Функция нескольких действительных переменных

Условный экстремум

Наибольшее и наименьшее значение ФНДП

Условный экстремум

- В прикладных задачах достаточно часто необходимо отыскать экстремумы функции двух или более переменных, аргументы которых удовлетворяют дополнительным условиям.
- Дополнительные условия – ***уравнения связи (***одно или несколько).
- В этом случае говорят об ***условном экстремуме функции.***

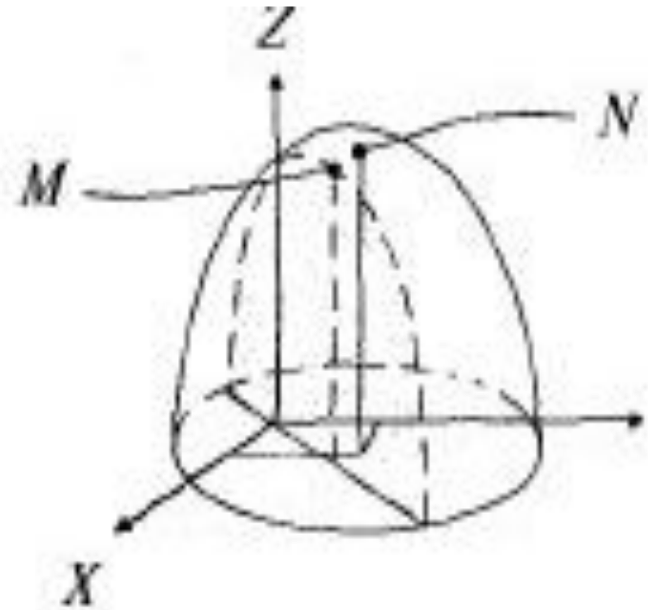
Пример. Найти точки экстремума функции $z = 4 - x^2 + 2x - y^2 + 4y$, если уравнение связи $y - x = 0$.

В самом простом случае уравнение связи позволяет выразить одну из переменных через другую. В рассмотренном выше примере: $y = x$. Это позволяет исследовать функцию $z = f(x, y)$ как функцию одного переменного:

$$z = 4 - x^2 + 2x - y^2 + 4y = 4 - x^2 + 2x - x^2 + 4x = -2x^2 + 6x + 4.$$

Так как изначально область определения функции R^2, то исследуем полученную функцию $z(x) = -2x^2 + 6x + 4$ на экстремум по переменной $x \in R$.

Найдем критическую точку $z'(x) = -4x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1{,}5$. Так как $z''(x) = -4 < 0 \Rightarrow x = 1{,}5$ точка максимума. Следовательно, вдоль линии $y = x$ функция имеет условный экстремум в точке M (1,5; 1,5) в виде максимума $Z(M) = 8{,}5$.



Наибольшее и наименьшее значение функции в ограниченной замкнутой области

Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области аналогичны свойствам непрерывных на отрезке функций одной переменной.

Теорема. *Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области:*

1) ограничена;

2) имеет точки, в которых принимает наименьшее $\boldsymbol{m}$ *и наибольшее* $\boldsymbol{M}$ *значения;*

3) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между $\boldsymbol{m}$ *и* $\boldsymbol{M}$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в ограниченной замкнутой области D

1. Найти область определения функции $z = f(x, y)$.
2. Определить, включена ли область D в область определения функции.
3. Найти критические точки функции $z = f(x, y)$, отобрать из них те, которые являются внутренними точками области D. Вычислить значение функции $z = f(x, y)$ в этих точках.
4. Найти наибольше и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границе области D .
5. Сравнить все найденные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - 2y \text{ в области D: } \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

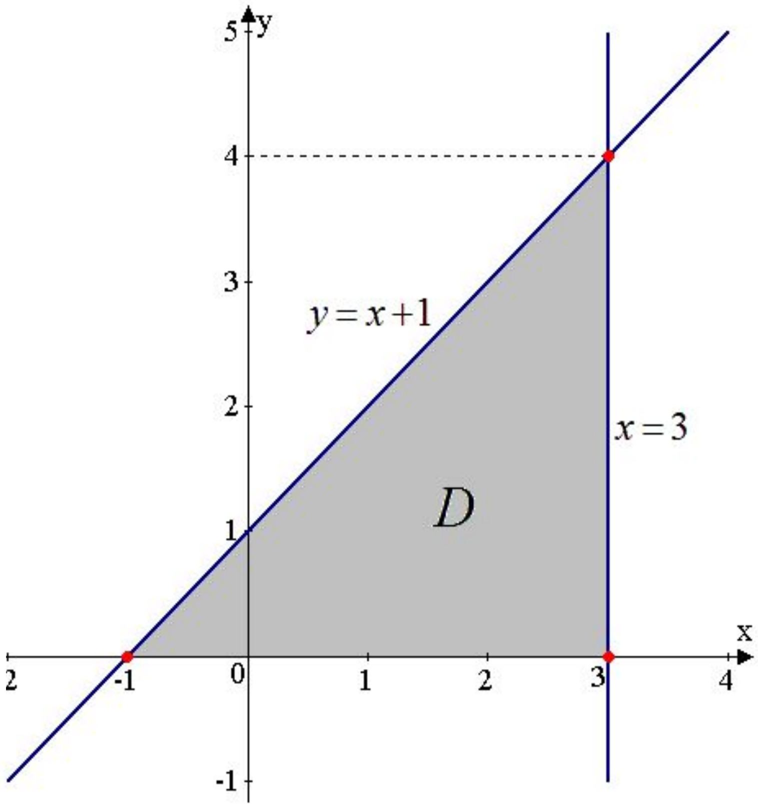
Область определения функции R^2.

Область D - замкнутая, ограниченная, входит в область определения функции.

Находим критические точки функции $\begin{cases} z'_x = 2x + 1 = 0 \\ z'_y = 6y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$

. Критическая точка $M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$ - внутренняя точка области D.

Значение $z(M) = -\frac{7}{12}$.



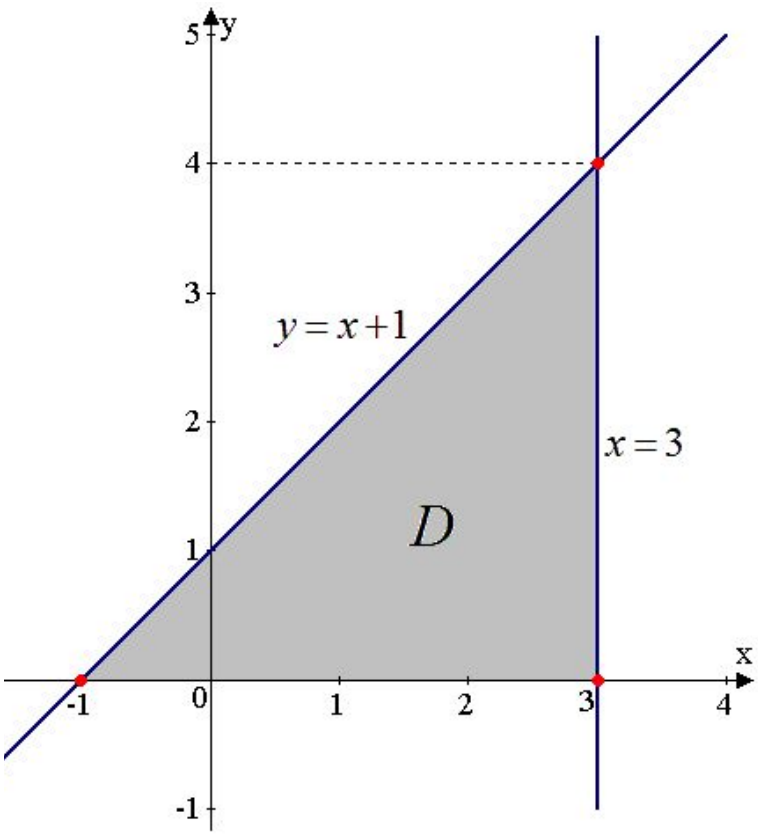
Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - 2y \text{ в области D: } \begin{cases} x - y + 1 \ge 0 \\ x \le 3 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Граница области D – объединение трех отрезков. Исследуем поведение функции на каждом по отдельности.

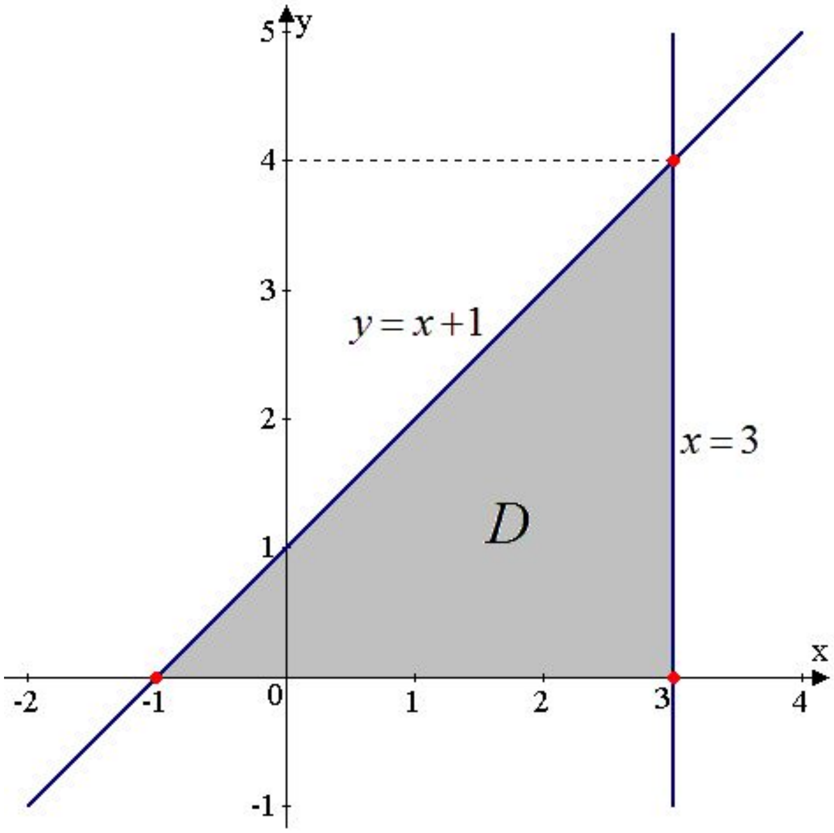
При $y = 0$ функция $z = x^2 + 3y^2 + x - 2y$ является функцией одной переменной $z(x) = x^2 + x \; (-1 \le x \le 3)$. Критическая точка $x = -\frac{1}{2} \in [-1;3]$. Вычислим значение функции в ней и на концах отрезка [-1;3]:

$z(-1;0) = 0$; $z(3;0) = 12$; $z(-\frac{1}{2};0) = -\frac{1}{4}$.



Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - 2y \text{ в области D: } \begin{cases} x - y + 1 \ge 0 \\ x \le 3 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



При $x = 3$ функция $z = x^2 + 3y^2 + x - 2y$ является функцией одной переменной $z(y) = 3y^2 - 2y + 12\,(0 \le y \le 4)$. Критическая точка $y = \frac{1}{3} \in [0;4]$. Вычислим значение функции в ней и на концах отрезка $[0;4]$:

$$z(3;\tfrac{1}{3}) = 11\tfrac{2}{3};\quad z(3;0) = 12;\quad z(3;4) = 52.$$

Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции

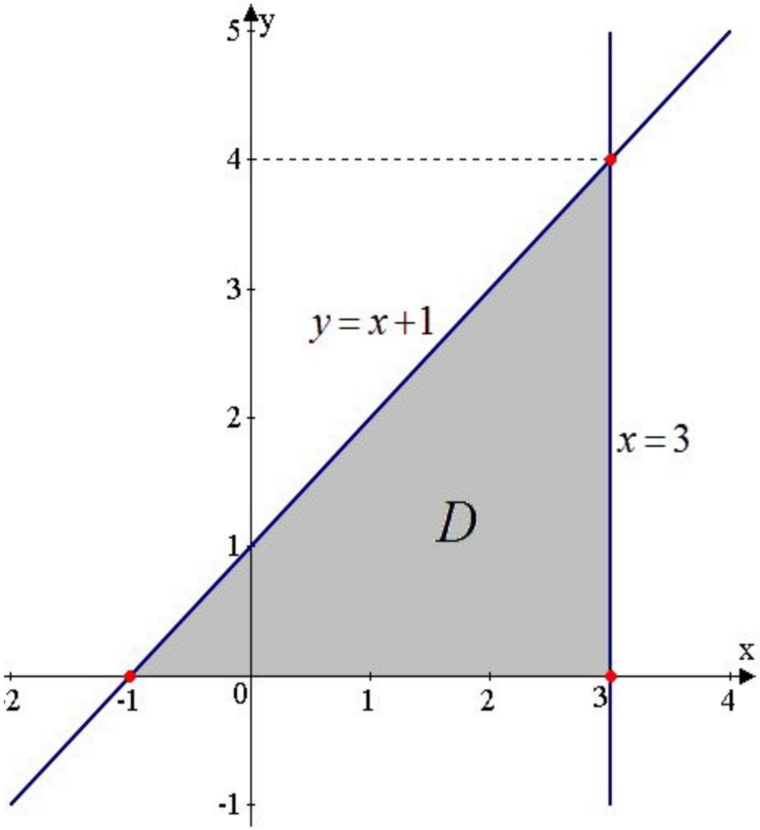
$z = x^2 + 3y^2 + x - 2y$ в области D: $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Вдоль прямой $y = x + 1$ функция $z = x^2 + 3y^2 + x - 2y$ является функцией одной переменной $z(x) = 4x^2 + 5x + 1 \; (-1 \leq x \leq 3)$.

Критическая точка $x = -\frac{5}{8} \in [-1; 3]$.

Вычислим значение функции в ней и на концах отрезка

[-1;3]: $z(-\frac{5}{8}; \frac{3}{8}) = -\frac{9}{16}$; $z(-1;0) = 0$; $z(3;4) = 52$.



Ответ:

Наибольшее значение функции достигается на границе области $z(3;4) = 52$; наименьшее – внутри области $z(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}) = -\frac{7}{12}$.