Урок по теме: ЛОГАРИФМ.

Подготовила: Матвеева Елизавета ДП-11

Логарифм

- **Логари́фм числа** b **по основанию** a (от греч. λόγος — «слово», «отношение» и ἀριθμός — «число») определяется как показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b$, произносится : "*логарифм* b *по основанию* a".

Логарифм

Из определения следует, что нахождение $x = \log_a b$ равносильно решению уравнения $a^x = b$. Например $\log_2 8 = 3,$ потому что $2^3 = 8.$

Логарифм

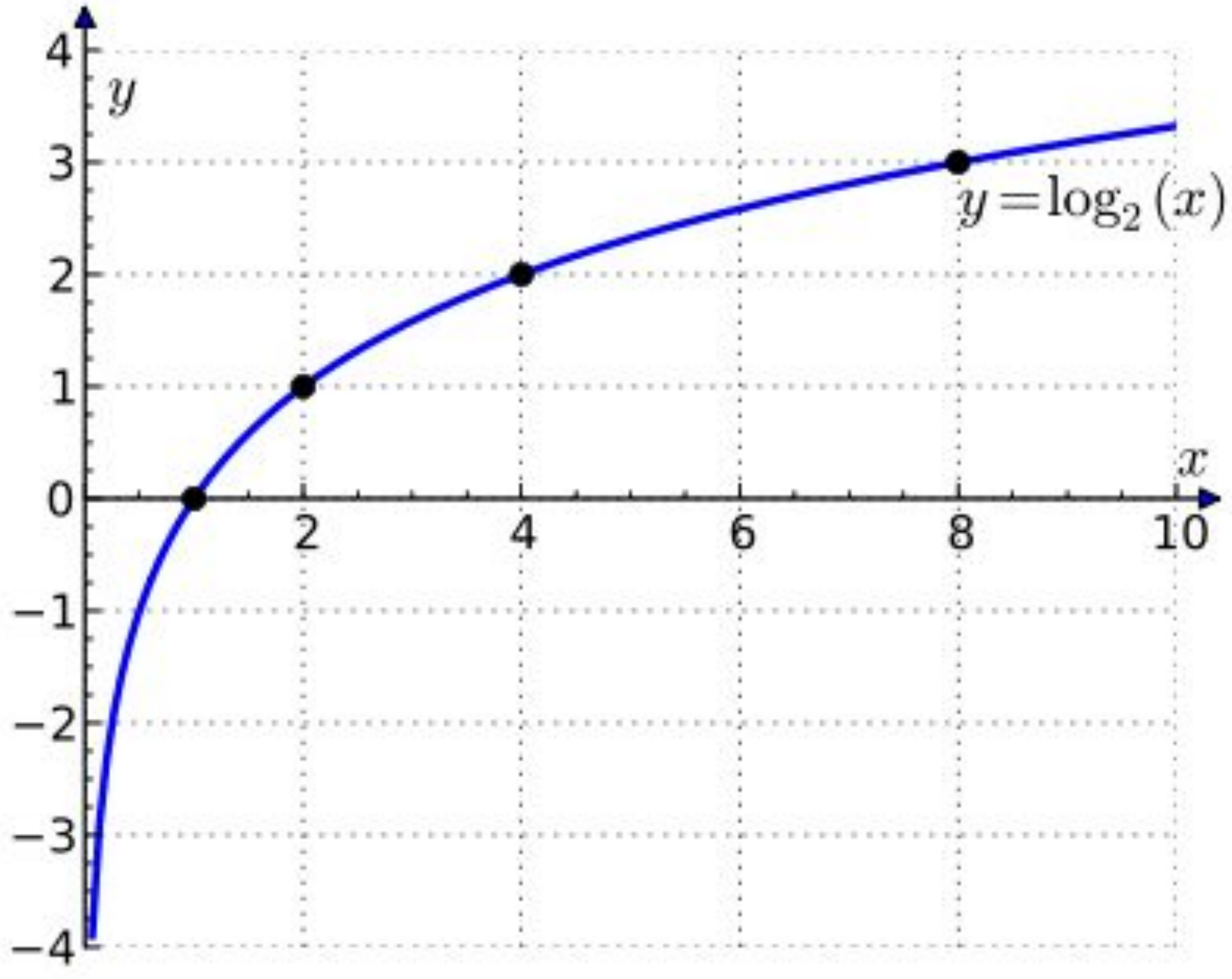
$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$

$$\log_7 49 = 2, \text{ так как } 7^2 = 49;$$

$$\log_5 \frac{1}{5} = -1, \text{ так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$$

$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \text{ так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

График двоичного логарифма.



Логарифмирование и потенцирование

Логарифмированием называется математическая операция, с помощью которой, зная число, определяют логарифм этого числа.

Потенцированием называется математическая операция, с помощью которой, зная логарифм числа, определяют само число.

Джон Непер

«Я старался, насколько мог и умел, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обычно отпугивает весьма многих от изучения математики».

В 1614 году опубликовал определение логарифмов и таблицу их значений.

Значение логарифмической функции.

Со временем выяснилось, что логарифмическая функция $y = \log_a x$ незаменима и во многих других областях человеческой деятельности: решение дифференциальных уравнений, классификация значений величин (например, частота и интенсивность звука), аппроксимация различных зависимостей, теория информации, теория вероятностей и т. д. Эта функция относится к числу элементарных, она обратна по отношению к показательной функции. Чаще всего используются вещественные логарифмы с основанием **e**(натуральный логарифм), **10** (десятичный) и **2** (двоичный).

Действительный логарифм.

Действительный логарифм $\log_a b$ имеет смысл при $a > 0, a \neq 1, b > 0$

Отсюда следует, что значение действительного логарифма положительного числа всегда существует и определённо однозначно.

Наиболее широкое применение нашли следующие виды логарифмов:

- Натуральные: $\ln\ b$, основание: число Эйлера (e).
- Десятичные: $\lg\ b$, основание: число **10.**
- Двоичные: $\log_2 b$ или $\mathrm{lb}\ b$, основание: **2**

Они применяются, например, в теории информации, информатике, во многих разделах дискретной математики.

Свойства.

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

Например:

1) $3=\log_2 8$, так как $2^3=8$;

2) $\frac{1}{2}=\log_3\sqrt{3}$, так как $3^{1/2}=\sqrt{3}$;

3) $3^{\log_3 1/5}=1/5$;

4) $2=\log_{\sqrt{5}} 5$, так как $(\sqrt{5})^2=5$.

Из определения логарифма следует следующее тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

Можно выделить три формулы

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^c = c$$

Примеры:

$$3^{\log_3 5} = 5 \qquad \lg 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$

Свойства логарифмов

1. Логарифм произведения.
2. Логарифм частного.
3. Логарифм степени.
4. Логарифм корня.
5. Переход от одного показателя к другому.
6. Свойства натуральных логарифмов.

1. Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_x(ab) = \log_x a + \log_x b$$

2. Логарифм частного равен логарифмов делимого без логарифма делителя:

$$\log_x\left(\frac{a}{b}\right) = \log_x a - \log_x b$$

3. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$\log_x a^m = m \log_x a$$

4. Логарифм корня равен отношению логарифма подкоренного выражения и показателя корня:

$$\log_x \sqrt[m]{a} = \frac{\log_x a}{m}$$

5. Переход от одного основания к другому

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

Десятичный логарифм.

Десятичный логарифм

[править]

*Основная статья: **Десятичный логарифм***

Логарифмы по основанию 10 (обозначение: $\lg x$) до изобретения калькуляторов широко применялись для вычислений. Они обладали преимуществом перед логарифмами с иным основанием: целую часть L логарифма числа x легко определить.

- Если $x > 1$, то L на 1 меньше числа цифр в целой части числа x. Например, сразу очевидно, что $\lg 345$ находится в промежутке $(2, 3)$.
- Если $x < 1$, то ближайшее к L целое (в меньшую сторону) равно общему числу нулей в x перед первой ненулевой цифрой, взятому со знаком минус. Например, $\lg 0{,}0014$ находится в интервале $(-3, -2)$.

Кроме того, при переносе десятичной запятой в числе на n разрядов значение десятичного логарифма этого числа изменяется на n. Например, $\lg 8314{,}63 = \lg 8{,}31463 + 3$. Отсюда следует, что достаточно составить таблицу десятичных логарифмов для чисел в диапазоне от 1 до 10, причём привести в таблице только мантиссы (дробную часть) логарифмов.

Связь с натуральным логарифмом[12]:

$$\ln x \approx 2{,}30259\ \lg x; \quad \lg x \approx 0{,}43429\ \ln x$$

Поскольку применение логарифмов для расчётов с появлением вычислительной техники почти прекратилось, в наши дни десятичный логарифм в значительной степени вытеснен натуральным[13]. Он сохраняется в основном в тех математических моделях, где исторически укоренился — например, при построении логарифмических шкал.

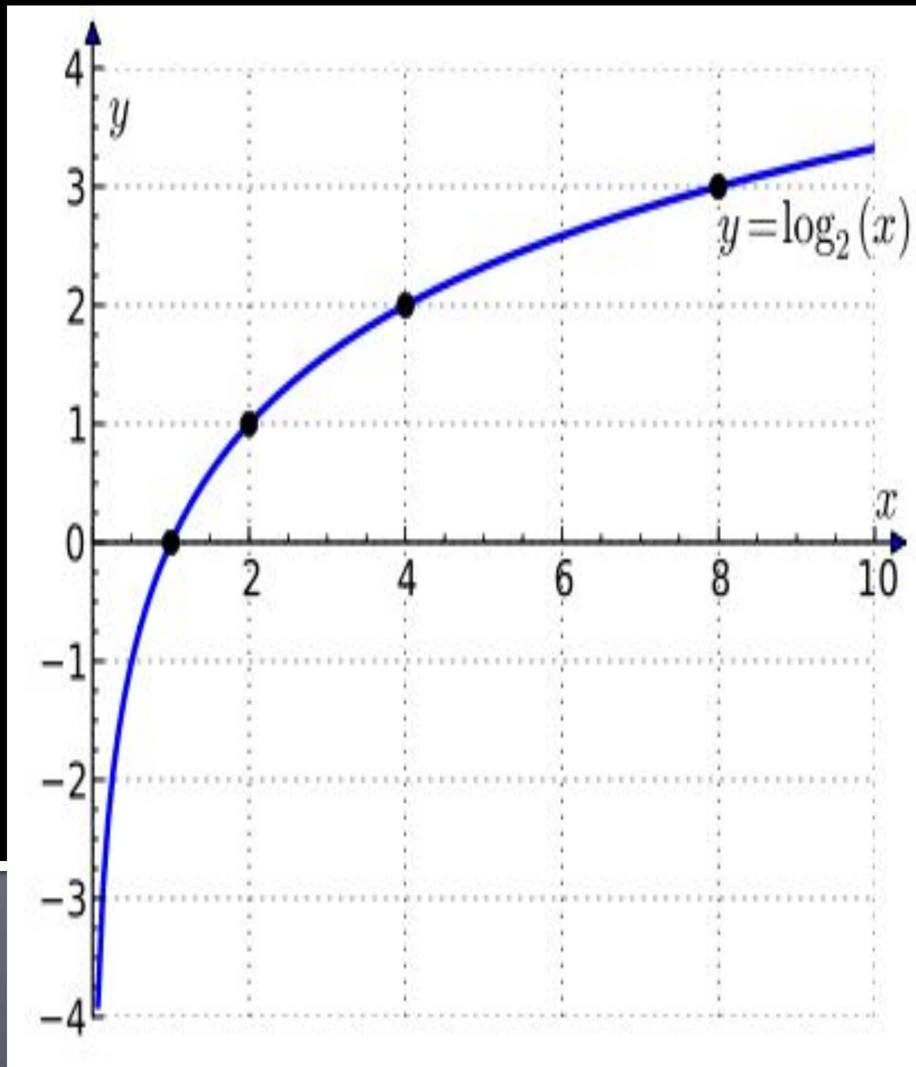
Логарифмическая функция

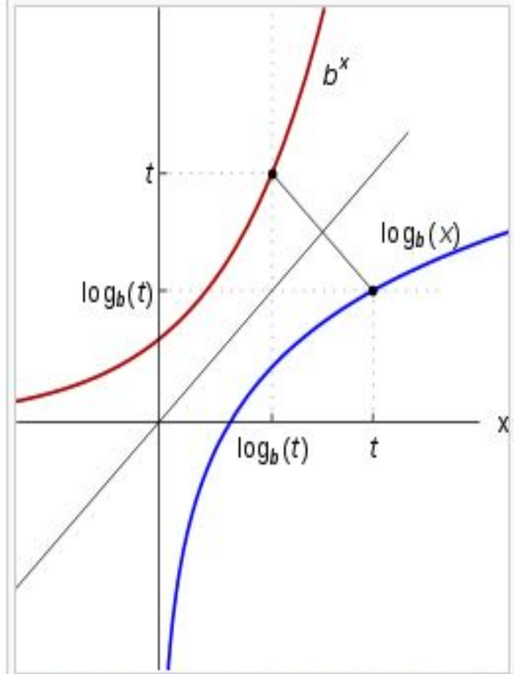
Основные характеристики [править]

Если рассматривать логарифмируемое число как переменную, мы получим *логарифмическую функцию* $y = \log_a x$. Она определена при $a > 0;\ a \neq 1; x > 0$. Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$. Эта кривая часто называется *логарифмикой*[9]. Из формулы замены основания логарифма видно, что графики логарифмических функций с разными основаниями, бо́льшими единицы, отличаются один от другого только масштабом по оси y; графики для оснований, меньших единицы, являются их зеркальным отражением относительно горизонтальной оси.

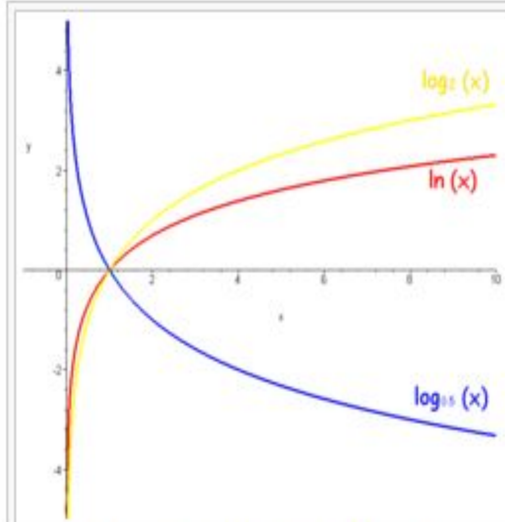
Из определения следует, что логарифмическая зависимость есть обратная функция для показательной функции $y = a^x$, поэтому их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов (см. рисунок). Как и показательная, логарифмическая функция относится к категории трансцендентных функций.

Функция является строго возрастающей при $a > 1$ (см. далее графики) и строго убывающей при $0 < a < 1$. График любой логарифмической функции проходит через точку $(1; 0)$. Функция непрерывна и неограниченно дифференцируема всюду в своей области определения.





Логарифмическая функция обратна к показательной



Графики логарифмических функций

Логарифм.
Немного из истории.

Предшественники

- Предшественники
- Идейным источником и стимулом применения логарифмов послужил тот факт (известный ещё Архимеду), что при перемножении степеней их показатели складываются $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
- Индийский математик VIII века Вирасена, исследуя степенные зависимости, опубликовал таблицу целочисленных показателей (то есть, фактически, логарифмов) для оснований 2, 3, 4.
- Решающий шаг был сделан в средневековой Европе. Потребность в сложных расчётах в XVI веке быстро росла, и значительная часть трудностей была связана с умножением и делением многозначных чисел, а также извлечением корней. В конце века нескольким математикам, почти одновременно, пришла в голову идея: заменить трудоёмкое умножение на простое сложение, сопоставив с помощью специальных таблиц геометрическую и арифметическую прогрессии, при этом геометрическая будет исходной. Тогда и деление автоматически заменяется на неизмеримо более простое и надёжное вычитание, упростятся также возведение в степень и извлечение корня. Первым эту идею опубликовал в своей книге «Arithmetica integra» (1544) Михаэль Штифель, который, впрочем, не приложил серьёзных усилий для практической реализации своей идеи. Главной заслугой Штифеля является переход от целых показателей степени к произвольным рациональным (первые шаги в этом направлении сделали Николай Орем в XIV веке и Николас Шюке в XV веке).

Джон Непер **и его «удивительная таблица логарифмов»**

- **Джон Непер и его «удивительная таблица логарифмов»**
- В 1614 году шотландский математик-любитель Джон Непер опубликовал на латинском языке сочинение под названием «*Описание удивительной таблицы логарифмов*» (лат. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*). В нём было краткое описание логарифмов и их свойств, а также 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом 1'. Термин *логарифм*, предложенный Непером, утвердился в науке. Теорию логарифмов Непер изложил в другой своей книге «*Построение удивительной таблицы логарифмов*» (лат. *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*), изданной посмертно в 1619 году его сыном Робертом.
- Судя по документам, техникой логарифмирования Непер владел уже к 1594 году. Непосредственной целью её разработки было облегчить Неперу сложные астрологические расчёты; именно поэтому в таблицы были включены только логарифмы тригонометрических функций.
- Понятия функции тогда ещё не было, и Непер определил логарифм кинематически, сопоставив равномерное и логарифмически-замедленное движение; например, логарифм синуса он определил следующим образом: Логарифм данного синуса есть число, которое арифметически возрастало всегда с той же скоростью, с какой полный синус начал геометрически убывать.

Джон Непер собственной персоны

- В современных обозначениях кинематическую модель Непера можно изобразить дифференциальным уравнением: $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{M}$
- где M — масштабный множитель, введённый для того, чтобы значение получилось целым числом с нужным количеством знаков (десятичные дроби тогда ещё не нашли широкого применения).Непер взял M= 10 000 000.
- Строго говоря, Непер табулировал не ту функцию, которая сейчас называется логарифмом. Если обозначить его функцию $\mathrm{LogNap}(x)$
- то она связана с натуральным логарифмом следующим образом: $\mathrm{LogNap}(x) = M \cdot (\ln(M) - \ln(x))$
- Очевидно, $\mathrm{LogNap}(M) = 0$ то есть логарифм «полного синуса» (соответствующего 90°) есть нуль — этого и добивался Непер своим определением. Также он хотел, чтобы все логарифмы были положительны; нетрудно убедиться, что это условие для $x < M$ выполняется. $\mathrm{LogNap}(0) = \infty$

Основное свойство логарифма Непера

- Основное свойство логарифма Непера: если величины образуют геометрическую прогрессию, то их логарифмы образуют прогрессию арифметическую. Однако правила логарифмирования для неперовой функции отличались от правил для современного логарифма, например: $\mathrm{LogNap}(a \cdot b) = \mathrm{LogNap}(a) + \mathrm{LogNap}(b) - \mathrm{LogNap}(1)$

Дальнейшее развитие

- Дальнейшее развитие
- Как вскоре обнаружилось, из-за ошибки в алгоритме все значения таблицы Непера содержали неверные цифры после шестого знака. Однако это не помешало новой методике вычислений получить широчайшую популярность, и составлением логарифмических таблиц занялись многие европейские математики. Кеплер в изданный им астрономический справочник 1620 года вставил восторженное посвящение Неперу (не зная, что изобретатель логарифмов уже скончался). В 1624 году Кеплер опубликовал свой собственный вариант логарифмических таблиц (лат. Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos). Использование логарифмов позволило Кеплеру относительно быстро завершить многолетний труд по составлению Рудольфинских таблиц, которые закрепили успех гелиоцентрической астрономии.

- Математик Николас Меркатор (Кауфман) открыл и опубликовал в своей книге *Logarithmotechnia*разложение логарифма в бесконечный ряд. По мнению многих историков, появление логарифмов оказало сильное влияние на многие математические концепции, в том числе:

1. Формирование и признание общего понятия иррациональных и трансцендентных чисел.
2. Появление показательной функции и общего понятия числовой функции, числа Эйлера, развитие теории разностных уравнений.
3. Начало работы с бесконечными рядами.
4. Общие методы решения дифференциальных уравнений различных типов.
5. Существенное развитие теории численных методов, требуемых для вычисления точных логарифмических таблиц.

Обратное возведение в степень

- Близкое к современному понимание логарифмирования — как операции, обратной возведению в степень — впервые появилось у Валлиса (1685) и Иоганна Бернулли (1694), а окончательно было узаконено Эйлером. В книге «Введение в анализ бесконечных» (1748) Эйлер дал современные определения как показательной, так и логарифмической функций, привёл разложение их в степенные ряды, особо отметил роль натурального логарифма. Эйлеру принадлежит и заслуга распространения логарифмической функции на комплексную область.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ.

СОБЫТИЕ

- Под СОБЫТИЕМ понимается явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий.

ПРИМЕР. Бросаем шестигранный игральный кубик.
Определим события:
A {выпало четное число очков};
B {выпало число очков, кратное 3};
C {выпало более 4 очкков}.

Эксперимент (опыт)

ЭКСПЕРИМЕНТ (или опыт) заключается в наблюдении за объектами или явлениями в строго определенных условиях и измерении значений заранее определенных признаков этих объектов (явлений).

ПРИМЕРЫ

- сдача экзамена,
- наблюдение за дорожно-транспортными происшествиями,
- выстрел из винтовки,
- бросание игрального кубика,
- химический эксперимент,
- и т.п.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ

Эксперимент называют СТАТИСТИЧЕСКИМ, если он может быть повторен в практически неизменных условиях неограниченное число раз.

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

СЛУЧАЙНЫМ называют событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта). Обозначают заглавными буквами А, В, С, Д,… (латинского алфавита).

Рассмотрим несколько наиболее «излюбленных» в теории вероятностей примеров случайных экспериментов.

Опыт 1:

- ***Подбрасывание монеты.*** Испытание – подбрасывание монеты; события – монета упала «орлом» или «решкой».

«решка» - лицевая сторона монеты (аверс)

«орел» - обратная сторона монеты (реверс)

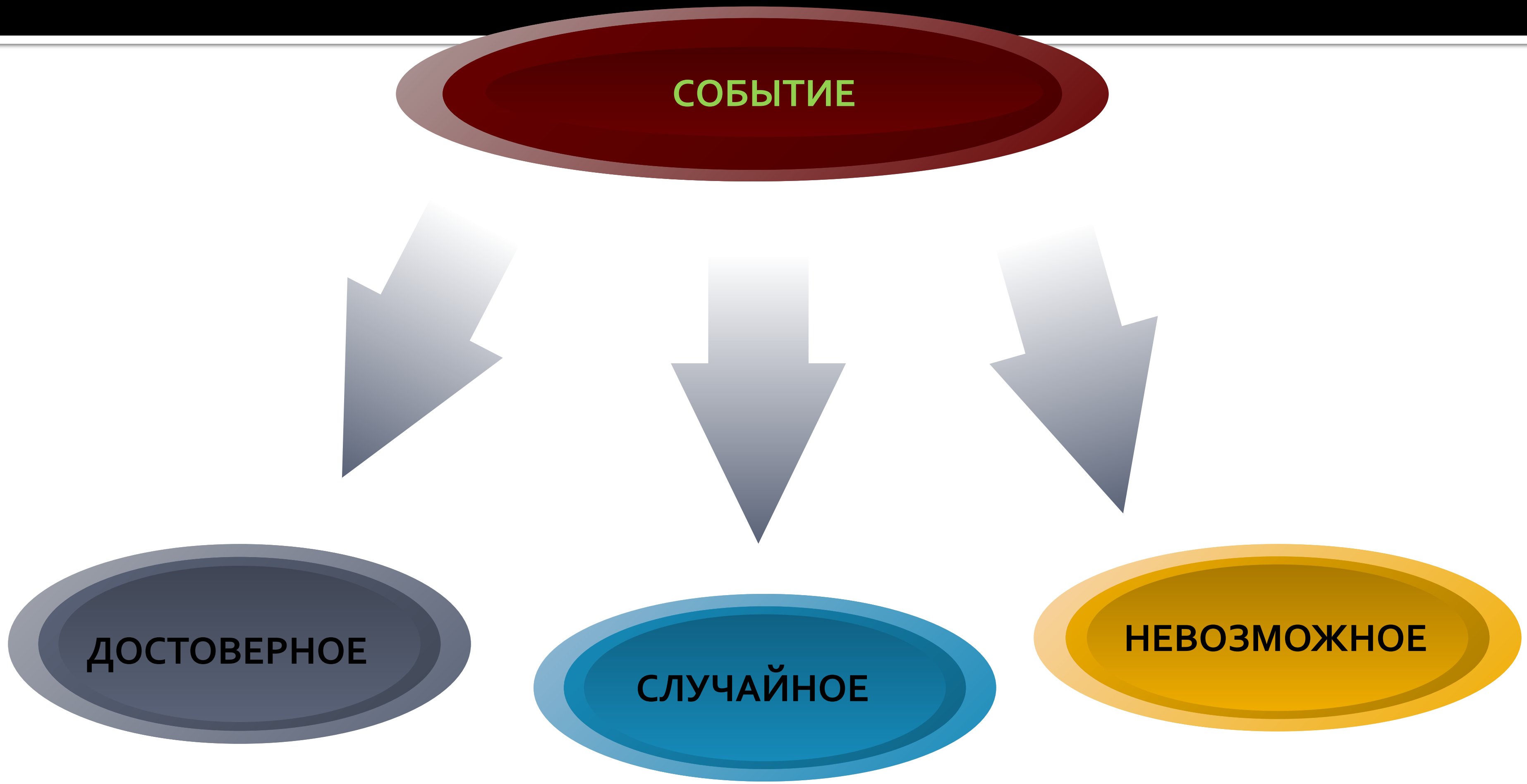
Опыт 2:

- ***Подбрасывание кубика.*** 

  Это следующий по популярности после монеты случайный эксперимент.

  Испытание – подбрасывание кубика; события – выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (и другие).

Типы событий



Примеры событий

досто-верные

1. ПОСЛЕ ЗИМЫ НАСТУПАЕТ ВЕСНА.
2. ПОСЛЕ НОЧИ ПРИХОДИТ УТРО.
3. КАМЕНЬ ПАДАЕТ ВНИЗ.
4. ВОДА СТАНОВИТСЯ ТЕПЛЕЕ ПРИ НАГРЕВАНИИ.

слу-чайные

1. НАЙТИ КЛАД.
2. БУТЕРБРОД ПАДАЕТ МАСЛОМ ВНИЗ.
3. В ШКОЛЕ ОТМЕНИЛИ ЗАНЯТИЯ.
4. ПОЭТ ПОЛЬЗУЕТСЯ ВЕЛОСИПЕДОМ.
5. В ДОМЕ ЖИВЕТ КОШКА.

невоз-можные

1. 30 ФЕВРАЛЯ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ.
2. ПРИ ПОДБРАСЫВАНИИ КУБИКА ВЫПАДАЕТ 7 ОЧКОВ.
3. ЧЕЛОВЕК РОЖДАЕТСЯ СТАРЫМ И СТАНОВИТСЯ С КАЖДЫМ ДНЕМ МОЛОЖЕ.

- **Однозначные исходы предполагают единственный результат того или иного события:** смена дня и ночи, смена времени года и т.д.

Неоднозначные исходы предполагают несколько различных результатов того или иного события:

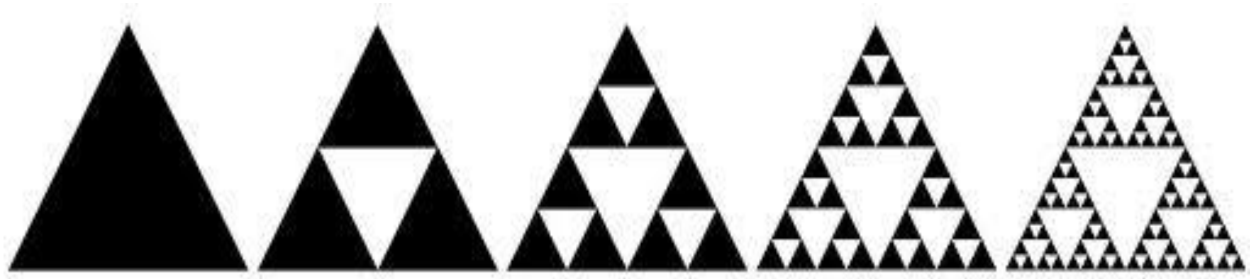
При подбрасывании кубика выпадают разные грани; выигрыш в Спортлото; результаты спортивных игр.

Информатика и вычислительная техника

$$\mathrm{Log}_2 N + 1$$

Фракталы и размерность

Треугольник Серпинского :



Размерность результата определяется по формуле:

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58$$

Механика и физика

Принцип Больцмана:

$$S = k \cdot \ln(\Omega)$$

Формула Циолковского:

$$V = I \cdot \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

Химия и физическая химия

Уравнение Нернста:

$$E = E^0 + \frac{RT}{nF}\ln\frac{a_{\mathrm{Ox}}}{a_{\mathrm{Red}}}$$

Показатель константы автопротолиза:

$$\mathrm{p}K_s = -\lg K_s$$

Теория музыки

$$\log_2 \frac{3}{2} \approx 0{,}585$$

Психология и физиология

Закон Вебера-Фехнера: $p = k \ln \frac{S}{S_0}$

Закон Фиттса: $T = a + b \log_2 \left(\frac{D}{W} + 1 \right)$

Закон Хикса: $T = b \cdot \log_2 (n + 1)$

Биология

Раковина наутилуса

Расположение семян на подсолнечнике

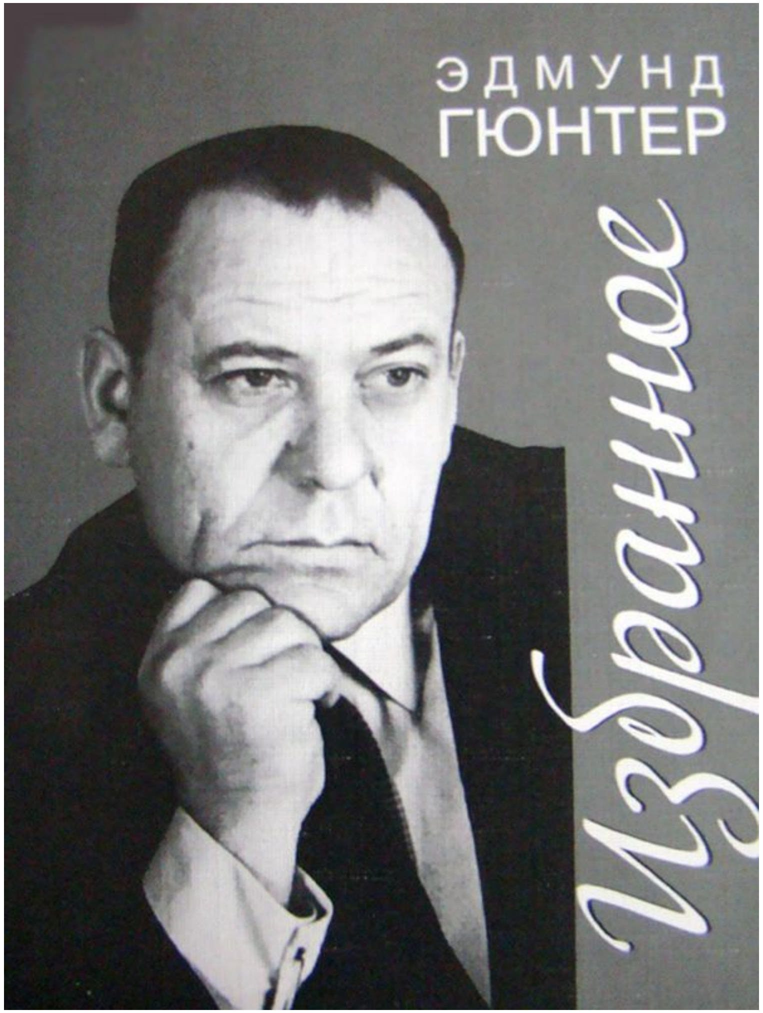
Цветная капуста Романеско

Логарифм

Логарифмическая шкала. Логарифмическая линейка. Логарифмическая таблица.

История создания логарифмической шкалы.

Первую попытку упростить и ускорить работу с логарифмическими таблицами предпринял Эдмунд Гюнтер, профессор астрономии Грэшемского колледжа. Он разработал шкалу, состоящую из нескольких отрезков, располагающихся параллельно на деревянной или медной пластине. На каждый отрезок наносились деления, соответствующие логарифмам чисел или тригонометрических величин.



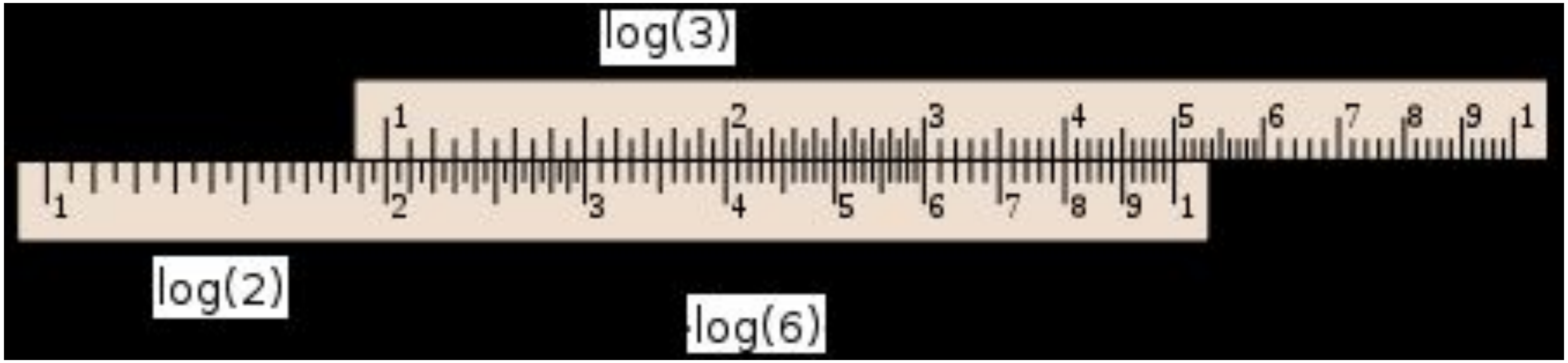
Фрагмент шкалы Гюнтера

Логарифмическая шкала и её применение.

Шкала называется логарифмической, если на ней нанесены логарифмы чисел, а отметками шкалы являются сами числа.

- Акустика-уровень звукового давления и интенсивность звука
- Астрономия-шкала яркости звезд
- Химия-активность водородных ионов
- Сейсмология-шкала Рихтера
- Сельское хозяйство-основная гидрофизическая характеристика почвы.
- Шкала выдержек и диафрагм в фотографии.

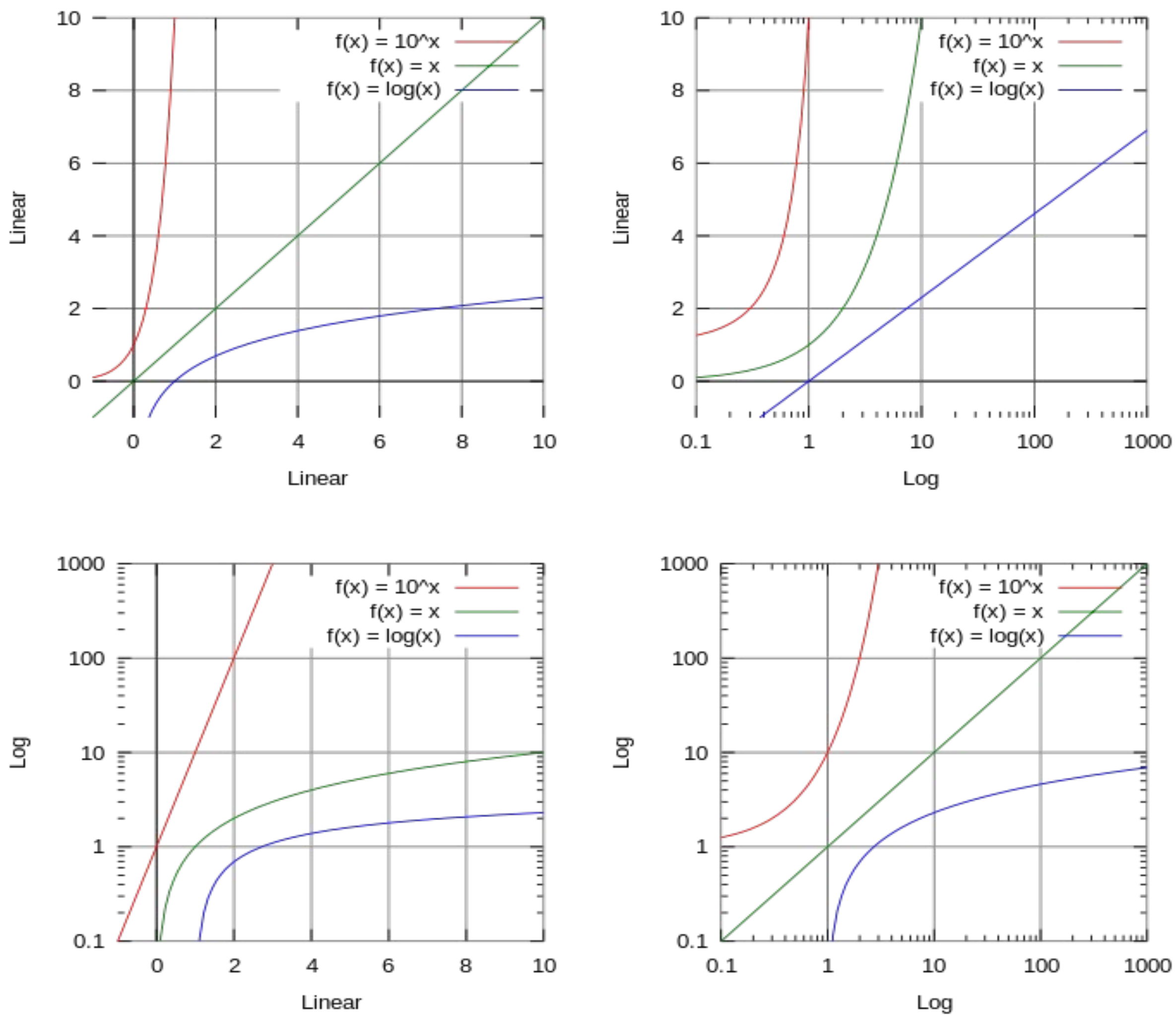
Логарифмическая шкала



Логарифмическая шкала

Логарифмическая шкала также широко применяется для оценки показателя степени в степенных зависимостях и коэффициента в показателе экспоненты. При этом график, построенный в логарифмическом масштабе по одной или двум осям, принимает вид прямой, более простой для исследования.

График функции логарифма



Графики трёх функций при различном выборе шкал по осям координат:

(1) обе линейные,

(2) логари-фмическая (x) и линейная (y),

(3) линейная (x) и логарифмическая (y),

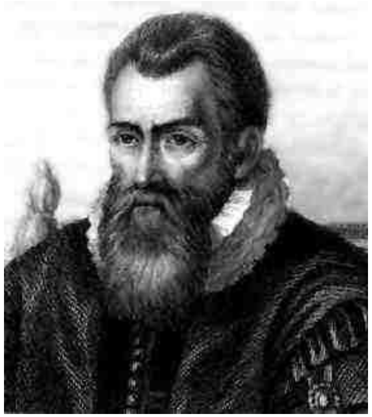
(4) обе логари-фмические.

Логарифмические таблицы

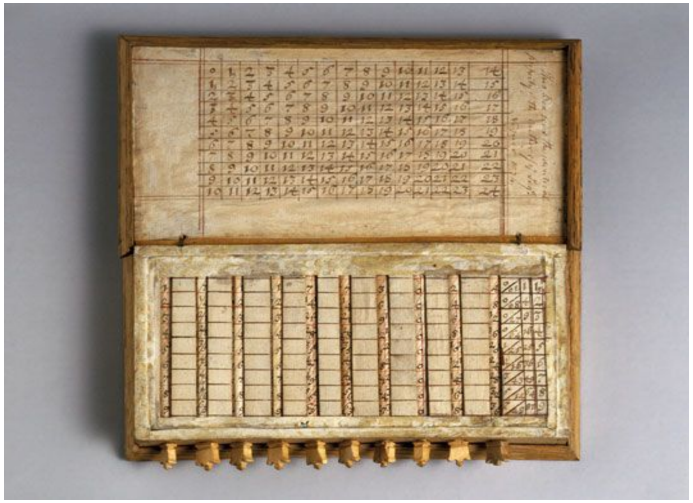
Из свойств логарифма следует, что вместо трудоёмкого умножения многозначных чисел достаточно найти (по таблицам) и сложить их логарифмы, а потом по тем же таблицам (раздел «Антилогарифмы») выполнить потенцирование, то есть найти значение результата по его логарифму. Выполнение деления отличается только тем, что логарифмы вычитаются.

История логарифмической таблицы

Первые таблицы логарифмов опубликовал Джон Непер (1614), и они содержали только логарифмы тригонометрических функций, причём с ошибками. Независимо от него свои таблицы опубликовал Йост Бюрги, друг Кеплера (1620). В 1617 году оксфордский профессор математики Генри Бригс опубликовал таблицы, которые уже включали десятичные логарифмы самих чисел, от 1 до 1000, с 8 (позже — с 14) знаками. Но и в таблицах Бригса обнаружились ошибки. Первое безошибочное издание на основе таблиц Георга Веги (1783) появилось только в 1857 году в Берлине (таблицы Бремикера).



Джон Непер



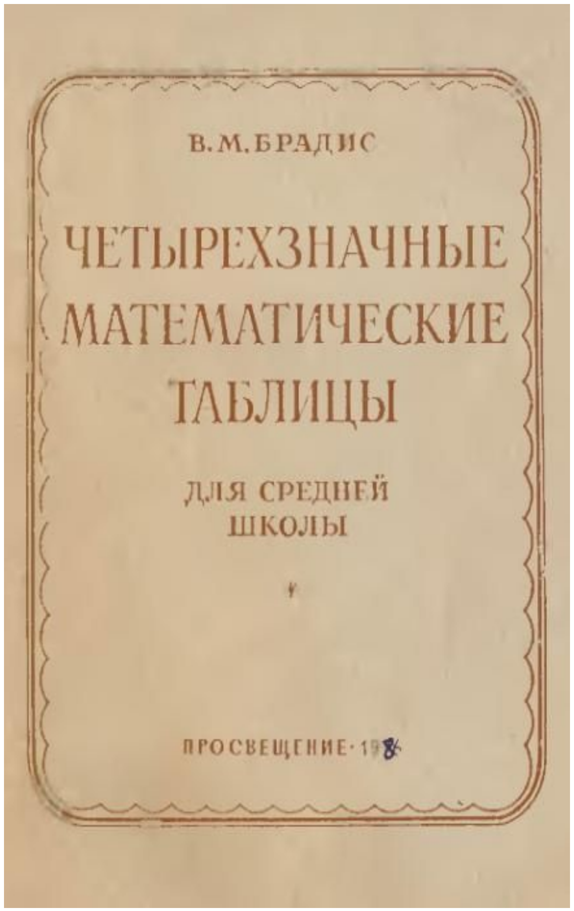
Логарифмическая таблица Непера

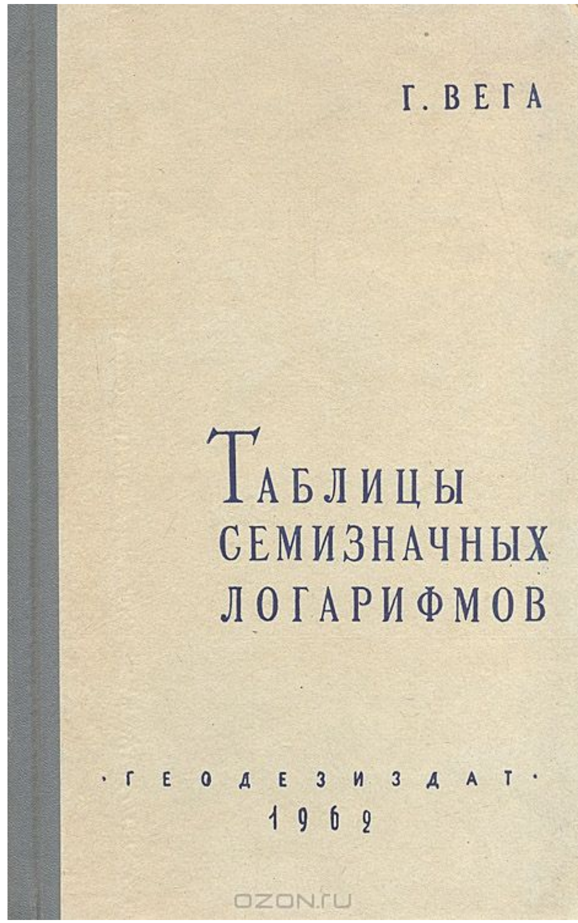
История логарифмической таблицы

В России первые таблицы логарифмов были изданы в 1703 году при участии Л. Ф. Магницкого. В СССР выпускались несколько сборников таблиц логарифмов.

- 1.Брадис В. М. Четырёхзначные математические таблицы.
- 2.Вега Г. Таблицы семизначных логарифмов
- 3. Бремикер К. Логарифмо-тригонометрические таблицы

Логарифмические таблицы





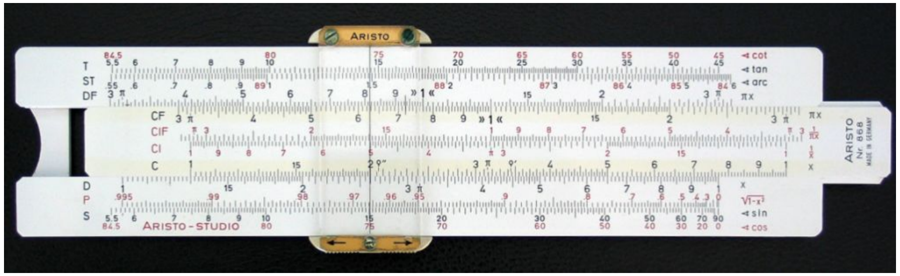
Логарифмическая линейка

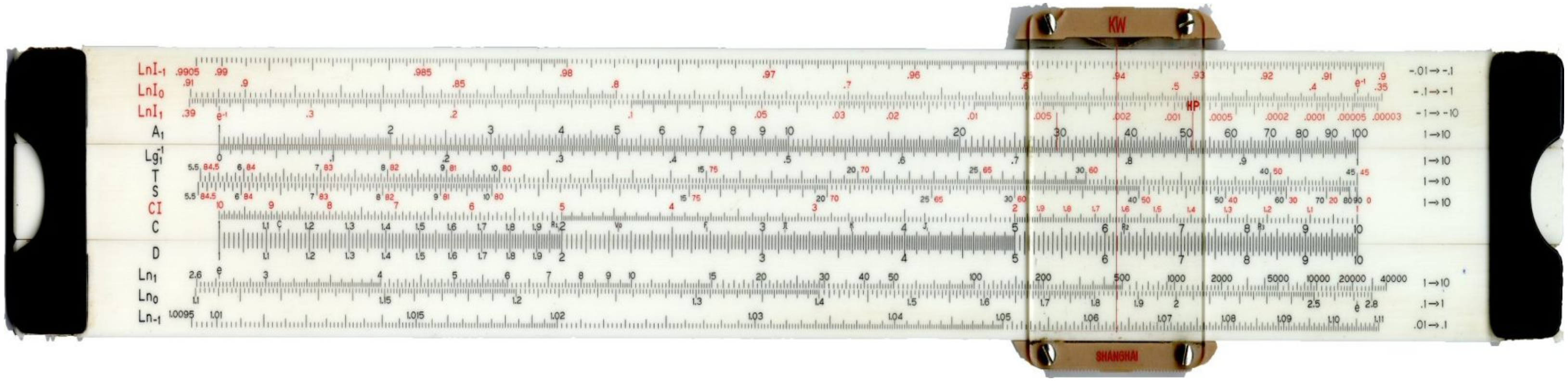
Логарифми́ческая лине́йка, Счётная линейка — аналоговое вычислительное устройство, позволяющее выполнять несколько математических операций, в том числе умножение и деление чисел, возведение в степень (чаще всего в квадрат и куб) и вычисление квадратных и кубических корней, вычисление логарифмов, потенцирование, вычисление тригонометрических и гиперболических функций и другие операции.

История логарифмической линейки

В 1620-е годы Эдмунд Уингейт и Уильям Отред изобрели первую логарифмическую линейку, до появления карманных калькуляторов служившую незаменимым расчётным орудием инженера. С помощью этого компактного инструмента можно быстро производить все алгебраические операции, в том числе с участием тригонометрических функций. Точность расчётов — около 3 значащих цифр.

Уильям Отред





KW
SHANGHAI
LnI-1
LnI0
LnI1
A1
Lg1
T
S
CI
C
D
Ln1
Ln0
Ln-1

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!