«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Методы параметрического спектрального анализа. Методы оценки параметров АР-модели

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования

1886

СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ

Метод Юла-Уолкера оценки параметров АР-модели (автокорреляционный метод)

1) Оценивание параметров АР-модели производится по **отсчетам анализируемой последовательности длины L**.

2) **Моделируемая последовательность** рассматривается как **линейное предсказание вперед** анализируемой последовательности **x(n)**.

3) Виды линейного предсказания:

- **линейное предсказание** вперед;
- **линейное предсказание** назад.

$$y(n) = \hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k)$$

ОШИБКА ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСКАЗАНИЯ

Ошибка линейного предсказания (ЛП)

Разность между **истинным значением** отсчета и его **оценкой**

$$\varepsilon(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

$$\varepsilon(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k)$$

Аналитическое выражение для анализируемой последовательности

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) + \varepsilon(n)$$

Сравнение анализируемой последовательности с моделируемой

Если ошибка ЛП – **нормальный белый шум, параметры ЛП** будут совпадать с **параметрами АР-модели.**

КРИТЕРИЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

Представление анализируемой последовательности

$$x(n) = y(n) + \varepsilon(n)$$

Критерий наилучшего приближения

Минимум среднего квадрата ошибки линейного предсказания.

Аналитическая запись критерия

$$M\left\{\varepsilon^2(n)\right\} = M\left\{\left[x(n) - y(n)\right]^2\right\} \to \min_{\bar{a}}$$

$$M\left\{\varepsilon^2(n)\right\} = M\left\{\left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k)\right]^2\right\} \to \min_{\bar{a}}$$

$M\{.\}$ – оператор математического ожидания

$\bar{a}$ – вектор параметров линейного предсказания

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ АР-МОДЕЛИ

Средний квадрат (математическое ожидание) ошибки линейного предсказания

$$M\left\{\varepsilon^2(n)\right\} = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}\varepsilon^2(n)$$

$$M\left\{\varepsilon^2(n)\right\} = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}\left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k)\right]^2$$

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для расчета параметров АР-модели

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k R_x(k-m) = -R_x(m), \quad m = 1, 2, \ldots, (M-1)$$

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ АР-МОДЕЛИ (1)

СЛАУ в матричной форме для расчета параметров АР-модели

$$\begin{vmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(M-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(M-1) & R_x(M-2) & \dots & R_x(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \\ \vdots \\ R_x(M) \end{vmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k \left\{ \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-k)x(n-1) + \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-k)x(n-2) + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-k)x[n-(M-1)] \right\} = \sum_{k=1}^{M-1} a_k R_x(k-m), \quad m = 1, 2, \dots, (M-1).$$

Решение СЛАУ – вектор параметров линейного предсказания.

Поиск решения СЛАУ осуществляется по рекуррентному алгоритму Левинсона-Дарбина.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ АР-МОДЕЛИ (2)

Средний квадрат ошибки линейного предсказания

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = M\left\{\varepsilon^{2}(n)\right\}$$

Оценка дисперсии нормального белого шума в АР-модели

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = \hat{\sigma}^{2}$$

Вычисление оценки СПМ анализируемой последовательности

$$S_{y}(\omega) = \frac{\sigma^{2}}{f_{\text{Д}}}\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|^{2}$$

МЕТОД БЕРГА

Параметрические методы оценивания СПМ в MATLAB

1) Метод Юла-Уолкера (автокорреляционный);

2) Метод Берга;

3) Ковариационный метод;

4) Модифицированный ковариационный метод.

Метод Берга

Основан на вычислении оценок параметров **АР-модели** по отсчетам последовательности с линейным предсказанием вперед и назад с **минимизацией среднего значения соответствующих средних квадратов ошибок линейного предсказания**, но без непосредственного вычисления оценки АКФ.

КОВАРИАЦИОННЫЙ И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КОВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОДЫ

Ковариационный метод

Основан на вычислении оценки АКФ по известным отсчетам последовательности *x(n)* (без добавления нулей в начале и в конце), для чего последняя **усекается симметрично справа и слева** на (*M-1*) отсчетов, и оценка АКФ нормируется к длине усеченной последовательности *L-2(M-1)*.

Модифицированный ковариационный метод

Основан на вычислении оценки АКФ для суммы последовательностей с линейным предсказанием вперед (forward) и назад (backward) с **минимизацией среднего значения соответствующих квадратов ошибок линейного предсказания**. Затем оценка АКФ вычисляется так же, как в ковариационном методе, и нормируется к удвоенной длине усеченных последовательностей В линейном предсказании назад значение текущего отсчета определяется как взвешенная сумма последующих отсчетов.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БИХ-ФИЛЬТРЫ. МЕТОД ЮЛА-УОЛКЕРА

Эквивалентные БИХ-фильтры

1) Методы **Юла-Уолкера** и **Берга** гарантируют **устойчивость** эквивалентного БИХ-фильтра АР-модели.

2) **Ковариационный** и **модифицированный ковариационный** методы требуют проверки эквивалентного БИХ-фильтра на **устойчивость**.

Особенности оценки СПМ. Метод Юла-Уолкера

1) применяют при анализе длинных последовательностей;

2) при анализе коротких последовательностей и завышенном порядке АР-модели его применение может сопровождаться расщеплением и смещением пиков.

МЕТОД БЕРГА. КОВАРИАЦИОННЫЙ И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КОВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОДЫ

Особенности оценки СПМ. Метод Берга

1) дает удовлетворительные результаты и при анализе **коротких последовательностей**;

2) **завышенный порядок** АР-модели может также приводить к **расщеплению** и **смещению пиков**.

Особенности оценки СПМ.

Ковариационный и модифицированный ковариационный методы

1) обеспечивают более высокую (по сравнению с методом Юла-Уолкера) точность при анализе **коротких последовательностей** при одинаковом порядке АР-модели;

2) **модифицированный ковариационный метод** может сопровождаться незначительным, по сравнению с ковариационным методом, **смещением пиков**.

«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Методы параметрического спектрального анализа. Методы оценки параметров АР-модели

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования

1886

СПбГЭТУ «ЛЭТИ»