Российский университет дружбы народов
Институт гостиничного бизнеса и туризма

В.И. Дихтяр

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

Раздел 1. ***Система научных знаний и информационная реальность общества***

Тема 1-1 s. ***Статистическая обработка информации: случайность и вероятность; случайные величины; нормальное распределение.***

Москва
2016

G. Zaltman “How Customers Think”

- *Представляя нам видимые и невидимые миры, ни искусство, ни наука не стоят на месте.*
- *Не имеет права «застыть» и маркетинг, ибо он является одновременно и искусством, и наукой.*

Теория вероятностей

- Неопределенности, случайные Δ, ω и явления (Ẽ , Ḿ, гостеприимство..)

  [***random phenomenon***]

- Азартные игры ⇒ природа сл. ω
- ***Ž*** (простые ω) ⇒ вероятности более сложных их проявлений

Терминология

- ω детерминированное: причина → следствие (*единственное, определенное*)
- случайное ω : исход непредсказуем (*зависит от случайных факторов*)
- опыт ≡ действие: результат неизвестен
- эксперимент ≡ $\sum$ ≡ один или несколько опытов
- элементарное событие ϖ – возможный результат эксперимента, исход

  $\Omega = \{\varpi\}$ – пространство элементарных событий
- событие $A = \{\varpi_1, \ldots, \varpi_n\} \subseteq \Omega$

(Случайное) ωA ≠ детерминированное

Особенности модели:

- **Неопределенность** исхода единичного $\sum$:

  A наступает или не наступает

- Возможность неограниченного **повторения** в одинаковых условиях
- **Стабилизация** относительной частоты ω

Примеры

- Бросание монеты и игрального кубика
- Извлечение карты из колоды
- Извлечение шаров из урны
- Розыгрыш лотереи
- Выбор клиента при опросе
- Будущая цена акции
- Банкротство банка

Действия над $\{\omega\}$

A $\subset$ ***B*** - ***B*** *следует из* ***A***:

B *происходит всегда, когда происходит* ***A***

A + B ***сумма***: $A \vee B$ (*или*)

AB ***произведение*** : $A \wedge B$ (*и*)

Определения

- ***A*** и ***B*** несовместны: не могут произойти одновременно
- $\bar{A}$ противоположно ***A***: не произошло ***A***
- ***A*** достоверно: происходит всегда
- ***A*** невозможно: не наступает никогда
- Полный набор событий: несовместны и их сумма есть достоверное ω

Классическое определение вероятности

- Вероятность *p(A)* – числовая характеристика ***A***
- Равновозможные *ω* (одинаковые шансы) ⇒ *симметрия*
- ***N*** = число ***ϖ***

  (никакие два не могут наступить одновременно)
- Исход благоприятен для ***A*** ≡ ***A*** следует из исхода
- ***m(A)*** – число благоприятных исходов для ***A***

Определение вероятности

$$p(A) = m(A) / N$$

1. $0 \le p(A) \le 1 \quad (m(A) < N)$

2. A и B – несовместны

$$p(A+B) = p(A)+p(B)$$

3. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ образуют *полный набор* $\Rightarrow$

$$p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k) = 1$$

Независимость

A не зависит от B, если $p(A|B) = p(A)$

- A и B независимы $\Rightarrow$ $\boldsymbol{p(AB) = p(A)p(B)}$
- $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{p(A_1A_2\ldots A_n) = p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_n)}$$

Математическое ожидание $\mathcal{MX}$

- произвольной конечной случайной величины X

$$m = X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = \langle x, p \rangle$$

- конечной случайной величины

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots, m$$

- характеризует среднее значение

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_m p_m = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

Свойства:

1. $Mc = c \Rightarrow \; Mc = c \bullet 1 = c$ $\qquad c = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $X \geq 0 \;\Rightarrow\; MX \geq 0$

3. $M(cX) = cMX$

4. $$M\left(X \pm Y\right) = \sum_{i,j} (x_i \pm y_j) p_{ij} = M(X) \pm M(Y)$$

5. $$M\left(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n\right) = c_1 MX_1 + c_2 MX_2 + \ldots + c_n MX_n$$

Свойство 5

$$M(X - MX) = MX - M(MX) = MX - MX = 0$$

Центрированная $Y = X - MX$, при $MY = 0$

Свойство 6

$$M(X \bullet Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

Для независимых случайных величин $p_{ij} = p_i q_j$

$$M(X \bullet Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j q_j\right) = MX \bullet MY$$

Дисперсия

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Случайная величина $(X - MX)^2$ распределена по закону

$$\begin{pmatrix} (x_i - MX)^2 \\ p_i \end{pmatrix},$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 p_i = \left| X_i - MX \right|_{P_0}^{2}$$

Среднеквадратичное отклонение

$\sigma^2(x)$ $\vee$ σx^2

$\vee$ стандартное отклонение X

$$\sigma_x = \sqrt{DX}$$

Свойства:

- $DX \geq 0$
- $D(cX) = c^2 DX$
- $D(X + c) = DX$; $D(aX + b) = a^2 DX$
- $D(X + Y) = DX + DY$ (X и Y независимы)
- $DX = MX^2 - (MX)^2$

Стандартизация X

не меняет *дисперсии*

$$D\overset{\circ}{X} = M(X - MX - 0)^2 = DX.$$

Случайная величина

$$X^* = \frac{\overset{\circ}{X}}{\sqrt{DX}} = \frac{X - MX}{\sqrt{DX}}$$

называется стандартизованной (по отношению к X) или просто стандартизацией ***X***

$$MX^* = \frac{1}{\sqrt{DX}} M(X - MX) = 0,$$

$$DX^* = \frac{1}{DX} D(X - MX) = \frac{1}{DX} DX = 1.$$

Свойства

1. $\boldsymbol{r_{X,Y} = M(X^*Y^*)}$

2. $\boldsymbol{r_{X,Y} = r_{X^*,Y^*}}$ т.к. $\boldsymbol{MX^* = MY^* = 0,\ DX^* = DY^* = 1}$

$$r_{X^*,Y^*} = \frac{M[(X^* - MX^*)(Y^* - MY^*)]}{\sqrt{DX^*}\sqrt{DY^*}} = M(X^*Y^*) = r_{X,Y}.$$

3. $|\ \boldsymbol{r_{X,Y}}\ | \le 1$

4. $\boldsymbol{X}$ *и* $\boldsymbol{Y}$ *независимы* $\Rightarrow \boldsymbol{r_{X\,Y} = 0}$

5. коэффициент корреляции равен ±1 ≡ случайные величины линейно зависимы $|\ \boldsymbol{r_{X,Y}}\ | = \boldsymbol{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{Y = aX + b}$

Используемые символы

Символ	Значение
Δ	изменение
ω	событие
Ẽ	экономика
Ḿ	менеджмент, управление
Ž	знания
Ω	предметная область
U	урна