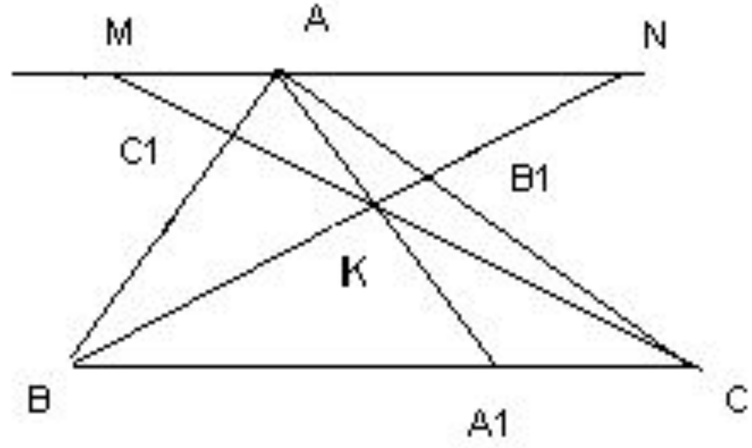
Теоремы Чевы и Менелая

Теорема Чевы для треугольника

- ***Если прямые AA_1, BB_1, CC_1, проходящие через вершины треугольника ABC, параллельны или проходят через одну точку, пересекают его стороны AB, BC, AC или их продолжения в точках A_1, B_1, C_1, соответственно, то справедливо равенство***

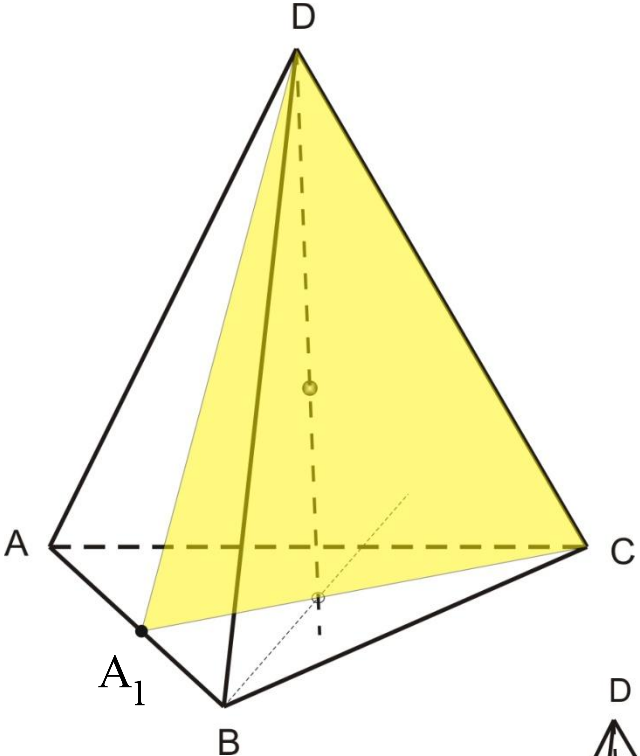


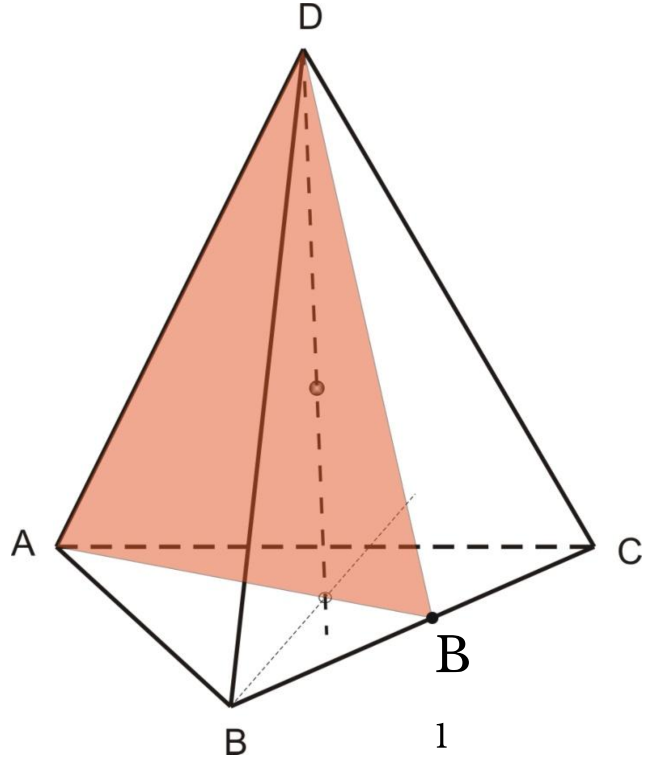
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

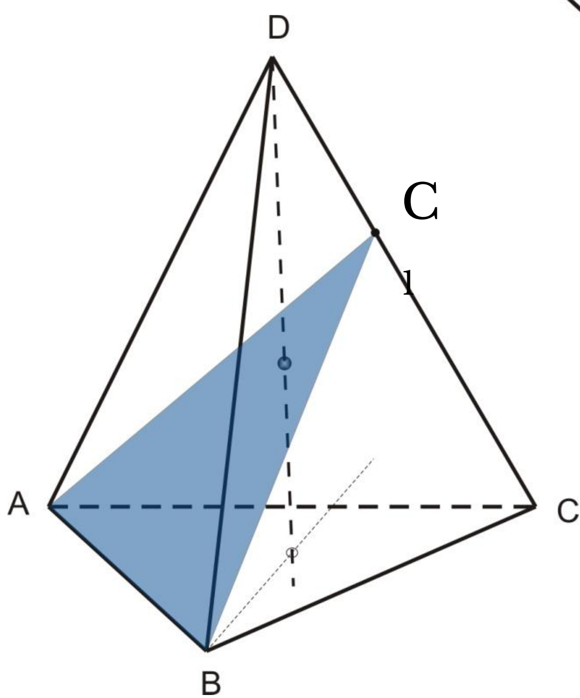
Обобщение теоремы Чевы

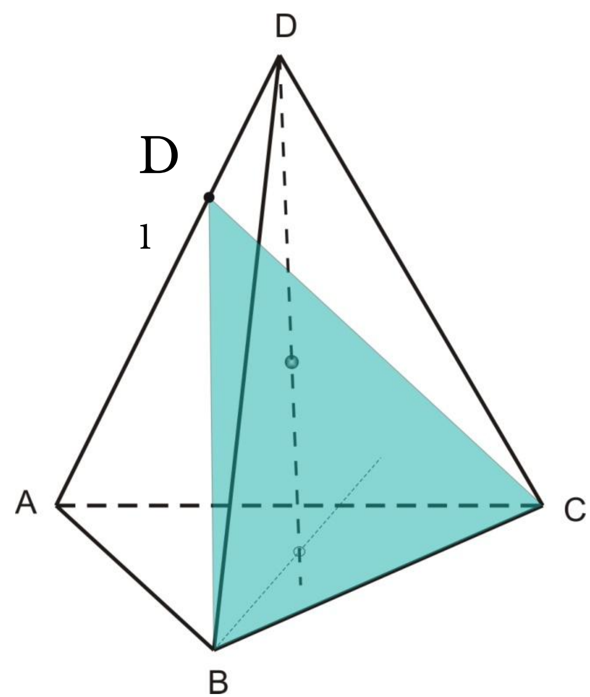
- ***Пусть точка M внутри тетраэдра ABCD, точки A_1, B_1, C_1, D_1 – точки пересечения плоскостей CMD, AMD, AMB, CMB с ребрами AB, BC, CD, DA соответственно. Тогда*** $\frac{AA_1}{A_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$
- ***Справедливо и обратное : если для точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих на соответствующих ребрах, выполнено соотношение,*** $\frac{AA_1}{A_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$

  то плоскости CA_1D, CD_1B, AC_1B, AB_1D проходят через одну точку.


D
A
C
A1
B


D
A
C
B1
B


D
C1
A
C
B


D
D1
A
C
B

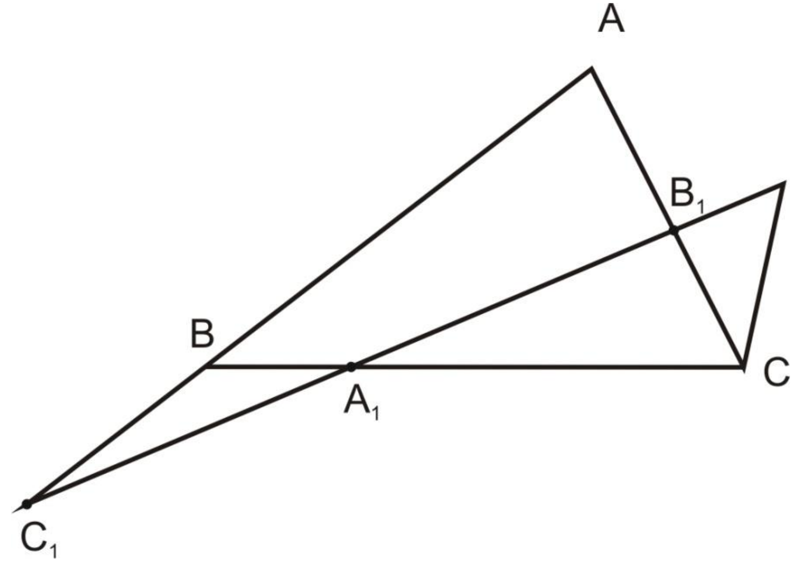
Обобщение теоремы Чевы

- ***Справедливо и обратное:***
- ***если для точек*** A_1, B_1, C_1, D_1***, лежащих на соответствующих ребра , выполнено соотношение,*** $\frac{AA_1}{A_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\frac{DD_1}{D_1A}=1$
то плоскости CA_1D, CD_1B, AC_1B, AB_1D ***проходят через одну точку.***

Теорема Менелая для треугольника

- ***Если треугольник ABC пересечен прямой, не параллельной стороне AB и пересекающей две его стороны AC и BC соответственно в точках B_1 и A_1, а прямую AB - в точке C_1, то***

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

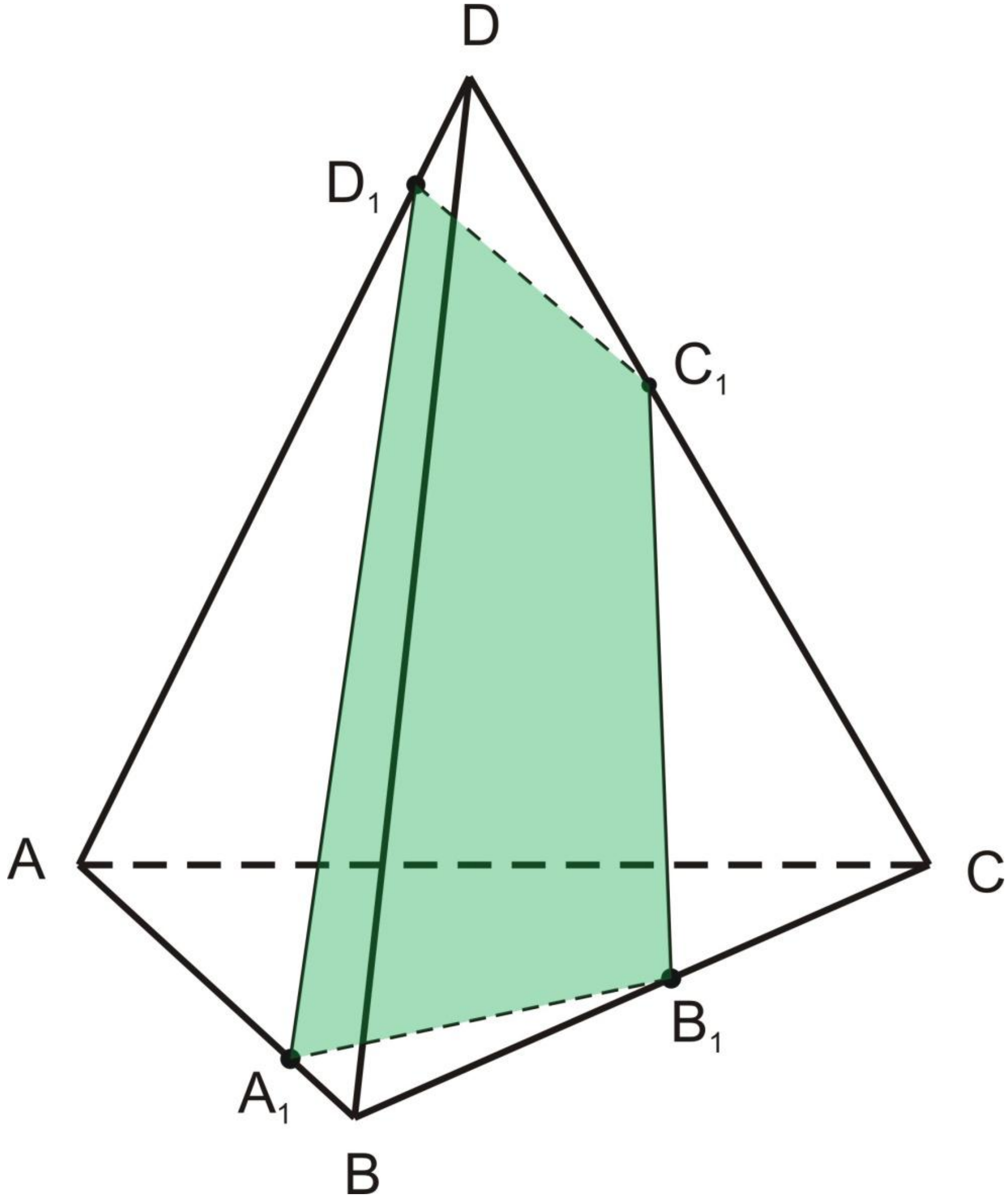


Обратная теорема

- ***Точки A_1, B_1, C_1 принадлежат прямым BC, CA, AB, соответственно, т.е. лежат на сторонах треугольника ABC, или их продолжениях ABC, при этом, тогда точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.***

Обобщение теоремы Менелая

- *Если плоскость α пересекает ребра* AB, BC, CD, DA *тетраэдра* ABCD *в точках* A_1, B_1, C_1, D_1, *то* $\frac{AA_1}{A_1C}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$
- *Обратно, если для четырех точек* A_1, B_1, C_1, D_1, *лежащих соответственно на ребрах* AB, BC, CD, DA *тетраэдра* ABCD *выполнено равенство* $\frac{AA_1}{A_1C}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$, *то эти четыре точки лежат в одной плоскости.*


D
D1
C1
A
C
B1
A1
B