

Содержание

Раздел 1. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Раздел 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Раздел 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Раздел 4. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Раздел 5. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ
ФУНКЦИЙ

Раздел 6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Раздел 7. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ



1. Теория и практика приближенных вычислений



08.09.2016

Вопросы:

1. Абсолютная и относительная погрешности
2. Верные значащие цифры
1. Правила округления чисел и погрешностей

ВВЕДЕНИЕ

Под **погрешностью** понимается величина, характеризующая точность результата.

Выделяют три основных вида погрешностей:

1. **Неустраняемая погрешность** – эта погрешность связана:
 - а) с ошибками или неточностями исходных данных
 - б) несоответствие математического описания задачи реальности.
2. **Погрешность метода** связана со способом решения поставленной математической (инженерной) задачи с тем, что исходные данные заменяются приближенными. Например, заменяют интеграл суммой, производную – разностью, функцию – многочленом или строят бесконечный итерационный процесс, который обрывают после конечного числа итераций.
3. **Погрешность вычислений** возникает при округлении промежуточных и конечных результатов.

ПОЛНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Неустраняемая
погрешность

Погрешность
метода

Вычислительная
погрешность

Погрешности
исходных данных

Погрешности
модели

1. Абсолютная и относительная погрешности

Пусть X – точное значение некоторой величины, а x – ее известное приближенное значение.

- **Абсолютной погрешностью** приближенного числа x называется наименьшая величина, удовлетворяющая условию

$$|X - x| \leq \Delta x$$

т.е. точное значение величины X лежит в интервале

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x$$

- **Абсолютной относительной погрешностью** приближенного числа x называется отношение

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

- **Абсолютная и относительная погрешности** связаны соотношением

$$\Delta x = |x| \cdot \delta x$$

- Относительную погрешность часто выражают в процентах

2. Значащие цифры

- **Первая слева, отличная от нуля цифра данного числа и все следующие за ней цифры называются значащими.**

Пример.

В числе $x=78,23$ – четыре значащих цифры (7,8,2,3)

$x=0,01280$ – значащие цифры 1,2,8,0

$x=2270000$ – значащие все семь цифр

$x=2,27 \cdot 10^6$ – значащие только 2,2,7

Приближенные числа записываются в форме:

$$x \pm \Delta x$$

Погрешность Δx подбирают так, чтобы :

- а) в записи Δx было не более 1 – 3 значащих цифр;
- б) младшие разряды в записи числа x и погрешности Δx должны соответствовать друг другу

Пример: $102,1 \pm 0,2$; $4,531 \pm 0,011$; $-10,92 \pm 0,06$

Верные значащие цифры

2.1. Значащая цифра числа называется **верной в строгом (узком) смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит $1/2$ единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Пример 1. Определить, какие цифры числа $46,852 \pm 0,007$ являются верными в строгом (узком) смысле.

Решение. Будем последовательно рассматривать все цифры числа

4 – стоит в разряде десятков, возьмем $1/2$ от десяти = 5 и сравним число $5 > 0,007$, следовательно, цифра 4 – верная в узком смысле

6: стоит в разряде единиц, $\frac{1}{2}=0,5>0,007$ - верная

8: стоит в разряде десятых, $0,1/2=0,05>0,007$ - верная

5: стоит в разряде сотых, $0,01/2=0,005<0,007$ – цифра 5 не является верной в узком смысле, а следовательно, и следующая цифра 2 тоже не является верной в узком смысле.

Таким образом, в записи числа $46,852\pm 0,007$ верными являются цифры 4, 6 и 8, поэтому можно записать это число $46,8$ отметив, что все цифры верны в узком смысле.

Пример 2. Определить какие цифры числа $a=2,91385$, $\Delta a=0,00097$ являются верными в узком смысле.

Пример 3. Если в числе $a=6,92$ все цифры верны в узком смысле, то $\Delta a=$

2.2. Значащая цифра числа называется **верной в широком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Цифры в записи числа, о которых неизвестно верны они или нет, называются сомнительными.

Пример 4. Если в числе $b=4,1$ все цифры верны в широком смысле, то $\Delta b=0,1$

Пример 4. Если в числе $b=4,100$ все цифры верны в широком смысле, то $\Delta b=0,001$

ВЫВОД. Записи $4,1$ и $4,100$ в теории приближенных вычислений означают не одно и то же.

3. Правила округления чисел и погрешностей

3.1. При записи чисел руководствуются правилом: *все значащие цифры должны быть верными.*

Поэтому округление чисел, записанных в десятичной системе, производится по *правилу первой отбрасываемой цифры:*

- если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то оставляемые цифры сохраняются без изменения;
- если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу;
- если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а за ней идут не нули, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу;

Примеры. Округлить числа до сотых:

1) $1,2537 \approx 1,25$;

2) $1,2563 \approx 1,26$;

3) $2,36566 \approx 2,37$;

4) $2,665 \approx 2,66$, (т.к. 6 – четная);

5) $2,635 \approx 2,64$;

Погрешность округления

При округлении числа возникает **погрешность округления**, равная модулю разности неокругленного и округленного значений:

$$\Delta_{окр} = |x - x_{окр}|. \quad (1.3)$$

Тогда абсолютная погрешность $x_{окр}$ складывается из абсолютной погрешности числа x , являющегося приближением его точного значения, и погрешности округления.

Пример. Пусть в приближенном значении $a=16,395$ все цифры верны в широком смысле. Округлим a до сотых $a_{окр} = 16,40$. Тогда $\Delta_{окр}=0,005$, а полная погрешность $\Delta a_{окр} = \Delta a + \Delta_{окр} = 0,001 + 0,005 = 0,006$. Значит в $a_{окр} = 16,40$ цифра 0 не верна в строгом смысле.

3.2. Правила округления погрешностей

1. Погрешности, в отличие от чисел, всегда округляются в большую сторону ($0,742 < 0,75$)
2. Если первая значащая цифра погрешности единица, то в погрешности оставляют две значащих цифры. Во всех остальных случаях одну ($1,12367 < 1,2$ и $0,236845 < 0,3$).
3. Если погрешность используется в дальнейших вычислениях, то оставляют еще одну сомнительную цифру ($1,12367 < 1,13$ и $0,236845 < 0,24$).

Пример. Округлить до сотых число $4,5371 \pm 0,0482$

Сначала округлим погрешность, оставив одну сомнительную цифру (правило 3) – получим $0,049$

Округлим число – получим $4,54$

Найдем погрешность округления $4,54 - 4,5371 = 0,0029$

Найдем погрешность округленного числа $0,049 + 0,0029 = 0,0519$

Округлим – получим $0,06$ (правило 1)

Окончательный ответ $4,54 \pm 0,06$

15.09.2016

Прямая задача теории погрешностей

Вопросы :

- 1. Учет погрешности приближенных вычислений.**
- 2. Систематический учет погрешностей при вычислениях**
- 3. Метод подсчета цифр при определении погрешностей**
- 4. Метод границ определения погрешности**

Прямая задача теории погрешностей:

Заключается в том, чтобы оценить погрешность вычисления значений функции по заданной погрешности аргументов.

1. Учет погрешности приближенных

вычислений

1.1. Строгие методы оценки точности результатов вычислений:

- *Систематический пооперационный учёт погрешностей;*
- *Метод границ.*

При строгом методе формула итоговой погрешности вычислений выводится на основе формул учета погрешностей арифметических действий и вычисления функции.

1.2. Нестрогий метод оценки точности результатов вычислений – метод подсчета верных цифр

Погрешность результатов арифметических операций

Пусть известны погрешности Δx и Δy соответственно чисел x и y .

Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y; \quad \Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$$

Относительная погрешность алгебраической суммы равна

$$\delta(x + y) = \frac{\Delta(x + y)}{|x + y|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x + y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \delta x + \frac{|y|}{|x + y|} \delta y$$

$$\delta(x - y) = \frac{\Delta(x - y)}{|x - y|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x - y|} = \frac{|x|}{|x - y|} \delta x + \frac{|y|}{|x - y|} \delta y$$

||| Предельная **относительная погрешность произведения (частного)** равна сумме относительных погрешностей слагаемых (делимого и делителя).

$$\delta(x \cdot y) = \delta x + \delta y \qquad \delta(x / y) = \delta x + \delta y$$

Предельные абсолютные погрешности произведения и частного вычисляется по формулам связи:

$$\Delta(x \cdot y) = |x \cdot y| \cdot \delta(x \cdot y) \text{ или } \Delta(x \cdot y) = |x| \cdot \Delta y + |y| \cdot \Delta x$$

$$\Delta(x / y) = |x / y| \cdot \delta(x \cdot y)$$

или

$$\Delta(x / y) = \frac{|y| \cdot \Delta x + |x| \cdot \Delta y}{y^2}$$

Пример 1.

а) Записать порядок выполняемых операций, оценить погрешности их результатов, вычислить и оценить погрешность искомого значения $F=(a - b) \cdot c$, если $a=0,8(\pm 0,1)$ $b=1,65(\pm 0,01)$ $c=0,153(\pm 0,002)$

Решение.

$$1) \quad a - b = -0,85;$$

$$\Delta_a=0,1, \Delta_b=0,01, \Rightarrow \Delta_{a-b}=0,1+0,01=0,11$$

$$2) \quad (a - b)c = -0,13005;$$

$$\Delta_{((a - b)c)} = |a - b| \cdot \Delta_c + |c| \cdot \Delta_{(a - b)}$$

$$\Delta_{((a - b)c)} = |0,85| \cdot 0,002 + |0,153| \cdot 0,11 = 0,01853$$

ОТВЕТ: $F = -0,13005 \pm 0,01853$

$$\Delta(x \cdot y) = |x| \cdot \Delta y + |y| \cdot \Delta x$$

Предельная *относительная погрешность операций возведения в степень и извлечения корня.*

$$\delta(x^n) = n\delta x; \quad \delta(\sqrt[n]{x}) = \frac{\delta x}{n}$$

Предельные абсолютные погрешности вычисляется по формулам связи:

$$\Delta(x^n) = |x^n| \cdot \delta(x^n) = |x^n| \cdot n \cdot \delta(x)$$

$$\Delta(\sqrt[n]{x}) = |\sqrt[n]{x}| \cdot \delta(\sqrt[n]{x}) = |\sqrt[n]{x}| \cdot \frac{\delta x}{n}$$

Погрешность вычисления функции

Пусть задана дифференцируемая функция и абсолютные погрешности аргументов

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n); \Delta x_i$$

Тогда абсолютная погрешность функции вычисляется по формуле Лагранжа:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Если функция зависит от одного аргумента, то

$$\Delta y = |f'(x)| \cdot \Delta x$$

Пример 2.

а) Записать порядок выполняемых операций, оценить погрешности их результатов, вычислить и оценить погрешность искомого значения $F=(a - b) \cdot c$, если $a=0,8(\pm 0,1)$ $b=1,65(\pm 0,01)$ $c=0,153(\pm 0,002)$

Решение.

Рассмотрим F как функцию от трех аргументов a, b, c

$$F'_a = c \quad F'_b = -c \quad F'_c = a - b$$

$$\begin{aligned} \Delta F &= c \cdot \Delta a + c \cdot \Delta b + (a - b) \cdot \Delta c = \\ &= 0,153 * 0,1 + 0,153 * 0,01 + 0,85 * 0,002 = 0,01683 + 0,0017 = \\ &= 0,01853 \end{aligned}$$

Пример 3.

Найти предельные абсолютную и относительную погрешности вычисления объема шара по выражению $V = 1/6(\pi d^3)$, если $d = 3,7 \pm 0,05$ см, а $\pi = 3,14$.

Решение.

Рассматривая d и π как переменные величины, вычисляем частные производные

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6} \cdot d^3 = 8,44;$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d^2 = 21,5.$$

$$\Delta \pi = 0,0016$$

Используя формулу для вычисления погрешности функции, зависящей от двух переменных

$$|\Delta f| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y,$$

находим предельную абсолютную погрешность объема

$$\begin{aligned} \Delta_V &= \left| \frac{\partial V}{\partial \pi} \right| \cdot |\Delta \pi| + \left| \frac{\partial V}{\partial d} \right| \cdot |\Delta d| = 8,44 \cdot 0,0016 + 21,5 \cdot 0,05 = 0,013 + 1,075 = \\ &= 1,088 \text{ см}^3 \approx 1,1 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Пример 4.

- а) Записать порядок выполняемых операций, оценить погрешности их результатов, вычислить и оценить погрешность искомого значения F .
- б) Определить число верных (в узком и широком смысле) знаков в результате.

$$F = \frac{a^2 + b^3}{\cos t}, \quad a = 28,3 \pm 0,02, \quad b = 7,45 \pm 0,01, \quad t = 0,7854 \pm 0,0001.$$

Решение. а) приближенные значения исходных данных:

$$a = 28,3 \quad b = 7,45 \quad t = 0,7854$$

Абсолютные погрешности исходных данных:

$$\Delta a = 0,02 \quad \Delta b = 0,01, \quad \Delta t = 0,0001$$

Относительные погрешности исходных данных:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{0,02}{28,3} = 0,00070671; \quad \delta b = \frac{\Delta b}{|b|} = \frac{0,01}{7,45} = 0,0013423;$$

$$\delta t = \frac{\Delta t}{|t|} = \frac{0,0001}{0,7854} = 0,00012732.$$

▪ **Порядок выполняемых операций:**

$$a^2 = 800,89 \Rightarrow \delta a^2 = 2\delta a = 0,0014134 \Rightarrow \Delta a^2 = 800,89 \cdot 0,0014134 = 1,132;$$

$$b^3 = 413,49 \Rightarrow \delta b^3 = 3\delta b = 0,0040269 \Rightarrow \Delta b^3 = 413,49 \cdot 0,0040269 = 1,6651$$

$$a^2 + b^3 = 1214,4; \quad \Delta(a^2 + b^3) = \Delta a^2 + \Delta b^3 = 2,7971;$$

$$\delta(a^2 + b^3) = \frac{2,7971}{1214,4} = 0,0023033.$$

$$\text{cost} = 0,70711; \quad \Delta(\text{cost}) = \left| (\text{cost})' \right| \cdot \Delta t = |-\sin t| \cdot \Delta t = 0,0000707;$$

$$\delta(\text{cost}) = \frac{\Delta(\text{cost})}{|\text{cost}|} = 0,0001.$$

$$F = \frac{a^2 + b^3}{\text{cost}} = \frac{1214,4}{0,70711} = 1717,413;$$

$$\delta F = \delta(a^2 + b^3) + \delta(\text{cost}) = 0,0023033 + 0,0001 = 0,0024033;$$

$$F = 1717,413 \cdot 0,0024033 = 4,1274586629.$$

б) Для определения числа верных знаков воспользуемся определением и оценкой для абсолютной погрешности функции.

$$\left| \frac{\partial F}{\partial a} \right| = \left| \frac{2a}{\cos t} \right| = 80,0446, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial b} \right| = \left| \frac{3b^2}{\cos t} \right| = 235,4776,$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| = \left| -\frac{a^2 + b^3}{\cos^2 t} (-\sin t) \right| = 1717,40725.$$

Таким образом,

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial F}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \Delta t = 4,1274.$$

$$F = 1717,413.$$

По определению числа верных знаков,

$$\begin{aligned} 3 : \Delta F > \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}; & \quad 1 : \Delta F > \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}; \\ 4 : \Delta F > \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}; & \quad 7 : \Delta F > \frac{1}{2} \cdot 10^0; \quad 1 : \Delta F < \frac{1}{2} \cdot 10^1. \end{aligned}$$

- **Ответ:** число верных знаков $m=3$ и

$$F = 1717.$$

Метод границ

По известным нижним и верхним границам данных чисел, находят отдельно нижнюю и верхнюю границы результата.

Для суммы:

$$\text{НГ}(x + y) = \text{НГ}x + \text{НГ}y; \text{ВГ}(x + y) = \text{ВГ}x + \text{ВГ}y.$$

Для умножения:

$$\text{НГ}(xy) = \text{НГ}x \times \text{НГ}y; \text{ВГ}(xy) = \text{ВГ}x \times \text{ВГ}y.$$

Пример. Сложить два числа:

$$x \approx 3,2 (\pm 0,05) \text{ и } y \approx 7,9 (\pm 0,05).$$

$$\text{Границы чисел } 3,15 < x < 3,25, \text{ и } 7,85 < y < 7,95,$$

$$\text{Границы суммы } 11,00 < x + y < 11,20.$$

$$\text{Ответ: } x + y \approx 11,1 (\pm 0,1).$$

Метод границ

Для обратных действий – **вычитания** и **деления**:

$$\text{НГ}(x - y) = \text{НГ}x - \text{ВГ}y ; \text{ВГ}(x - y) = \text{ВГ}x - \text{НГ}y .$$

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{НГ}x}{\text{ВГ}y} ; \quad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{ВГ}x}{\text{НГ}y}$$

Из определения НГ и ВГ вытекают следующие правила:

- 1) округлять НГ можно только по недостатку, а ВГ – по избытку;
- 2) чем меньше разность $\text{ВГ}x - \text{НГ}x$, тем точнее определяется x ;
- 3) в качестве приближенного значения x рекомендуется брать среднее арифметическое чисел $\text{НГ}x$ и $\text{ВГ}x$.

Оценить точность вычислений методом границ

Пример 5.

Найти значение

$$x = \frac{(a - b)c}{a + b}$$

если $a \approx 9,21 (\pm 0,01)$;
 $b \approx 3,05 (\pm 0,02)$, $c \approx 2,33 (\pm 0,01)$.

Решение.

Определяем НГ и ВГ каждого из чисел a , b , c и, соответствующих действий, находим НГ и ВГ числа x . Запись удобно оформить в виде таблицы.

	a	b	c	a - b	(a-b)c	a+b	x
НГ	9,20	3,03	2,32	6,13	14,22	12,23	1,15
ВГ	9,22	3,07	2,34	6,19	14,29	12,29	1,19

$$\text{НГ}(a-b) = \text{НГ}a - \text{ВГ}b = 9,20 - 3,07 = 6,13$$

$$\text{ВГ}(a-b) = \text{ВГ}a - \text{НГ}b = 9,22 - 3,03 = 6,19$$

$$\text{НГ}x = \text{НГ}(\text{числителя}) / \text{ВГ}(\text{знаменателя}) = 14,22 / 12,29 = 1,15$$

$$\text{ВГ}x = \text{ВГ}(\text{числителя}) / \text{НГ}(\text{знаменателя}) = 14,29 / 12,23 = 1,19$$

Абсолютная погрешность: $\Delta_x = \frac{BG_x - NG_x}{2} = 0,02$

Среднее значение: $N_{cp} = \frac{BG_x + NG_x}{2} = 2,35 / 2 = 1,175$

Определить в записи среднего значения верные цифры в широком смысле – это две первые цифры 1 и 1, следовательно, результат можно записать в виде $x = 1,2 \pm 0,02$.

Ответ: $x = 1,2 (\pm 0,02)$, $\delta x = 1,7\%$

Метод подсчета верных цифр – нестрогий метод оценки точности вычислений

Правила подсчета цифр.

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Пример.	Решение.
Найти сумму приближенных чисел $127,42; 67, 3; 0,12 ; 3,03$	$127,42 + 67, 3 + 0,12 + 3,03 =$ $197,87 \approx 197,9,$

2. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.

Пример	Решение.
Умножить приближенные числа $3,4$ и $12,32$.	$3,4 \times 12,32 = 41,888 \approx 42$

3. При возведении в степень и извлечении корня в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько имелось их в исходном числе

Примеры.

$$1) 2,3^2 = 5,29 \approx 5,3;$$

$$2) 0,8^3 = 0,512 \approx 0,5.$$

4. Во всех промежуточных результатах оставляют кроме верны одну сомнительную цифру (остальные отбрасывается).

6. Обратная задача теории погрешности

Обратная задача теории погрешности заключается в следующем: при каких значениях аргумента известная функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет иметь погрешность не превосходящую заданной величины.

Простейшее решение обратной задачи дается **принципом равных влияний**.

Согласно этому принципу предполагается, что все частные дифференциалы одинаково влияют на образование общей абсолютной погрешности.

Предельная погрешность функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для малых абсолютных погрешностей аргументов Δx_i :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

5. Обратная задача теории погрешностей

- Необходимо определить допустимую погрешность аргументов по допустимой погрешности функции.

Для функции одной переменной абсолютную погрешность можно приближенно в $y = f(x)$ по формуле

$$\Delta x^* = \frac{1}{|f'(x^*)|} \Delta y, \quad f'(x^*) \neq 0.$$

Для функции нескольких

применяют принцип равных влияний, т.е. считают, что все слагаемые $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, равны между собой.

Тогда абсолютные погрешности всех аргументов определяются формулой

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* = \overline{\Delta y}, \quad i = \overline{1, n} \quad (15)$$

$$\Delta x_i^* = \frac{\Delta y}{n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пример (обратная задача)

Выяснить погрешность m задания исходных данных, необходимую для получения результата с m верными значащими цифрами.

$$F = \frac{a^2 + b^3}{\cos t}, \quad a \approx 28,3, \quad b \approx 7,45, \quad t \approx 0,7854, \quad m = 5.$$

$$a^2 = 800,89, \quad b^3 = 413,49, \quad \cos t = 0,70711, \quad a^2 + b^3 = 1214,4,$$

$$F = \frac{a^2 + b^3}{\cos t} = \frac{1214,4}{0,7071} = 1717,413$$

5

(полагаем первые m цифр верными).

Согласно определению $\Delta F \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0,05$. абсолютная погрешность

Исходим из того, что

$$\Delta F \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* .$$

Для использования принципа равных влияний считаем, что все

слагаемые $\left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*$, $i = 1, \dots, n$ равны между собой. Тогда абсолютные погрешности всех аргументов определяются формулой:

$$\Delta x_i^* = \frac{\Delta F}{n \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|}, \quad i = 1, \dots, n .$$

Находим

$$\Delta a = \frac{\Delta F}{3 \left| \frac{\partial F}{\partial a} \right|} = \frac{0,05}{(3 \cdot 80,0446)} = 0,0002; \quad \Delta b = \frac{\Delta F}{3 \left| \frac{\partial F}{\partial b} \right|} = \frac{0,05}{(3 \cdot 235,4776)} = 0,00007;$$

$$\Delta t = \frac{\Delta F}{3 \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|} = \frac{0,05}{(3 \cdot 1717,40725)} = 0,00000970 .$$

Задание №1

Тема: Погрешность

- 1. Определить, какое равенство точнее.
- 2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки.
- 3. Найти абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры.
- 4. а) Записать порядок выполняемых операций, оценить погрешности их результатов, вычислить и оценить погрешность искомого значения (прямая задача).
- б) Определить число верных знаков в результате.
- 5. Выяснить погрешность m ания исходных данных, необходимую для получения результата с m верными значащими цифрами (обратная задача).