(P_D, n) \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

<u>Пример:</u> При определении концентрации белка в растворе были получены следующие результаты (в мг/л):110, 112, 115, 113,114. Найти 1) **среднее значение**,2) **стандартное отклонение** и 3)**доверительный** интервал для Рд=0.95.

$$\bar{x} = \frac{110 + 112 + 115 + 113 + 114}{5} = 112{,}8$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n\cdot(n-1)}} =$$

$$\sqrt{\frac{(110-112{,}8)^2 + (112-112{,}8)^2 + (115-112{,}8)^2 + (113-112{,}8)^2 + (114-112{,}8)^2}{5\cdot(5-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2{,}8^2 + 0{,}8^2 + 2{,}2^2 + 0{,}2^2 + 1{,}2^2}{5\cdot 4}} = \sqrt{\frac{7{,}84 + 0{,}64 + 4{,}84 + 0{,}04 + 1{,}44}{5\cdot 4}} = \sqrt{\frac{14{,}8}{20}} = 0{,}86$$

$$\Delta x_D = t_{st}\cdot S_{\bar{x}} = 2{,}8\cdot 0{,}86 = 2{,}4$$

$$\underline{M[X] = 112{,}8 \pm 2{,}4\ (\text{мг}/\text{л}) \quad \text{для } P_D = 0{,}95}$$

Алгоритм обработки результатов прямых измерений

- 1) Провести серию измерений $\{x_1, x_2, \ldots x_N\}, \quad N \geq 3.$ не менее трех
- 2) Найти среднее арифметическое .

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}.$$

- 3) Вычислить доверительный интервал

$$\Delta x_{сл} = t_{St} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N \cdot (N-1)}}$$

для заданной доверительной вероятности, например, $P_D = 0{,}95$.

Алгоритм обработки результатов прямых измерений

- 4) Найти систематическую ошибку.
- а). если указан класс точности прибора:

$$Кл.т. = \frac{\Delta x_{сист}}{x_{шкалы}} \cdot 100\% \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{сист} = \frac{Кл.т. \cdot x_{шкалы}}{100\%}$$

где $X_{шкалы}$ – это предел шкалы (максимальное значение на шкале)

б). если класс точности не указан (например, линейка или термометр) $\Delta x_{сист} = \frac{\text{ЦЕНА ДЕЛЕНИЯ}}{2}$

5) Вычислить общую ошибку: $\Delta x_{общ} = \sqrt{\Delta x^2_{сл.} + \Delta x^2_{сист}}$.

. Эту ошибку называют еще абсолютной ошибкой.

Алгоритм обработки результатов прямых измерений

- 6) Записать окончательный результат: .

$$x = \bar{x} \pm \Delta \bar{x}_{\text{общ}}, \text{ для } P_D = 0{,}95$$

- 7) Кроме абсолютной ошибки желательно также найти коэффициент вариации (или относительную ошибку, выраженную в процентах):

$$\omega\,\% = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\,\%.$$

Контрольные вопросы.

- Биномиальное .распределение.
- Распределение Гаусса:
- а). Параметры распределения.
- б). Нормированная случайная величина.
- в). Правило трёх сигм.
- Основные понятия математической статистики.
- Схема предварительной обработки экспериментальных данных.
- Статистические характеристики совокупности.
- Ошибка среднего арифметического.
- Доверительный интервал и доверительная вероятность.
- Распределение Стьюдента.
- Обработка прямых измерений