



ТЕМА 6. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОС ТИ И ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ.

Множества. Основные определения.

Под **МНОЖЕСТВОМ** понимают совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Объекты, из которых состоит множество, называют его **элементами**.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют **ПУСТЫМ** и обозначают \emptyset .

**Множества, элементами которых являются числа, называют *числовыми*.
Примерами числовых множеств являются:**

$$\mathbf{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$$

**– множество
натуральных чисел;**

$$\mathbf{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$$

**– множество
целых чисел;**

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

**– множество
рациональных
чисел;**

\mathbf{R} – множество действительных чисел.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать некоторые логические символы:

\forall – означает «для любого», «для всякого», «каждый»;

\exists – означает «существует», «найдется»;

$:$ – «имеет место», «такое, что»;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ – «предложения α и β равносильны»;

$\alpha \Rightarrow \beta$ – «из предложения α следует предложение β ».

Числовые промежутки. Окрестность точки.

Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называются подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид

$$[a; b] = \{x : a \leq x \leq b\} \text{ – } \mathbf{отрезок};$$

$$(a; b) = \{x : a < x < b\} \text{ – } \mathbf{интервал};$$

$$[a; b) = \{x : a \leq x < b\} \text{ – } \mathbf{полуинтервал};$$

$$(a; b] = \{x : a < x \leq b\} \text{ – } \mathbf{полуинтервал}.$$

Числа a и b называются соответственно **левым** и **правым концами промежутков**.

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой оси).

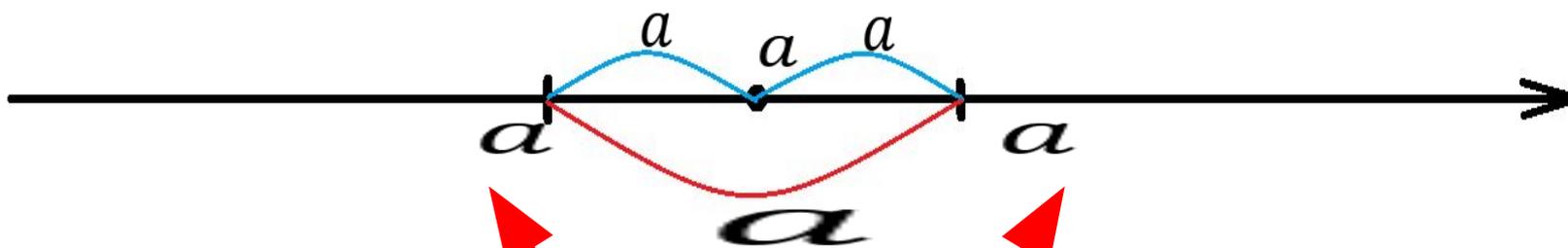
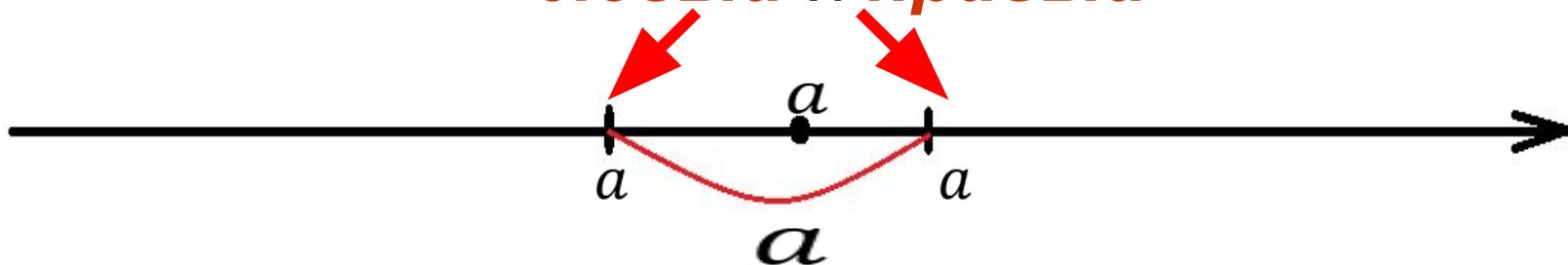
Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0 .

В частности, интервал

$$(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) = V(x_0, \varepsilon), \text{ где } \varepsilon > 0$$

называется **ε – окрестностью точки** x_0 .

**концы промежутков
левый и правый**



**окрестности точки
левая и правая
соответственно**

Понятие функции. Способы задания функций.

Пусть даны два непустых множества X и Y .

Правило f , по которому каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, называется **функцией** и записывается

$$y = f(x) \text{ или } f : X \rightarrow Y.$$

При этом множество X называется **областью определения** функции f и обозначается $D(f)$ или $D(y)$, а множество Y – **множеством значений функции** f .

Существуют следующие способы задания функций:

1) **графический**: задается график функции;

2) **табличный**: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции;

3) **аналитический**: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Основные характеристики функции

1) Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D , называется **четной**, если $\forall x \in D$ и выполняются условия: $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$;

2) **нечетной**, если $\forall x \in D$ выполняются условия: $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График **четной** функции симметричен относительно оси Oy ,
а **нечетной** – относительно точки $C(0;0)$, т. е. начала координат.

3) Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 > x_2$, выполняется условие $f(x_1) > f(x_2)$.

4) Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 > x_2$, выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются **строго монотонными**.

Интервалы, на которых функции монотонны, называются **интервалами монотонности**.

Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

Функция, областью определения которой является
множество \mathbb{N} натуральных чисел,

называется **числовой последовательностью** и обозначается

$$x_n = f(n) \text{ или } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \text{ или } \{x_n\}.$$

При этом x_n называется ***n*-ым членом
последовательности.**

Пример: Формула $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ задает последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Геометрически каждому члену последовательности
соответствует точка на числовой оси Ox .

Пусть функция $x_n = f(n)$ **последовательно**

принимает значения: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$

т.е. пробегает последовательность $\{x_n\}$.

Важным случаем такого изменения функции является тот, при котором по мере возрастания номера n соответствующие значения x_n

неограниченно **приближаются (стремятся)**

к некоторому постоянному значению a ;

в этом случае говорят, что

последовательность $\{x_n\}$ стремится к **пределу** a .

Но выражения «неограниченно приближаются», «стремятся» – неопределенные и поэтому не годятся для точного математического понятия предела.

Для **точного определения** понятия «**предел**» введем произвольное малое положительное число ε ; поскольку оно произвольно, его по желанию можно задавать равным 0,01, и 0,001, и вообще 10^{-k} , $k \in \mathbb{N}$.

Факт неограниченного сближения последовательности $\{x_n\}$ с постоянной a можно охарактеризовать так:

каково бы ни было малое положительное число ε , в процессе изменения последовательности рано или поздно должен наступить такой момент, начиная с которого все ее дальнейшие значения

x_n **будут отличаться от** a по абсолютному значению **меньше**, чем на это **произвольное малое** положительное **число** ε .

Определение. Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Кратко определение предела можно записать так:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) :$$

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Геометрический **смысл** определения
предела последовательности:

$$\text{Неравенство } |x_n - a| < \varepsilon$$

равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ или } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

$$\text{т.е. } x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

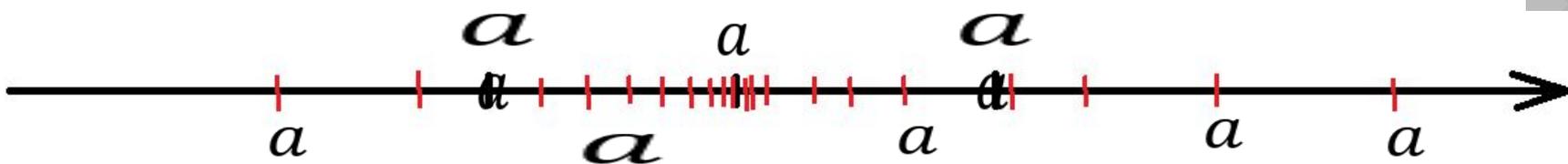
$$V(a, \varepsilon)$$

Поэтому определение предела
последовательности можно сформулировать
так:

Число называется **пределом**
последовательности $\{x_n\}$, если для любой

ε - окрестности точки a найдется такой
номер $N(\varepsilon)$, что все члены последовательности
 x_n , для которых $n > N(\varepsilon)$, попадут в

ε - окрестность точки a .



Предел функции в точке.

Бесконечно большая и бесконечно малая функция.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$

непрерывно изменяющегося аргумента x

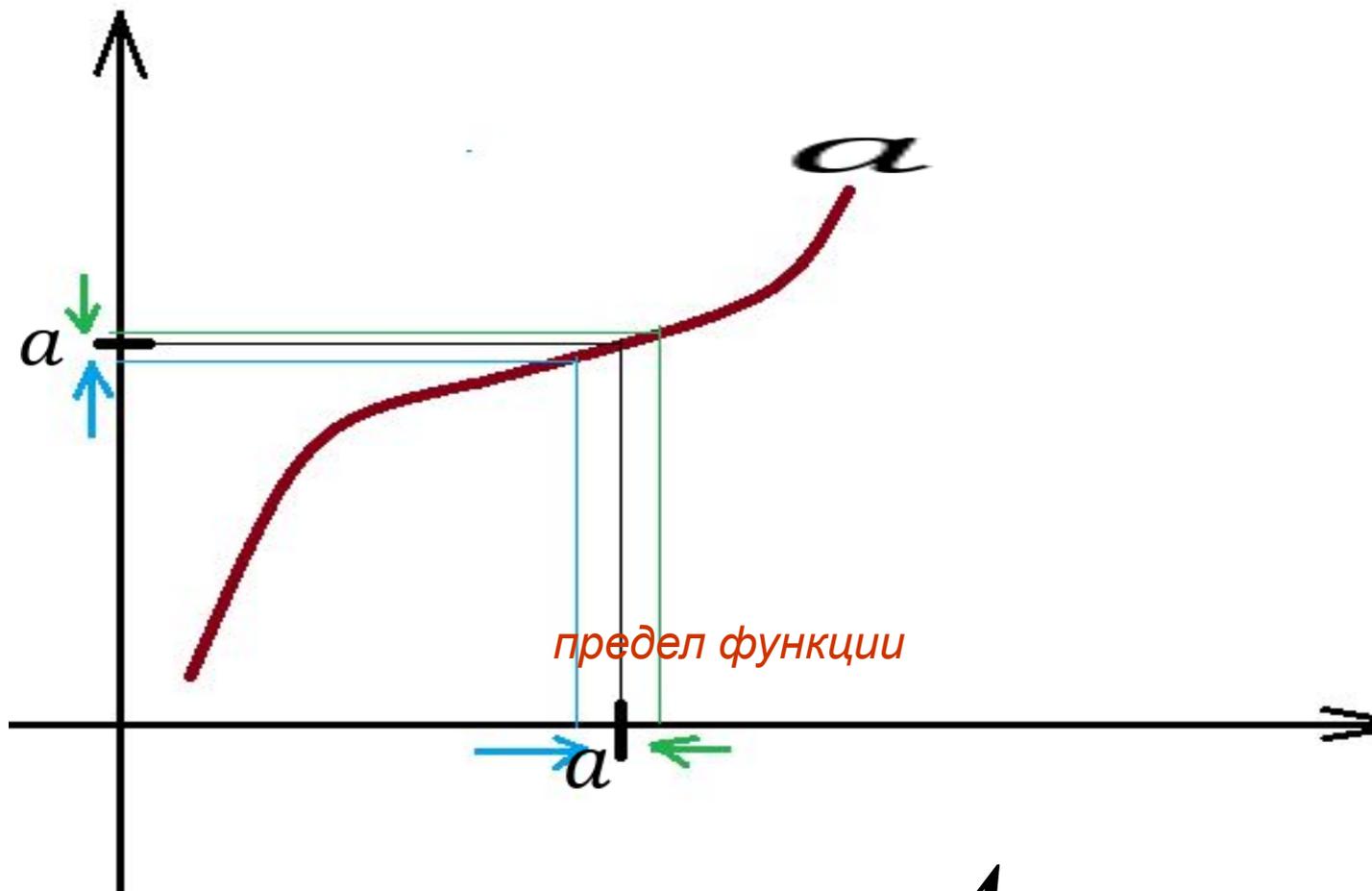
и предположим, что аргумент x стремится к некоторому числу a .

Может случиться, что при неограниченном приближении аргумента x к числу a

соответствующие значения функции $f(x)$

неограниченно приближаются к некоторому числу

A на рисунке:



Определение. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке a при $x \rightarrow a$ и обозначается: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Бесконечно большая функция (б.б.ф)

Определение. Функция $y = f(x)$ называется

бесконечно большой функцией

при $x \rightarrow a$, если для любого числа $M > 0$

найдется такое положительное число δ ,

зависящее от выбора M , что для всех x ,

удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$

будет выполняться: $|f(x)| > M$.

и обозначается: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Бесконечно малая функция (б.м.ф.). Связь между б.м.ф. и б.б.ф.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется
бесконечно малой функцией

при $x \rightarrow a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$
найдется такое положительное число δ , зависящее от
выбора ε , что для всех x , удовлетворяющих условию
 $0 < |x - a| < \delta$ будет выполняться: $|f(x)| < \varepsilon$.

и обозначается: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Теорема: 1) Если $y = f(x)$ – б.м.ф. в $V(a)$, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \text{ – б.б.ф. в } V(a), \text{ т.е.}$$

обозначается: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$

2) Если $y = g(x)$ – б.б.ф. в $V(a)$, то

$$y = \frac{1}{g(x)} \text{ – б.м.ф. в } V(a), \text{ т.е.}$$

обозначается: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0.$

Символически это утверждение можно записать как:

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{\infty} = 0,$$

где символы 0 и ∞ следует понимать как **неограниченно близкое приближение к нулю** и **к бесконечности** соответственно.

Вычисление пределов

Практическое вычисление пределов основывается на связи между **б.м.ф.** и **б.б.ф.** и на следующей теореме:

Теорема: Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
и $C - const$, то:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} C = C;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

А если условия этой теоремы не выполнены, то могут возникнуть **неопределенности вида :**

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty,$$

которые в простейших случаях раскрываются с помощью алгебраических преобразований данного выражения и отыскание предела в таких случаях называют **раскрытием неопределенностей.**

Кроме того, будем пользоваться тем фактом, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = f(a).$$

Последнее **равенство** можно **понимать так:** вычисление любого предела нужно начинать с непосредственной подстановки предельного значения, и, если нет неопределенностей, то сразу записать ответ.

Также при нахождении пределов полезно иметь в виду следующие свойства показательной функции:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}.$$

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{3x + 5} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{3 \cdot 2 + 5} = \frac{3}{11};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{3x^2 - x + 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{:x^2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{7}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{1}{\infty} + \frac{7}{\infty}} = \frac{1 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3};$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 10}{7x^3 - x^2 + 1} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{:x^3}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{10}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{x^3}}{7 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{5}{\infty} + \frac{1}{\infty} - \frac{10}{\infty}}{7 - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{0}{7} = 0;\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{3x - 1} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right]_{:x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^4}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{3x}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4}} = \frac{2 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{\frac{3}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 + 0 + 0}{0 - 0} = \frac{2}{0} = \infty;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 + 2} = \frac{3}{5}; \end{aligned}$$

Примечание: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

где x_1 и x_2 — корни соответствующего квадратного уравнения.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. **Определение производной**
2. **Геометрический смысл производной**
3. **Связь между непрерывностью и дифференцируемостью**
4. **Производные основных элементарных функций**
5. **Правила дифференцирования**
6. **Производная сложной функции**
7. **Применение производной**

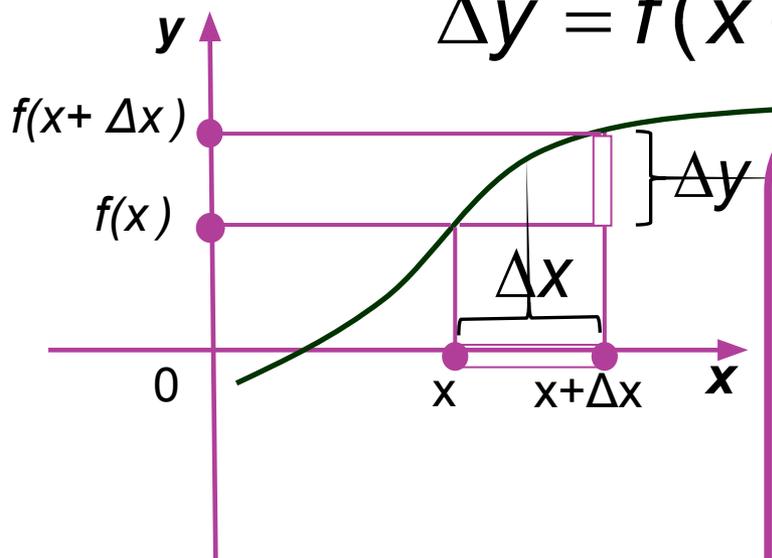
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$. Аргументу x придадим некоторое приращение Δx :

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют **производной** функции $y = f(x)$ и

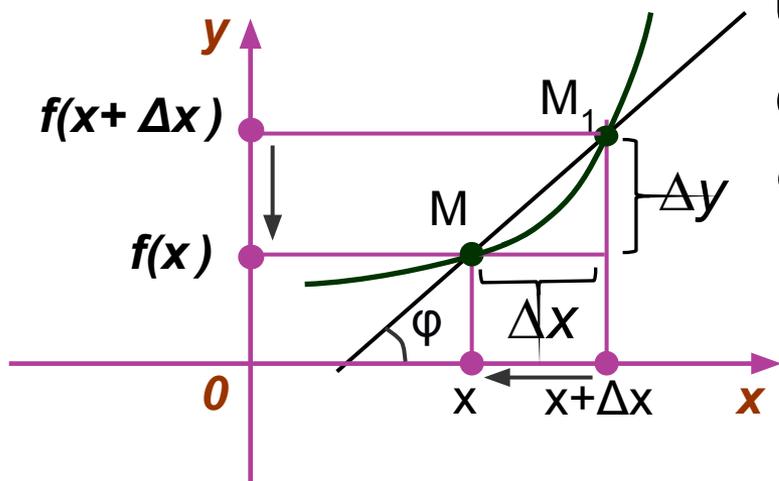
обозначают одним из

СИМВОЛОВ:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 :



Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k = y'$$

Производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, угловым коэффициентом касательной есть $k = f'(x_0)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение касательной

~~Уравнение нормали~~

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется нормалью к кривой.

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИИ

Теорема

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

(где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$)

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow$$

Функция $y = f(x)$ – непрерывна.

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

**Нахождение производной называют
дифференцированием**

$$(kx + b)' = k$$

$$(C)' = 0$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	\sqrt{x}	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	K	e^x	e^x
x^2	$2x$	a^x	$a^x \ln a$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2}$

ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их сумма $u(x) + v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. Если функция $u(x)$ имеет в точке x производную и C – данное число, то функция $C \cdot u(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция $v(x)$ имеет в точке x производную и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

6. Производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Теорема

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u , то сложная функция имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = f(\varphi(g(x)))$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

ПРИМЕР

Вычислить производную функции $y = \frac{1 + \sin x}{x^3 \cdot \ln x}$

$$y' = \left(\frac{1 + \sin x}{x^3 \cdot \ln x} \right)'$$

$$= \frac{(1 + \sin x)' \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1 + \sin x) \cdot (x^3 \cdot \ln x)'}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{(1' + (\sin x)') \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1 + \sin x) \cdot ((x^3)' \cdot \ln x + x^3 (\ln x)')}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot x^3 \cdot \ln x - (1 + \sin x) \cdot (3x^2 \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x})}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

ПРИМЕР:

Вычислить производную функции: $y = \cos(\ln^{12} x)$

Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin(\ln^{12} x)$$

$$u' = 12v^{11} = 12\ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}$$

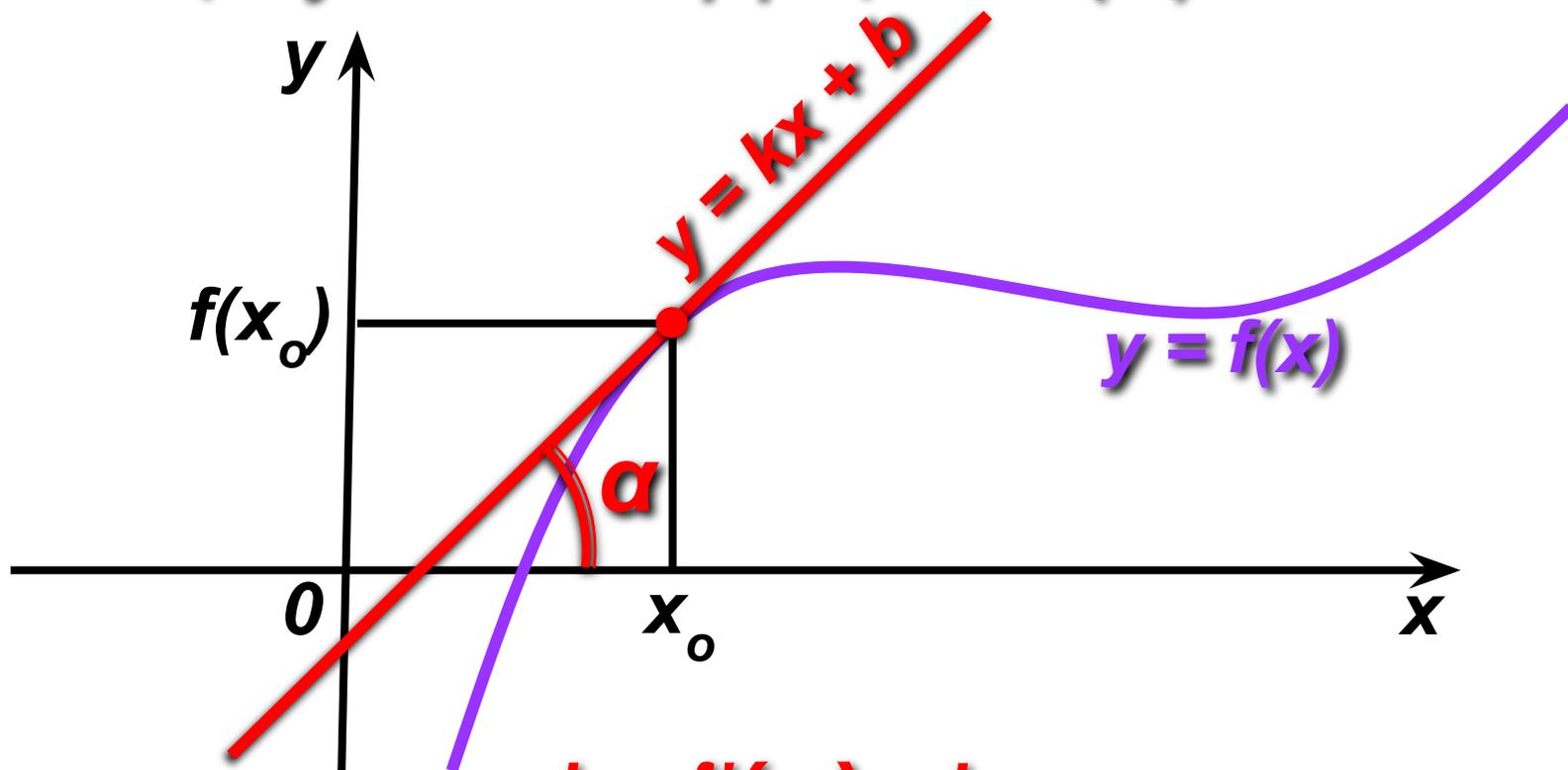
Коротко:

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)'$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.



$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ –
это угловой коэффициент касательной.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

1° Находим значение функции в точке x_0 : $f(x_0)$.

2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

3° Находим значение производной в точке x_0 : $f'(x_0)$.

4° Подставляем эти данные в общее уравнения

касательной: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков её возрастания и убывания.

Признак возрастания функции:

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I , то **функция f возрастает на I .**

Признак убывания функции:

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I , то **функция f убывает на I .**

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ:

Выделить функцию $y=f(x)$.

1. Найти **область определения функции** $D(f)$.
Указать промежутки непрерывности.
2. Найти **нули функции**, решив уравнение $f(x)=0$.
3. Определить **знак функции** между её нулями в области определения.

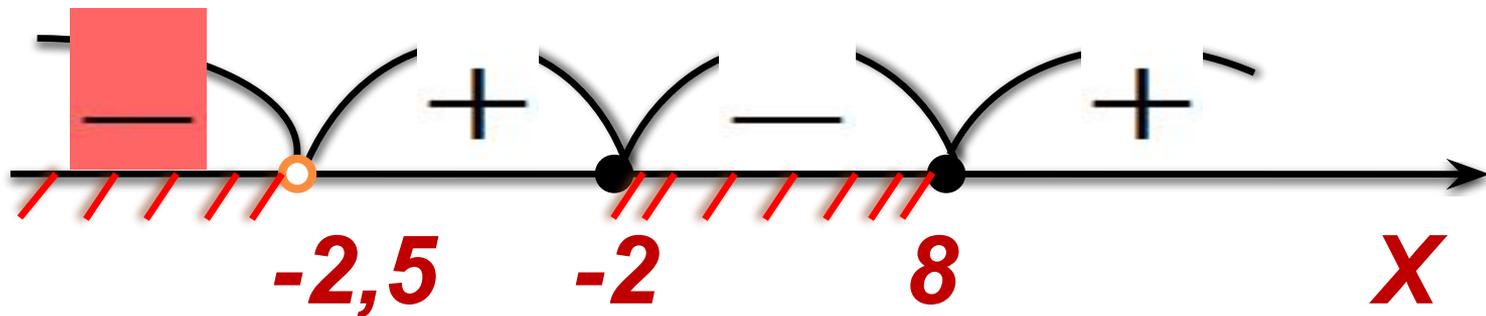
Решите неравенство: $\frac{x^2 - 6x - 16}{2x + 5} \leq 0$

1. $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 16}{2x + 5} = 0$ $2x + 5 \neq 0, x \neq -2,5$

2. $f(x) = 0$, если $x^2 - 6x - 16 = 0$

$$\overset{1}{x^2} - \overset{2}{6x} - 16 = 0$$

3.



Or $f(10) = \frac{(10)^2 - 6 \cdot 10 - 16}{2 \cdot 10 + 5} = "+"$

$$x \in (-\infty; -2,5) \cup [-2; 8]$$

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПРОМЕЖУТКОВ ВОЗРАСТАНИЯ (УБЫВАНИЯ) ФУНКЦИИ

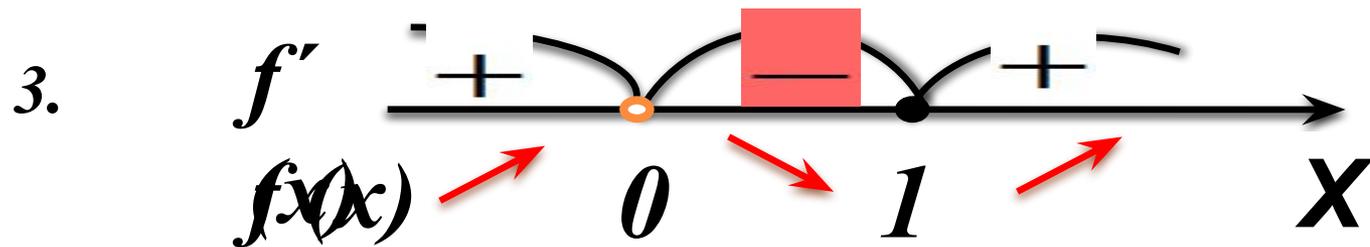
$$y=f(x):$$

1. Найти **производную** функции $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$.
3. Найти **знак производной** на каждом интервале.
4. Согласно **признаку** возрастания (убывания) функции, найти **промежутки возрастания и убывания**.

Найдите \uparrow и \downarrow возрастания и убывания функции: $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

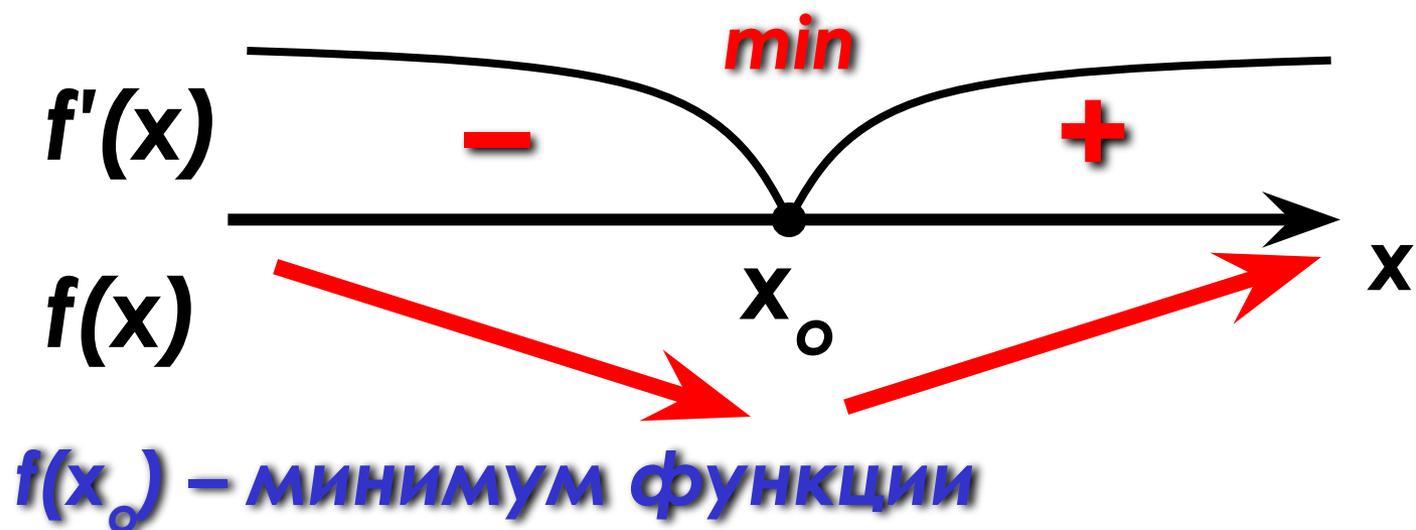
2. $f'(x) = 0$, если $2 - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$



Ответ: $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$
 $f(x)$ убывает на $(0; 1]$

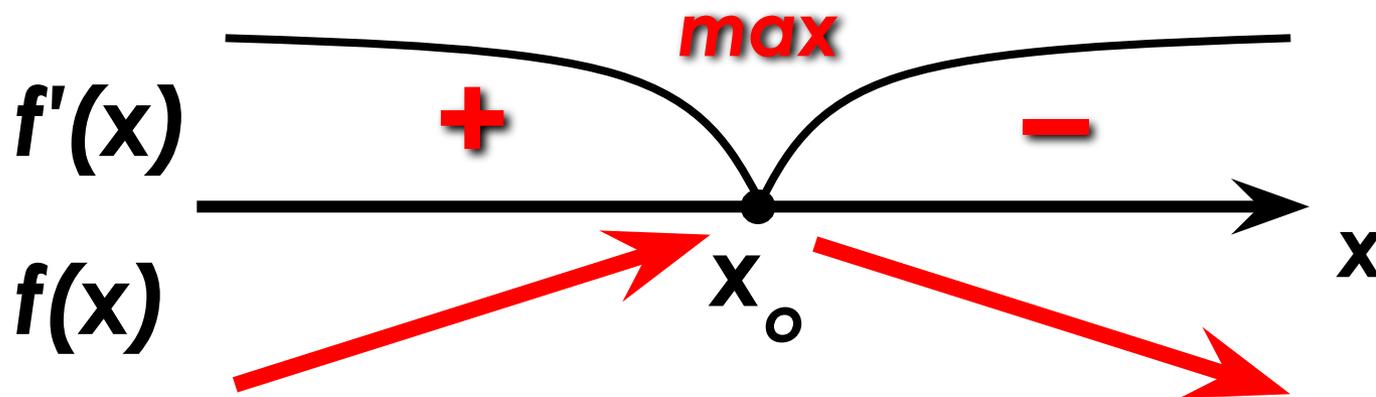
Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «-» на «+», то x_0 – **точка локального минимума** функции $f(x)$.



Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «-», то x_0 – **точка локального максимума** функции $f(x)$.



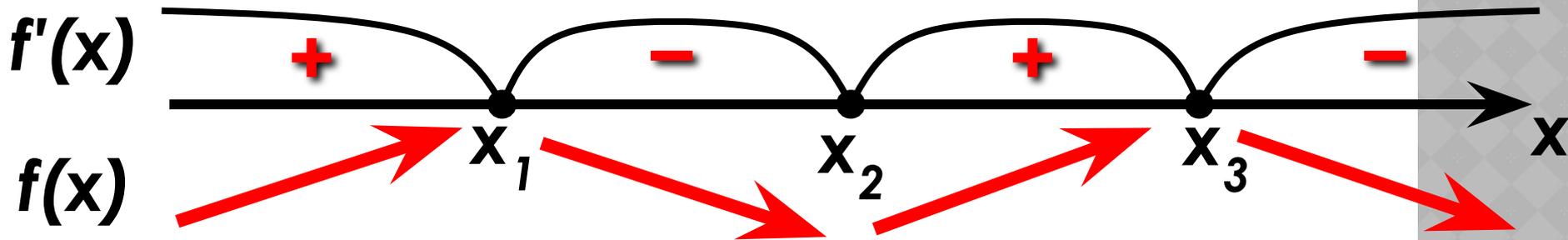
$f(x_0)$ – максимум функции

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



5° а) Промежутки возрастания: $(-\infty; x_1]$; $[x_2; x_3]$.

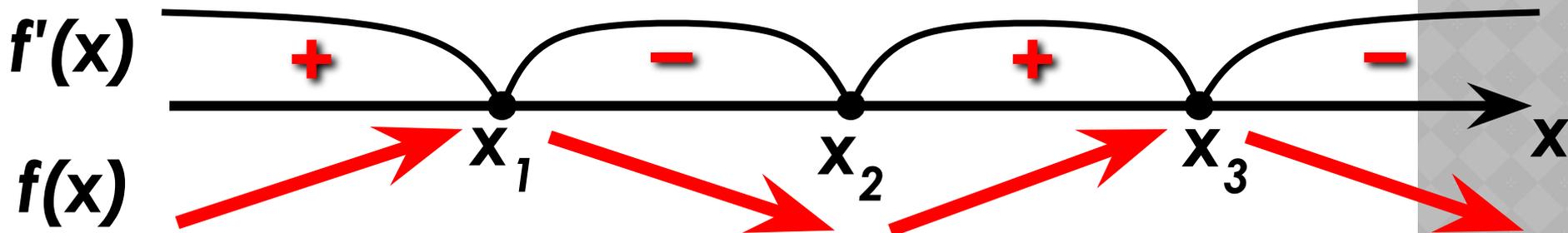
б) Промежутки убывания: $[x_1; x_2]$; $[x_3; +\infty)$.

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



5° а) x_1 ; x_3 – точки максимума; x_2 – точка минимума.

б) $f(x_1)$; $f(x_3)$ – максимумы функции;

$f(x_2)$ – минимум функции.

ПРИМЕРЫ

$(-\infty, +\infty)$.

