Аналіз характеристик КС на основі теорії марківських процесів

ЛЕКЦІЯ 5:

ПЛАН:

ГОЛОВНІ АСПЕКТИ ВКАЗАНОГО ПИТАННЯ

- ❖ **Марківський процес**
- ❖ **Марківський ланцюг**
- ❖ **Граф марківського ланцюга**

5.1 Основні поняття теорії марківских процесів

- ***Марківським*** **називається випадковий процес, стан якого в черговий момент часу t+δ залежить тільки від поточного стану в момент часу t.**

- **Марківський процес з дискретними станами отримав назву *марківського ланцюга*.**

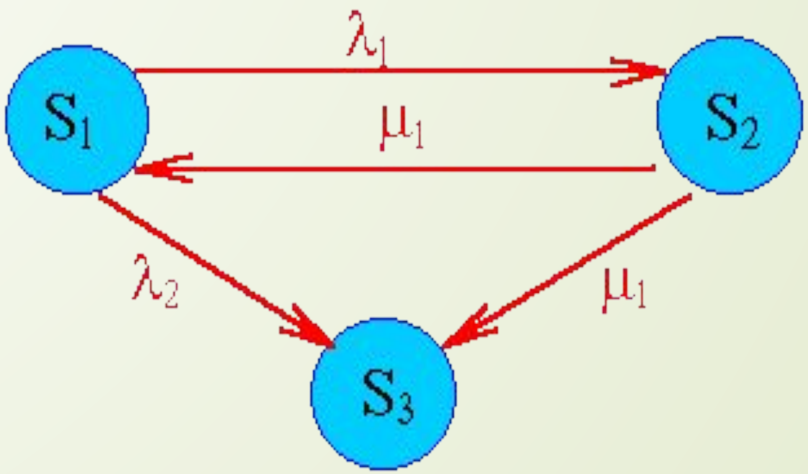

Рис. 5.1 - Граф марківського ланцюга

Рівняння Колмогорова для графа 5.1:

$$p_1'(t) = -p_1(t)\left[\lambda_1 + \lambda_2\right] + p_2(t)\mu_1.$$

Дискретний марківський ланцюг визначається наступними параметрами:

1. безліччю станів $S = \{s_1, \dots, s_K\}$;
2. матрицею ймовірностей переходів $P = [p_{ij}]$, де елемент матриці p_{ij} - ймовірність, з якою процес переходить зі стану i в стан j;
3. вектором початкових ймовірностей $\pi_0 = \{p_1^{(0)}, \dots, p_k^{(0)}\}$, який визначає ймовірності $p_i^{(0)}$ такі, при яких в початковий момент часу $t=0$ процес знаходиться в стані s_i

Марківські ланцюги поділяються на поглинаючі і ергодичні.

- ***ПОГЛИНАЮЧІ ЛАНЦЮГИ*** **використовуються в якості тимчасових моделей програм і обчислювальних процесів**

- ***ЕРГОДИЧНІ ЛАНЦЮГИ*** **використовуються для вирішення задач розрахунку надійності. При цьому необхідні показники (характеристики) якості системи виражаються через ймовірнісні показники марківських ланцюгів.**

Методика аналізу характеристик КС полягає в наступному:

- вводиться поняття стану системи. В якості станів може задаватися розподіл завдань на пристроях, ймовірність використання ресурсів і-го типу і т. п.;
- вказуються всі стани, в яких може перебувати система;
- складається граф станів системи згідно з логікою розв'язуваної задачі;
- вказується початковий стан системи;
- для кожної дуги графа вказується інтенсивність переходу;

5.2 Методика аналізу характеристик КС на основі марківських ланцюгів

Методика аналізу характеристик КС:

- складається система рівнянь Колмогорова, що зв'язує стан системи з інтенсивностями переходів між станами за наступним правилом: похідна ймовірності i-го стану дорівнює сумі добутків ймовірностей станів на інтенсивності переходів системи в цей стан (добуток входить в рівняння зі знаком "+", якщо дуга графа входить в даний стан, і зі знаком "-", якщо дуга графа виходить з цього стану).
- вирішується отримана система диференціальних рівнянь;
- знаходяться показники якості ОС на основі знайдених ймовірностей стану системи.

5.2 Методика аналізу характеристик КС на основі марківських ланцюгів

ГОЛОВНІ АСПЕКТИ ВКАЗАНОГО ПИТАННЯ

- ❖ Моделі оцінки трудомісткості алгоритму
- ❖ Порядок розрахунку трудомісткості алгоритмів
- ❖ Методика розрахунку трудомісткості алгоритмів
- ❖ Мінімальне та максимальне значення трудомісткості

5.3 Основні задачі теорії КС, які вирішуються на основі марківських ланцюгів

- ***Трудомісткість алгоритму*** **– це кількість обчислювальної роботи, необхідної для реалізації алгоритму.**

У задачах оцінки трудомісткості оператори алгоритму поділяють на :

- ***Функціональний оператор*** задає перетворення на множині даних, тобто задає деяку сукупність обчислювальних операцій.
- ***Оператор переходу*** задає порядок обчислення функціональних операторів і правило вибору одного з можливих шляхів розвитку обчислювального процесу в даному випадку.
- ***Оператор введення-виведення*** задає звернення до певного файлу з метою передачі деякої кількості інформації.

- **Сукупність операторів і зв'язків між ними найбільш наочно представляється *графом алгоритму.***

Вершини графа бувають трьох типів :

- ***Початкова вершина*** визначає початок алгоритму. Ця вершина не має жодного входу і має тільки один вихід.
- ***Кінцева вершина*** визначає кінець алгоритму і має не менше одного входу і жодного виходу .
- ***Операторна вершина*** відповідає основному оператору або оператору введення-виведення. Якщо вона представляє ***функціональний оператор*** або введення-виведення, то може мати не менш одного входу і тільки один вихід. Якщо вона представляє ***оператор переходу***, то може мати не менш одного входу і не менш двох виходів

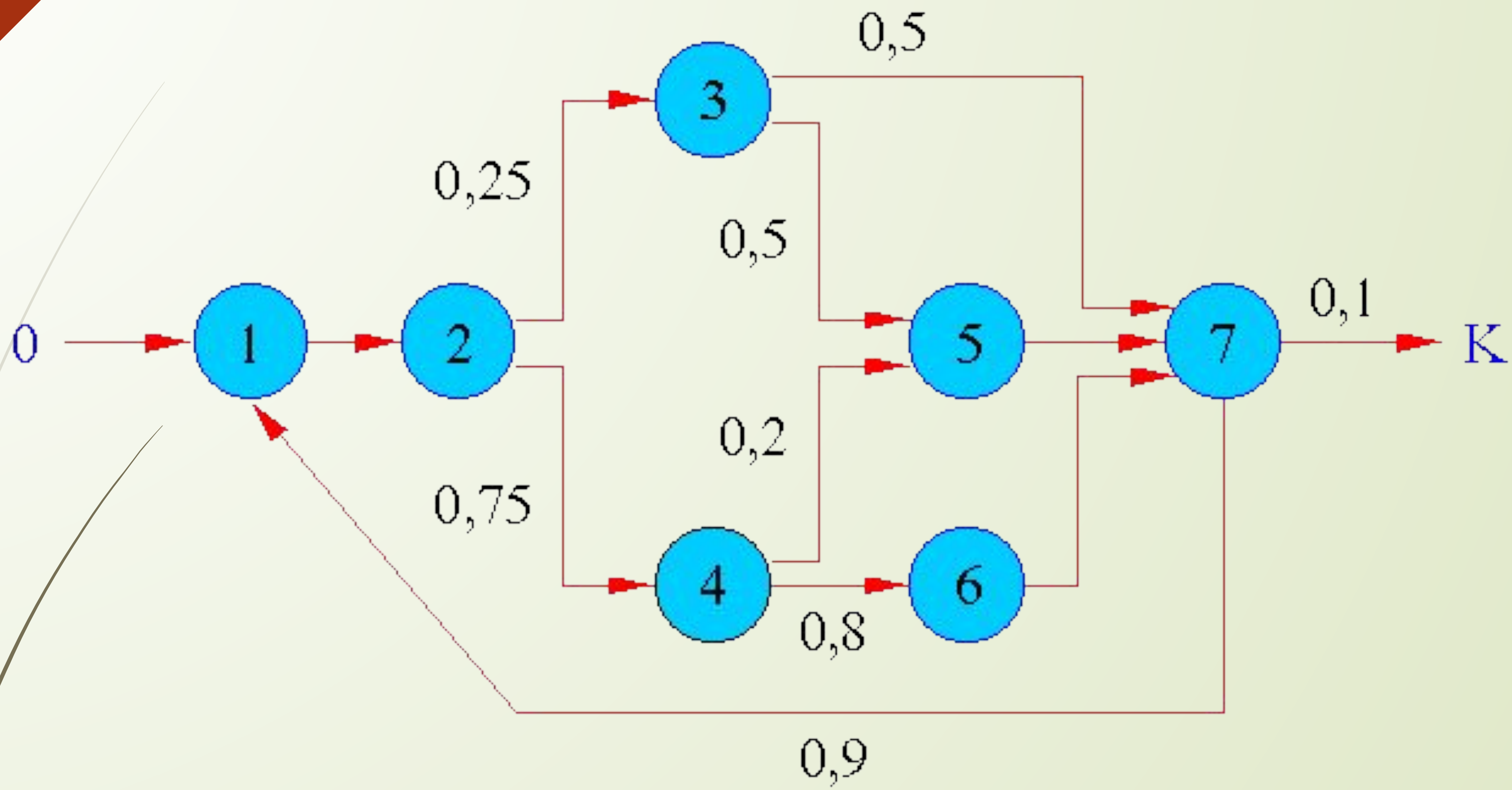

Рисунок 5.2 - Приклад графа алгоритму

Граф алгоритму є коректним, якщо виконуються умови:

- мається тільки одна початкова й лише одна кінцева вершина;
- кожній вершини крім початкової притаманний принаймні один шлях, що веде в цю вершину з початкової;
- з кожної вершини крім кінцевої існує принаймні один шлях, що веде з цієї вершини в кінцеву;
- за будь-яких значних логічних умов існує шлях з початкової вершини в кінцеву, причому будь-якому фіксованому набору значень умов відповідає тільки один такий шлях;
- вихід з будь-якої вершини повинен вести тільки до однієї вершині графа.

Для розрахунку алгоритму, що не містить цикли, необхідно

1) пронумерувати вершини графа у порядку їх слідування таким чином: початковій вершині присвоюється номер 0; черговий номер присвоюється вершині, до якої входять дуги від уже пронумерованих вершин з номерами, меншими. Кінцева вершина графа буде мати максимальний номер .

2) для кожної вершини обчислити середню кількість влучень обчислювального процесу в цю вершину за формулою:

$$n_i = \sum_{j=1}^{K} p_{ji} n_j \quad i = 2, \ldots, K-1$$

p_{ji} - ймовірність переходу з вершини **j** в вершину **i**

Характеристика трудомісткості обчислюється за формулою

$$\theta = \sum_{V_i \in S_0} n_i k_i$$

Цикли поділяють по рангах:

- до рангу 1 відносяться цикли, які не містять в собі жодного циклу;.
- до рангу 2 - цикли, всередині яких є цикли не вище рангу 1, і т.д.

Сукупність операторів, що входять в цикл, і усі дуги, за винятком дуги, що замикає цикл, називають ***тілом циклу***.

Трудомісткість тіла циклу ***C*** визначається формулою:

$$\sum_{V_j \in C} k_j n_j$$

Якщо ймовірність переходу по дузі, що замикає цикл, дорівнює

p_{kl} то $n_C = 1 + p_{kl} n_C$

Відповідно середнє число повторень циклу визначається виразом:

$$n_C = \frac{1}{1 - p_{kl}}$$

Тоді середня трудомісткість циклу:

$$k_C = n_C \sum_{V_j \in C} k_j n_j$$

Відповідно цикл С можна замінити оператором з трудомісткістю

Для оцінки трудомісткості алгоритму необхідно:

- розбити безліч операторів на класи:
  - *основних операторів*
  - *операторів введення-виведення*
- для кожного основного оператора визначити кількість операцій і для кожного оператора введення-виведення визначити середню кількість інформації, що передається при виконанні оператора;
- переходи між операторами слід розглядати як випадкові події і характеризувати їх ймовірностями, тобто кожна дуга графа алгоритму відзначається ймовірністю переходу, з якою перехід з однієї вершини до іншої виконується саме по цій дузі.

Ймовірності переходів повинні відповідати умові:

$$\sum_{j=1}^{K} p_{ij} = 1 \qquad (i = 0,\dots, K-1)$$

Тоді характеристика трудомісткості може бути обчислена через середнє число операцій:

$$\theta = \sum_{V_i \in S_0} n_i k_i$$

Одним із способів розрахунку зазначених величин є знаходження коренів системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$n_i = \delta_{1i} + \sum_{j=1}^{K-1} p_{ji} n_j \qquad i = 1,\dots, K-1$$

Канонічний запис системи рівнянь має вигляд :

$$
\begin{cases}
(p_{11}-1)n_1 + p_{21}n_2 + \ldots + p_{K-1,1}n_{K-1} = -1 \\
p_{12}n_1 + (p_{22}-1)n_2 + \ldots + p_{K-1,2}n_{K-1} = 0 \\
\vdots \\
p_{1,K-1}n_1 + p_{2,K-1}n_2 + \ldots + (p_{K-1,K-1}-1)n_{K-1} = 0
\end{cases}
$$

Розглянутий спосіб визначення трудомісткості алгоритмів є *<u>універсальним</u>*, дозволяючи отримувати оцінки для алгоритмів з будь-якою структурою, але потребує вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку. Тому для виконання необхідних розрахунків цей спосіб передбачає використання ЕОМ.

Існують два методи оцінки трудомісткості - *<u>універсальний і мережевий.</u>*

Мережевий метод відрізняється меншими витратами, але придатний для графів, в яких відсутні цикли. У ряді випадків корисно знати мінімальний і максимальний час виконання, які відповідають шляхам мінімальної та максимальної довжини на графі алгоритму

Мінімальне та максимальне значення трудомісткості

Для початкової вершини маємо

$$A_0 = 0 \qquad B_0 = 0$$

Для решти вершин значення трудомісткості визначається як:

$$A_i = \min_{(j,i)\in D}(A_j) + k_{i\,\min} \qquad B_i = \max_{(j,i)\in D}(B_j) + k_{i\,\max}$$

Для кінцевої вершини графа обчислюються значення :

$$A_K = \min_{(j,K)\in D}(A_j) \qquad B_K = \max_{(j,K)\in D}(B_j)$$

Ці значення ***характеризують мінімальну і максимальну трудомісткість алгоритму.***

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

***Задача № 1.* Розрахунок надійності обчислювальних систем з частковим контролем за відсутності профілактики-чеських випробувань.**

Постановка задачі. Задана ОС (обчислювальна система), для якої можна виділити три стани:

s_1 - система працездатна;

s_2 - в системі виявлено відмову;

s_3 - в системі відмову не виявлено.

Відомі також такі величини:

λ_0 - інтенсивність відмов;

μ_B - інтенсивність відновлення;

g - частка контрольованого обладнання.

Потрібно знайти коефіцієнт готовності $K_г$ обчислювальної системи. Марківський ланцюг для даної задачі представлений на рисунку 5.3.

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

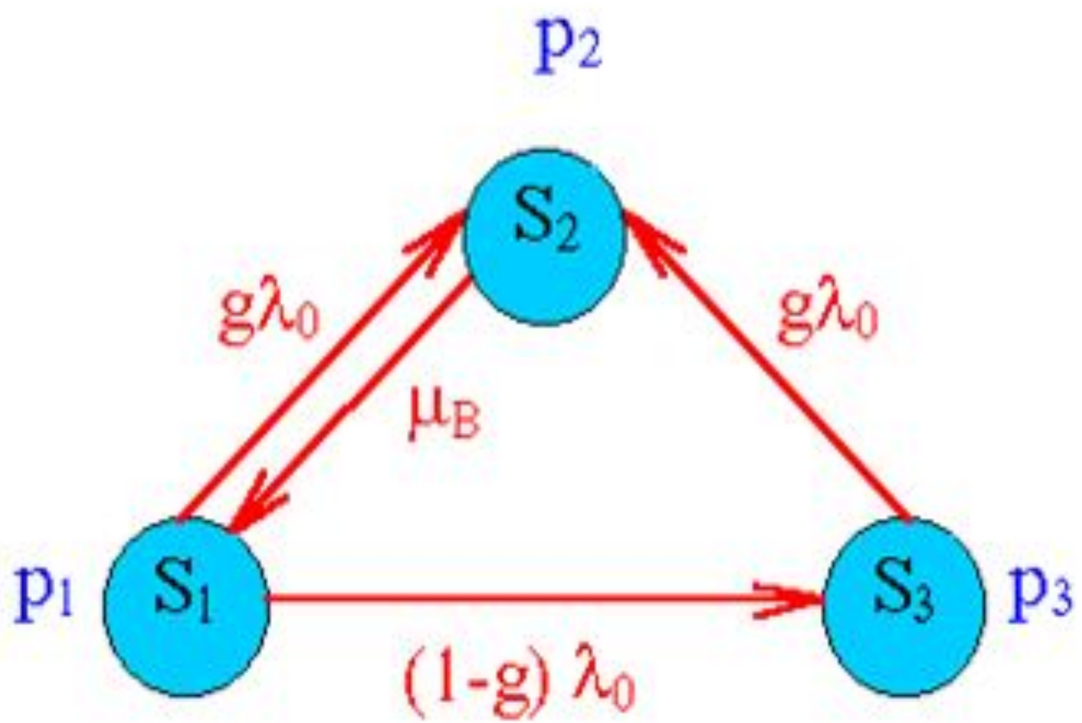

Рисунок 5.3 - Граф марківського ланцюга до задачі 1

Складемо систему рівнянь Колмогорова для даного ланцюга:

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

$$\begin{cases} -p_1 g\lambda_0 + p_2\mu_B - p_1(1-g)\lambda_0 = 0 \\ -p_2\mu_B + p_1 g\lambda_0 + p_3 g\lambda_0 = 0 \\ -p_3 g\lambda_0 + p_1(1-g)\lambda_0 = 0. \end{cases}$$

Вирішивши систему, отримаємо:

$$p_1 = \frac{g\mu_B}{(\mu_B + g\lambda_0)};$$

$$p_2 = \frac{\lambda_0 p_1}{\mu_B};$$

$$p_3 = \frac{(1-g)p_1}{g}.$$

Отриманий вираз для $\mathbf{p_1}$ визначає коефіцієнт готовності для ОС з час

ковим контролем за відсутності періодичних профілактичних випробуван

тобто $K_г = p_1$.

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

Задача 2. **Розрахунок надійності обчислювальних систем з частковим контролем обладнання та періодичними профілактичними випробуваннями.**

Постановка задачі. Задана обчислювальна система, у якій можна виділити п'ять станів:

S_1 - система працездатна;

S_2 - в системі виявлено відмову;

S_3 - стан невиявленої відмови;

S_4 - стан виконання профілактичних випробувань;

S_5 - в системі встановлена прихована відмова в результаті профілактичних випробувань.

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

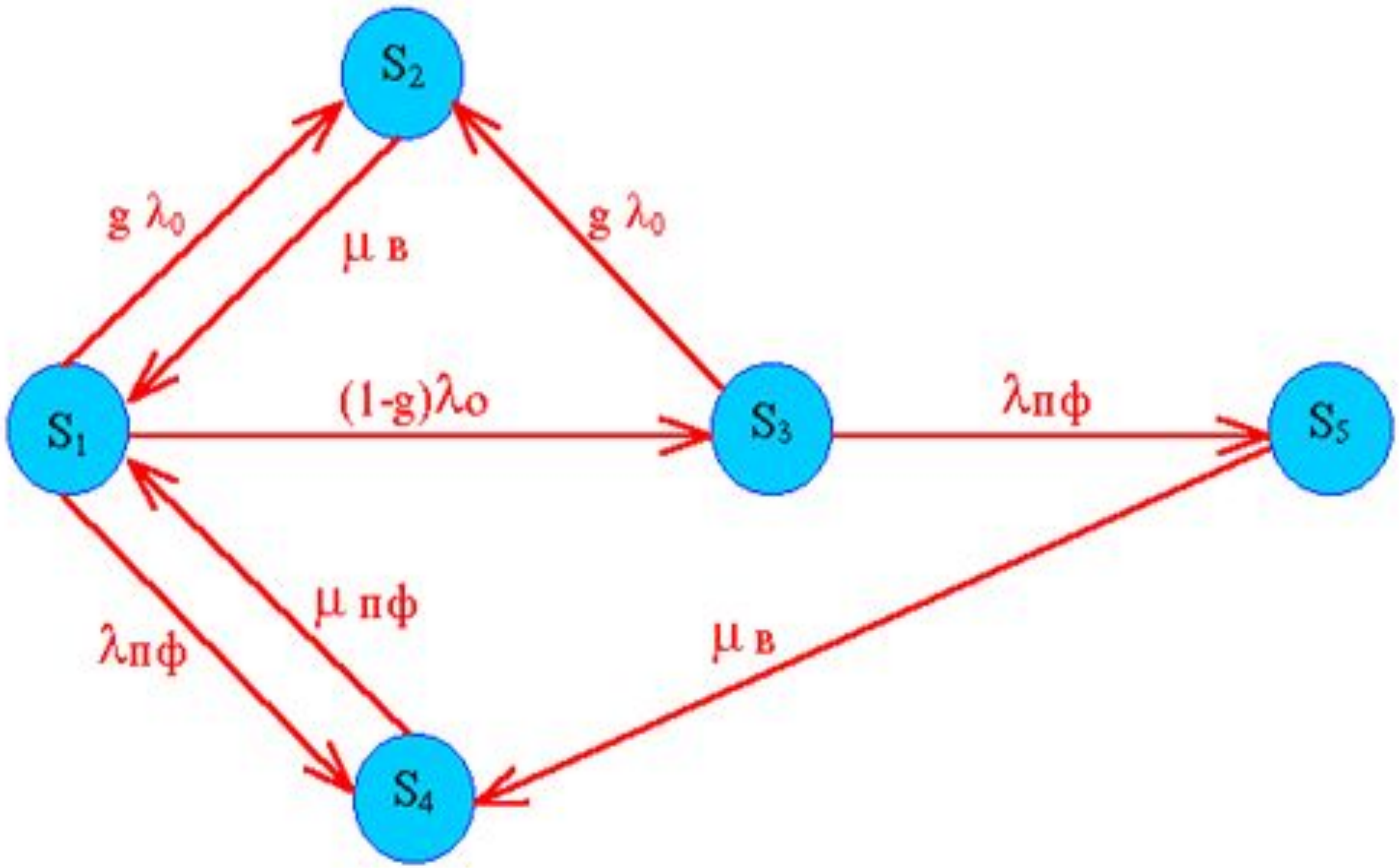

Рисунок 5.4 – Граф станів до задачі 2.

Відомі також такі величини:

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

λ_0- інтенсивність потоку відмов;

$T_{\text{Пф}}$ - період проведення профілактичних випробувань;

$\lambda_{\text{Пф}} = 1 / T_{\text{Пф}}$ - інтенсивність проведення профілактик;

$\mu_{\text{Пф}}$ - інтенсивність виконання профілактичних робіт;

$\mu_{\text{В}}$ - інтенсивність відновлення відмови;

g - частка контрольованого обладнання.

Потрібно знайти ймовірність безвідмовної роботи системи.

На рисунку 5.4 наведено граф ергодичного марківського ланцюга розглянутої задачі.

Для усталеного режиму система рівнянь Колмогорова має наступний вигляд:

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

$$\begin{cases} -p_1\left[g\lambda_0 + (1-g)\lambda_0 + \lambda_{n\Phi.}\right] + p_2\mu_{в.} + p_4\mu_{n\Phi.} = 0 \\ -p_2\mu_{в.} + p_1 g\lambda_0 + p_3 g\lambda_0 = 0 \\ -p_3\left(g\lambda_0 + \lambda_{n\Phi.}\right) + p_1(1-g)\lambda_0 = 0 \\ -p_4\mu_{n\Phi.} + p_1\lambda_{n\Phi.} + p_5\mu_{в.} = 0 \\ -p_5\mu_{в.} + p_3\lambda_{n\Phi.} = 0 \end{cases}$$

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

Рішення системи рівнянь дає наступні значення:

$$p_2 = \frac{p_1 g \lambda_0}{\mu_{e.}}\left(\frac{\lambda_0 + \lambda_{n\Phi.}}{g\lambda_0 + \lambda_{n\Phi.}}\right);\ p_3 = \frac{p_1(1-g)\lambda_0}{(g\lambda_0 + \lambda_{n\ \Phi.})};$$

$$p_4 = \frac{p_1}{\mu_{n\Phi.}}\left(\frac{\lambda_0\lambda_{n\Phi.} + \lambda_{n\Phi.}^2}{g\lambda_0 + \lambda_{n\Phi.}}\right);p_5 = \frac{p_1\lambda_0\lambda_{n\Phi.}(1-g)}{\mu_{e.}(g\lambda_0 + \lambda_{n\Phi.})}.$$

Значення p_1 може бути знайдено з умови нормування:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$$

Коефіцієнт готовності системи дорівнює:

$$K_{г} = p_1 = \left\{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_e} + \frac{\mu_e\left[\lambda_0(\mu_{n\Phi} + \lambda_{n\Phi}) + \lambda_{n\Phi}^2\right]}{g\lambda_0 + \lambda_{n\Phi}}\right\}^{-1}.$$

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

***Задача 3*. Розрахунок надійності обчислювальної системи.**

Заданий не ремонтуємий двохпроцесорний обчислювальний комплекс, що працює в режимі навантаженого резерву. Комплекс зберігає працездатність якщо справний хоча б один з процесорів. Інакше настає відмова.

Відомо:

λ_1 - інтенсивність відмов першого процесора;

λ_2 - інтенсивність відмов другого процесора.

В задачі потрібно знайти p (t) - ймовірність безвідмовної роботи даної системи.

Позначимо:

S_1 - стан системи, при якому обидва процесора справні;

S_2 - стан системи, при якому справний тільки перший процесор;

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

S_3 - стан системи, при якому справний тільки другий процесор;

S_4 - стан системи, при якому обидва процесора несправні;

p_1, p_2, p_3, p_4 - ймовірності перебування системи в цих станах.

З урахуванням введених позначень дана система буде представлена у вигляді марківського ланцюга, зображеного на рисунку 5.5.

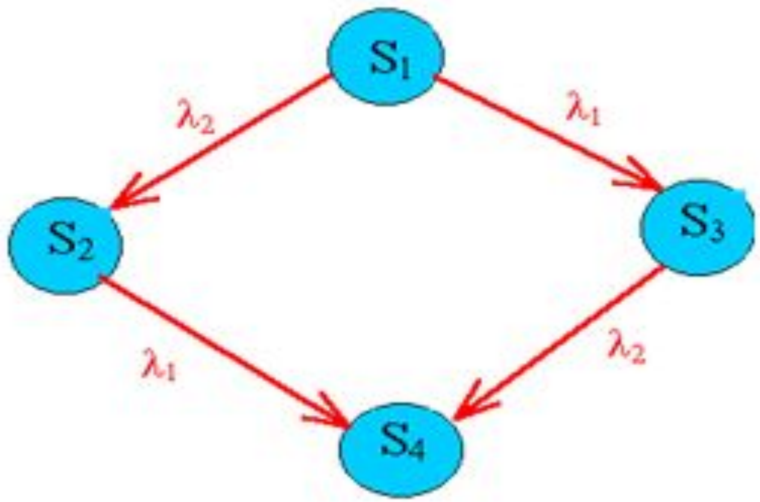

Рисунок 5.5 - Граф марківськиого ланцюга для завдання розрахунку надійності

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

Запишемо систему рівнянь Колмогорова для цього ланцюга:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -p_1\lambda_2(t) - p_1\lambda_1(t) \\ p_2'(t) = p_1\lambda_2(t) - p_2\lambda_1(t) \\ p_3'(t) = p_1\lambda_1(t) - p_3\lambda_2(t) \\ p_4'(t) = p_2\lambda_1(t) + p_3\lambda_2(t). \end{cases}$$

Прийнявши $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda(t)$ і вибравши закон розподілу для λ наступного вигляду: $\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, отримаємо:

$$p_1(t) = e^{-2\lambda t}; p_2(t) = p_3(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}}{\lambda}.$$

Тоді ймовірність безвідмовної роботи системи буде дорівнює:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t).$$