Первообразная и интеграл

Алгебра и начала анализа . 11 класс (ЕМН)

Первообразная

Основное свойство первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной трапеции

Формула Ньютона-Лейбница

Вы познакомитесь в этой теме с самыми началами интегрального исчисления, служащего продолжением уже известного вам дифференциального исчисления.

Первые работы по открытию интегрального исчисления принадлежат еще ***Архимеду*** – первому математику древности.

В средние века этой проблемой занимался итальянский ученый ***Кавальери***.

Но подлинное открытие интегрального исчисления принадлежит двум великим ученым XVII века – ***Ньютону*** и ***Лейбницу***.

УРОК 1

Первообразная

Основное свойство первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной трапеции

Формула Ньютона-Лейбница

Функция F(x) называется первообразной функции f(x) на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство:

$F'(x)=f(x)$

Другими словами:

нахождение первообразной – это обратное действие нахождения производной

Примеры

1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$

   $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x; \quad F(x) = \cos x$

   $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4; \quad F(x) = 2x^3 + 4x$

   $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x; \quad F(x) = \mathrm{tg}\, x$

   $F'(x) = (\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$

№ 20.1-20.4 а,б

20.7 а,б

Первообразная

Основное свойство первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления первообразных

Интеграл

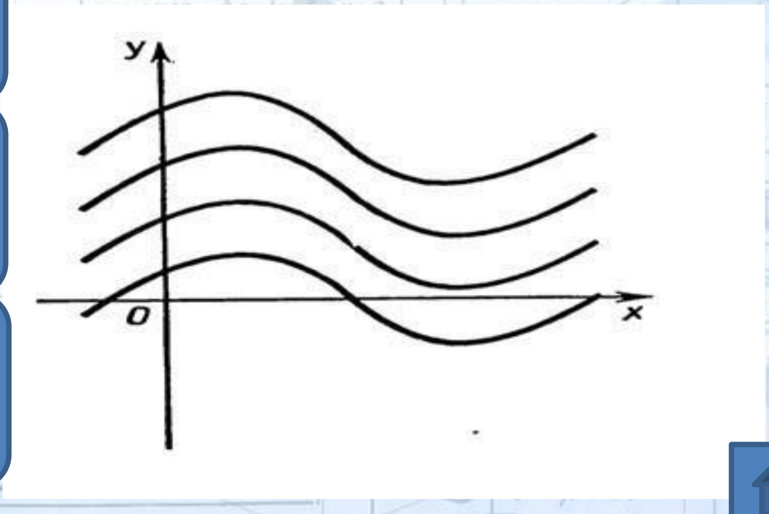
Площадь криволинейной трапеции

Формула Ньютона-Лейбница

Если F(x) – первообразная функции f(x), то и функция F(x)+C, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции f(x).

Геометрическая интерпретация

Графики всех первообразных данной функции f(x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y.



Первообразная

Основное свойство первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной трапеции

Формула Ньютона-Лейбница

№	Функция	Первообразная
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$
2	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert$
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
5	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
7	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\mathrm{ctg}\, x$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \mathrm{tg}\, x$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
11	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \mathrm{arctg}\, x$

Первообразная

Основное свойство первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной трапеции

Формула Ньютона-Лейбница

Правила вычисления первообразных

Правило *1.* **Если** *F* **есть первообразная для** *f*, **а** *G*- **первообразная для g, F+G есть первообразная для** *f* + **g.**

Правило *2.* **Если** *F* **есть первообразная для** *f*, **а** *k*- **постоянная, то функция** *k***F – первообразная для** *kf*.

Правило *3.* **Если** *F (x)* **есть первообразная для** *f (x)*, **а** *k* **и b - постоянные, причем** *k* **не равно** *0*, **то** *1/k* *F* **(***kx***+b) есть первообразная для** *f* **(***kx***+b).**

УРОК 2

№ 20.10 -20.17 а,
б

УРОК 3

№ 20.20 -20.21 а,б

№ 20.25 -20.26 а,б

УРОК 3

№ 20.28

№ 20.30

№ 20.32

№ 20.33

№ 20.35-20.39

Первообразная

Основное свойство первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной трапеции

Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление первообразной заключается в нахождении неопределенного интеграла, а сам процесс называется интегрированием

Определение: ***Множество всех первообразных функции f(x) называется неопределенным интегралом от функции f(x) на этом промежутке и обозначается***

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Первообразная

Основное свойство первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной трапеции

Формула Ньютона-Лейбница

Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок [a;b] на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY. Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.

$$S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ **, его называют определенным интегралом от функции y=f(x) по отрезку [a;b] и обозначают так:**

$$\int_a^b f(x)dx$$

Первообразная

Основное свойство первообразной

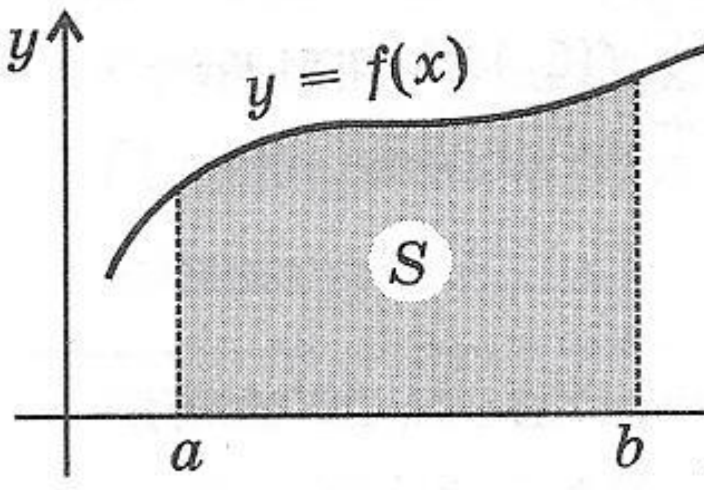
Таблица первообразных

Правила вычисления первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной трапеции

Формула Ньютона-Лейбница



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона - Лейбница

Вычисление определенного интеграла

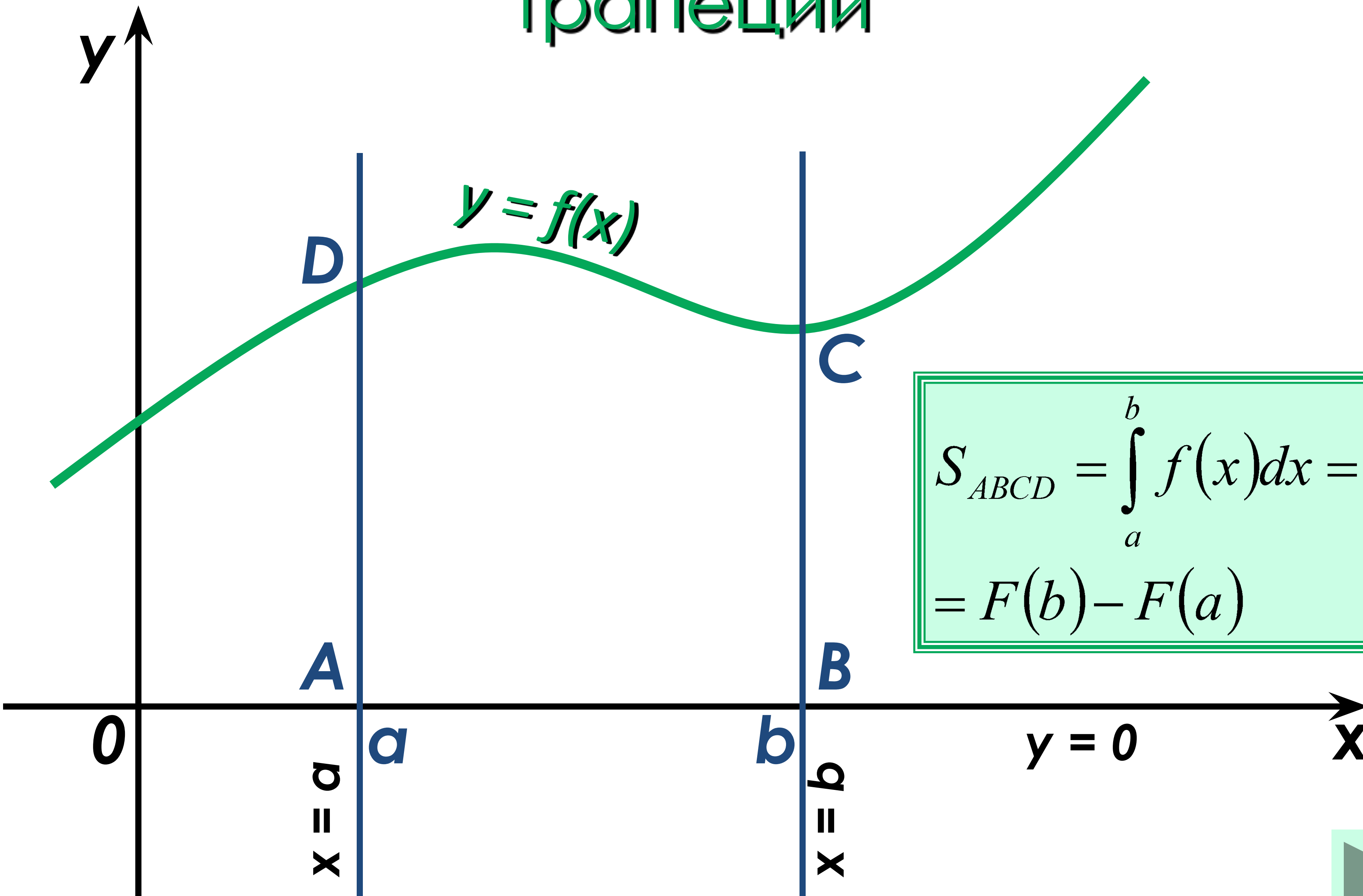
$$\int_1^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx = \left(x^3 - x^2 + x\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(2^3 - 2^2 + 2\right) - \left(1^3 - 1^2 + 1\right) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} \left(\sqrt{x+6}\right)dx = \left.\frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3}\right|_3^{10} =$$

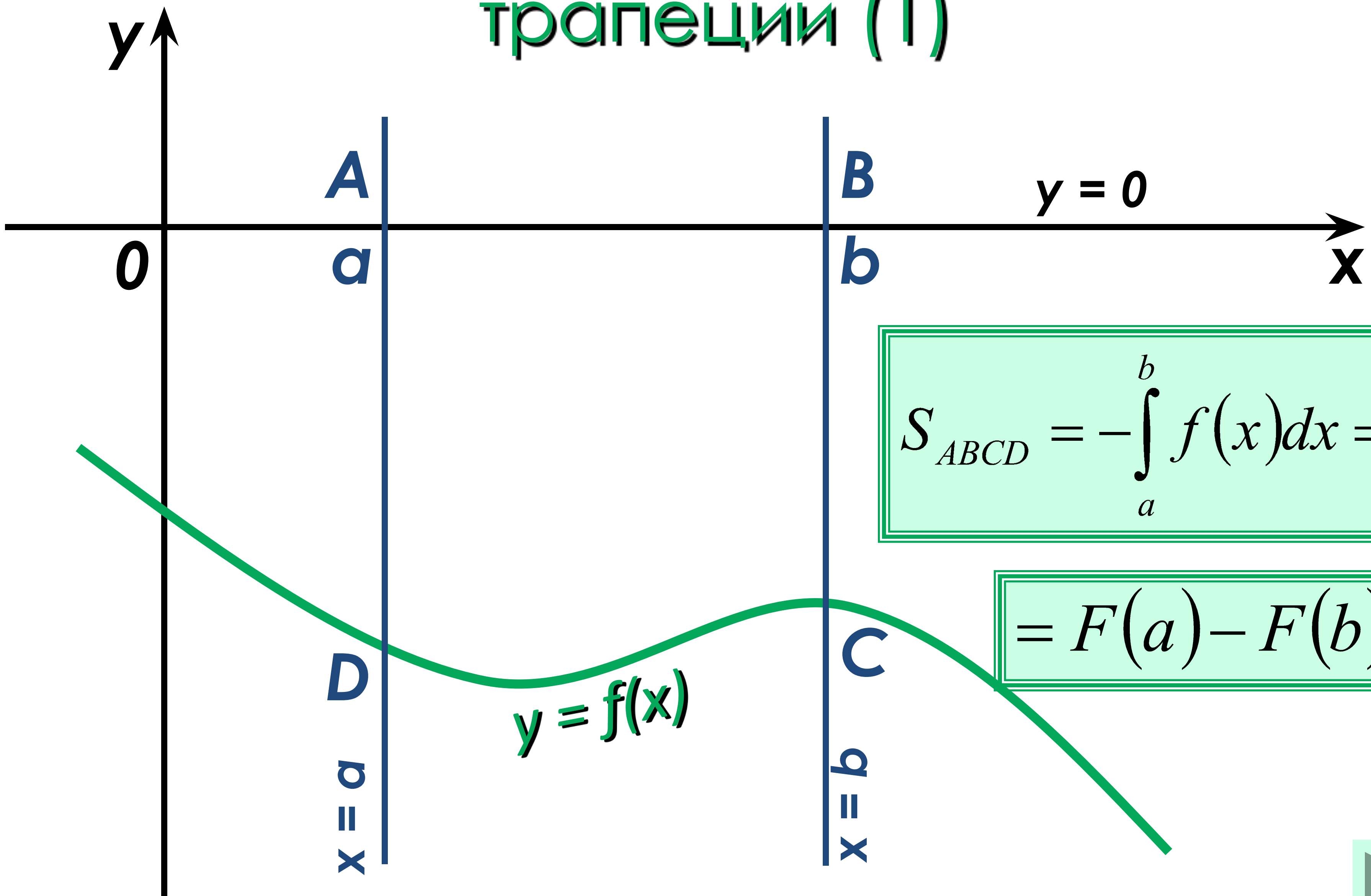
$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$

Площадь криволинейной трапеции



$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx =$$
$$= F(b) - F(a)$$

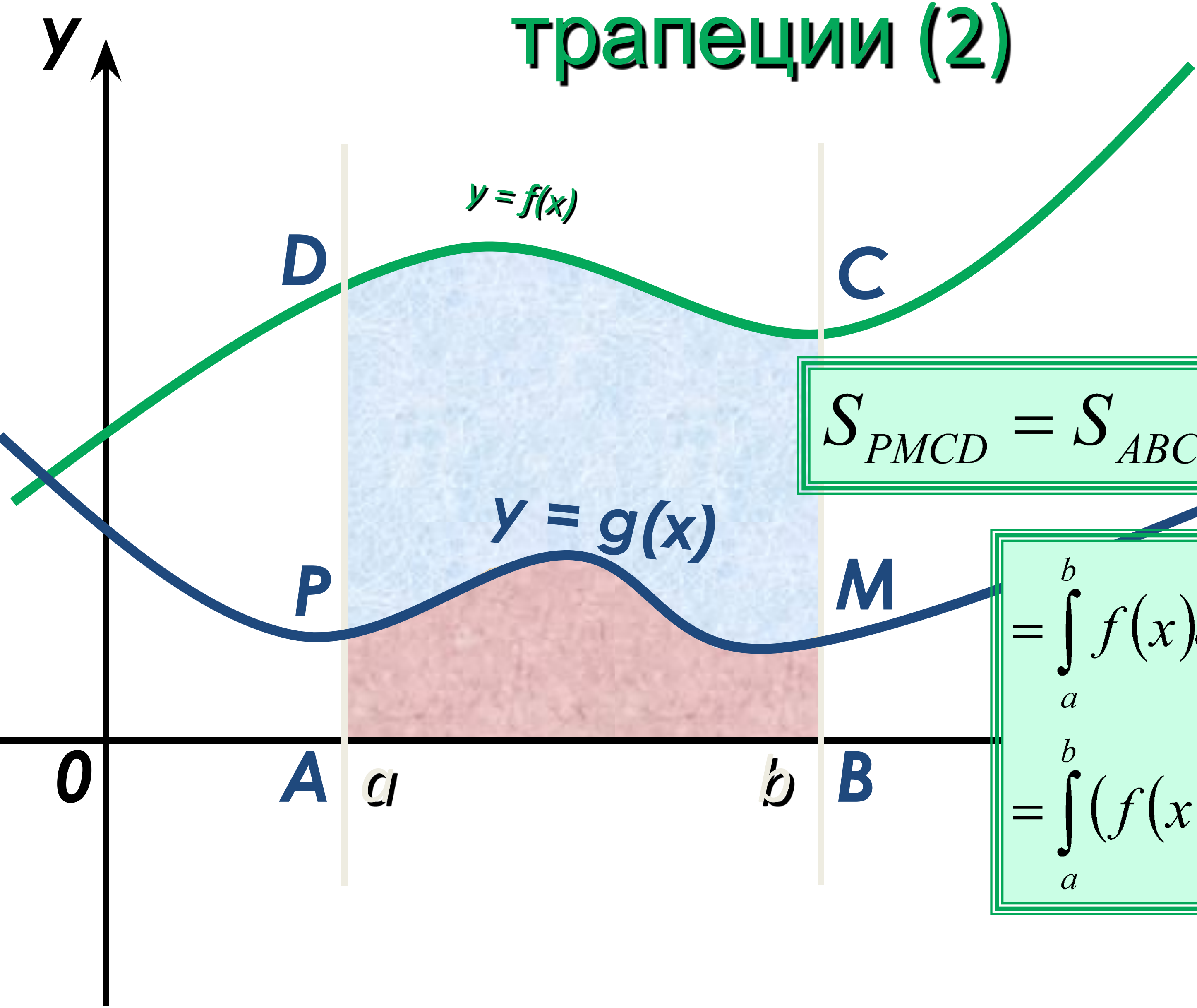
Площадь криволинейной трапеции (1)



$$S_{ABCD} = -\int_a^b f(x)dx =$$

$$= F(a) - F(b)$$

Площадь криволинейной трапеции (2)

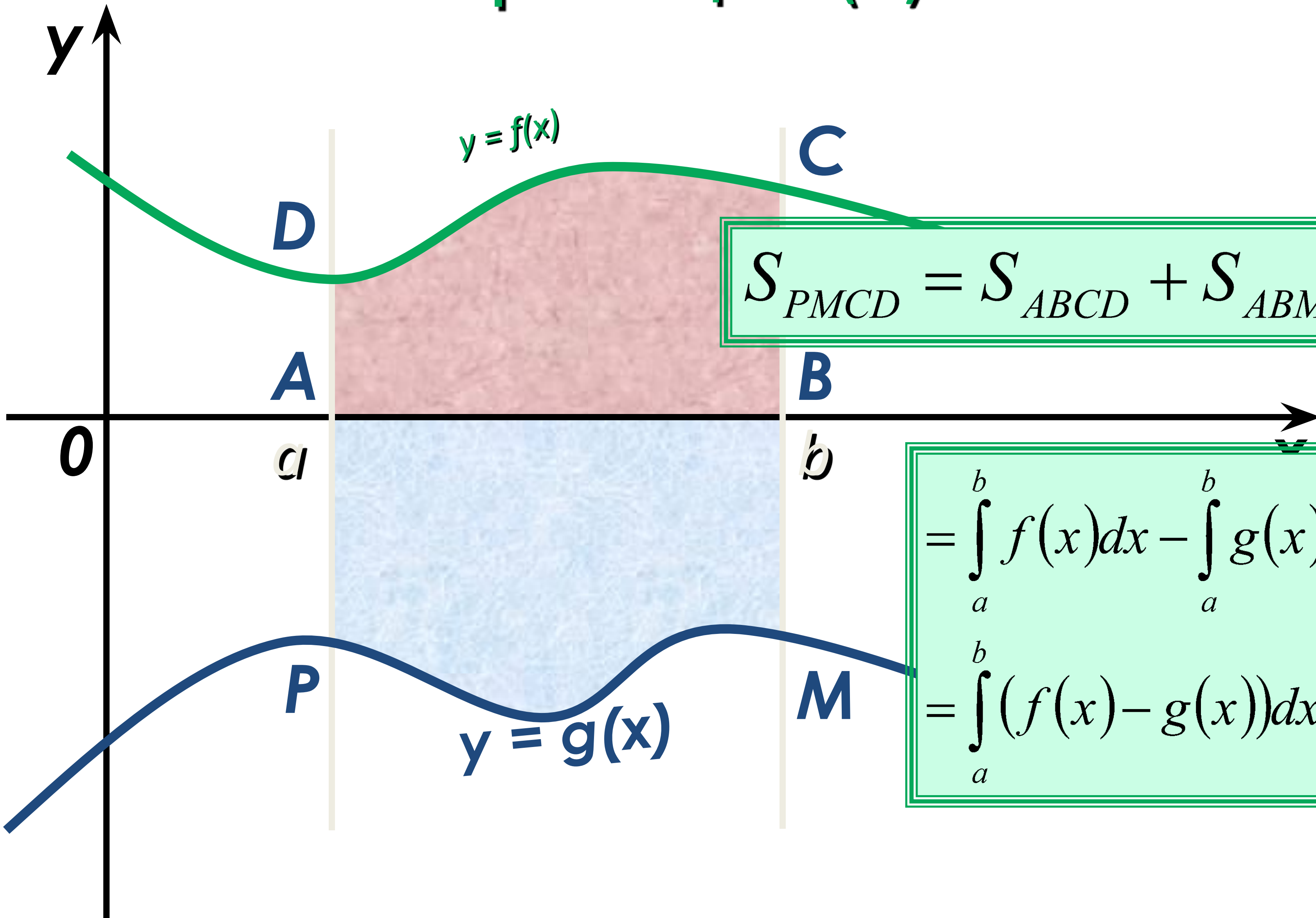


$$S_{PMCD} = S_{ABCD} - S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

Площадь криволинейной трапеции (3)

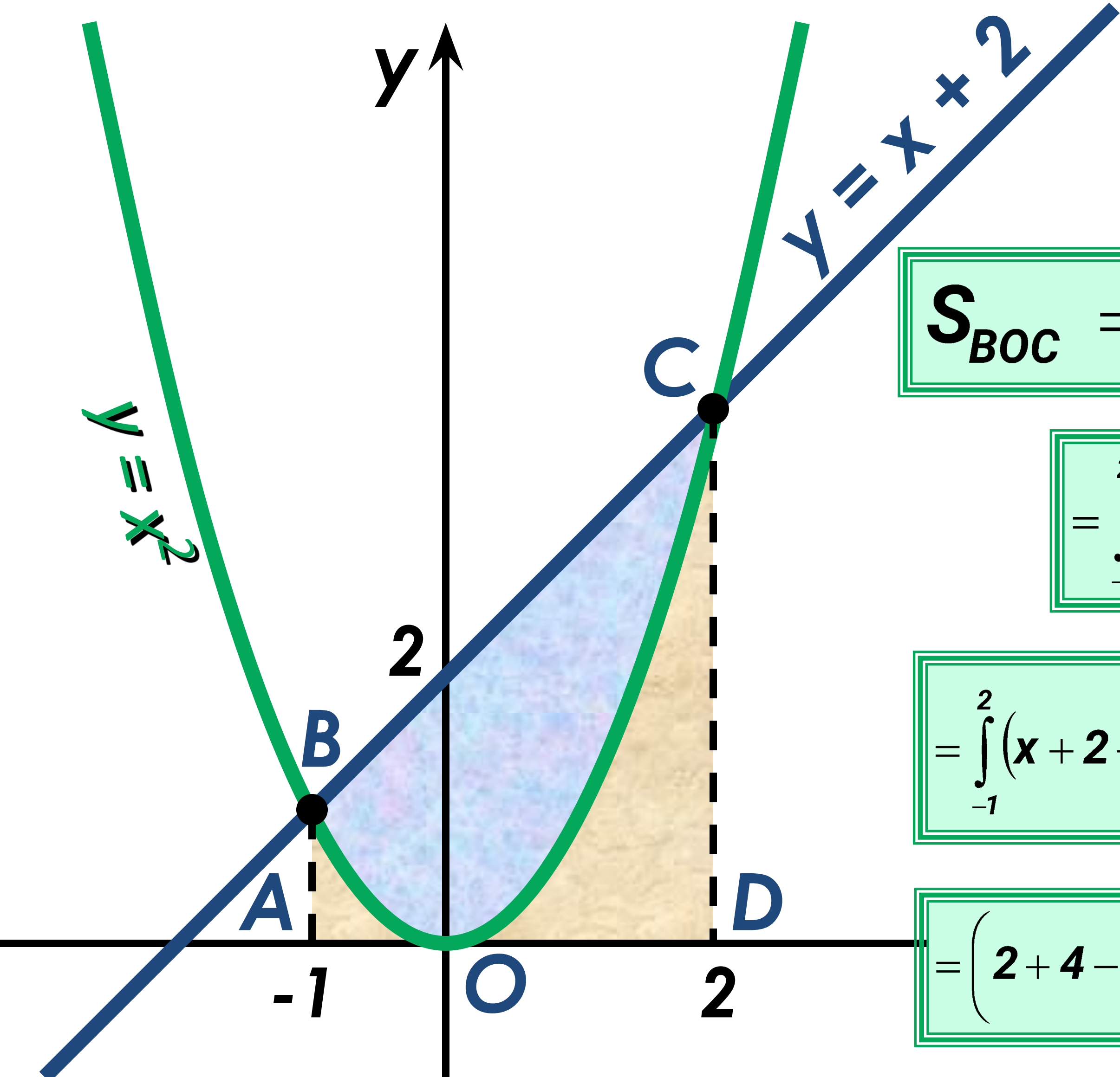


$$S_{PMCD} = S_{ABCD} + S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



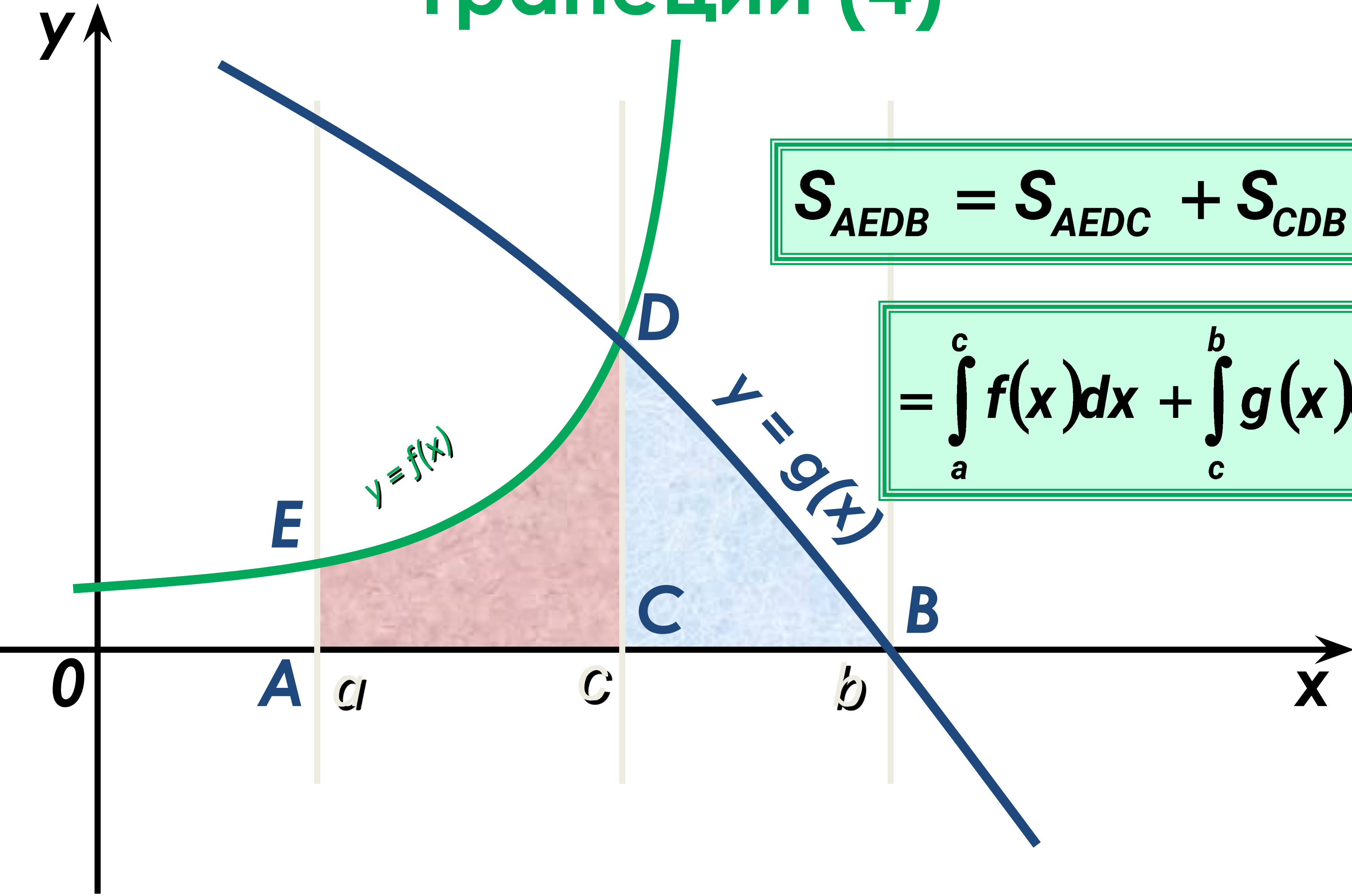
$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2+4-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5$$

Площадь криволинейной трапеции (4)



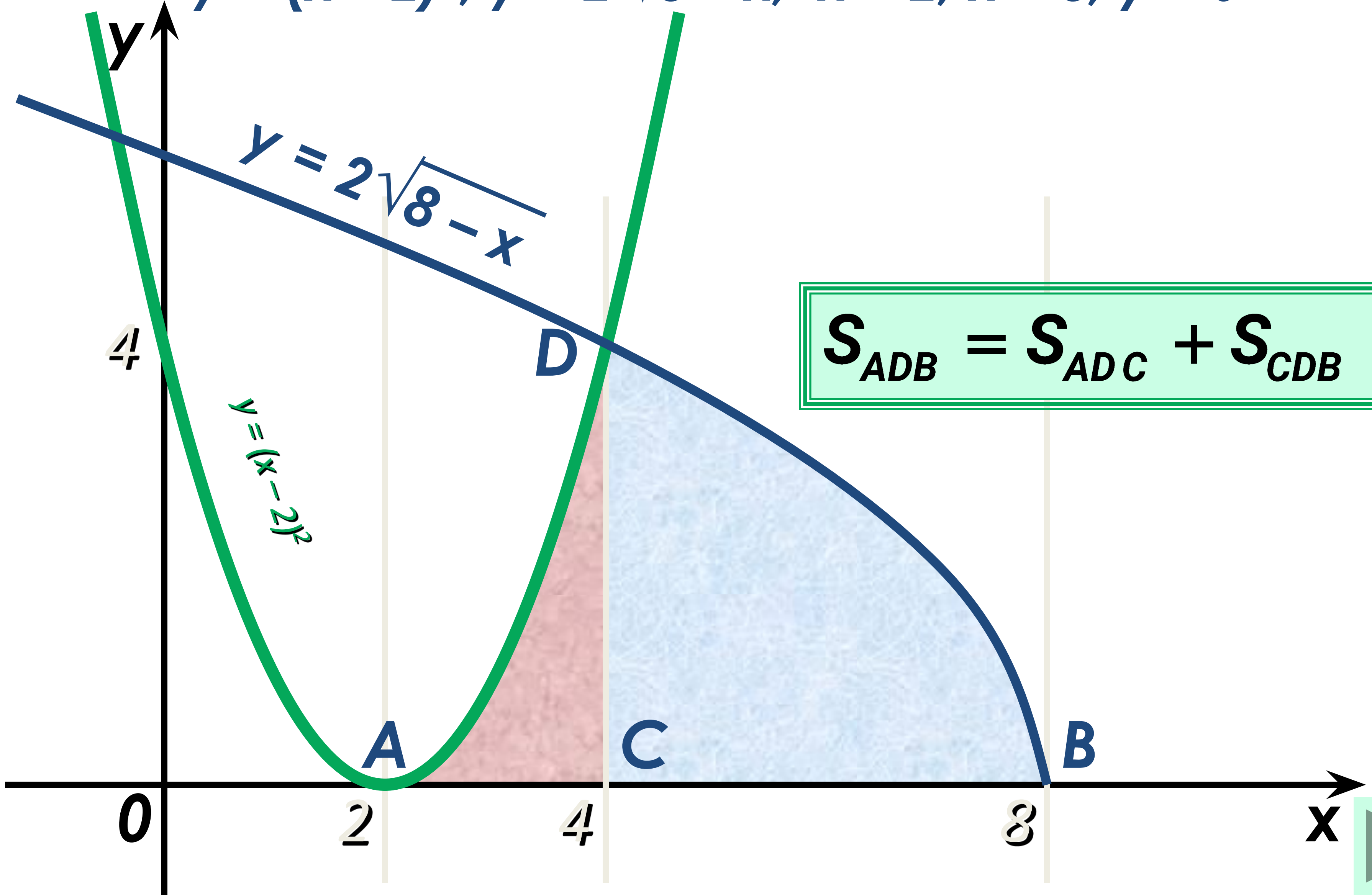
$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2,\ y = 2\sqrt{8 - x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$

$$=\int_2^4 (x-2)^2\,dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x}\,dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_2^4 - \left.\frac{4(8-x)\sqrt{8-x}}{3}\right|_4^8 =$$

$$=\left(\frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} - \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3}\right) =$$

$$=\frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

Информационные источники

1.Автор шаблона презентации Пак Марина Алексеевна (ученица 11 «В» МБОУ СОШ №57 г. Владивосток)

http://pedsovet.su/load/412-1-0-38075?lLlamk

2. Автор технологического приема Г.О.Аствацатуров

http://didaktor.ru/interaktivnaya-infografika-v-powerpoint-eto-vozmozhno/#more-5892

3. МК. Создание инфографики в PowerPoint

http://easyen.ru/load/232-1-0-62065

4. Геометрический смысл первообразной https://pptcloud.ru/raznoe/pervoobraznaya-i-integral

5. Акатова Г.С. Первообразная. Неопределённый и определённый интеграл. (Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона –Лейбница. Таблица первообразных)

http://www.myshared.ru/slide/1015071/

6.Крымова А.В. Первообразная и интеграл.
https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2013/01/10/prezentatsiya-k-uroku-po-matematike-pervoobraznaya-i-integral

7.Кочеткова М.М. Первообразная
https://infourok.ru/prakticheskie-raboti-po-matematike-dlya-studentov-kursa-985733.html