Физический смысл целевой функции транспортной задачи по критерию стоимости

Выполнила

Студентка группы С-1841

ЖАВРИД ЕКАТЕРИНА

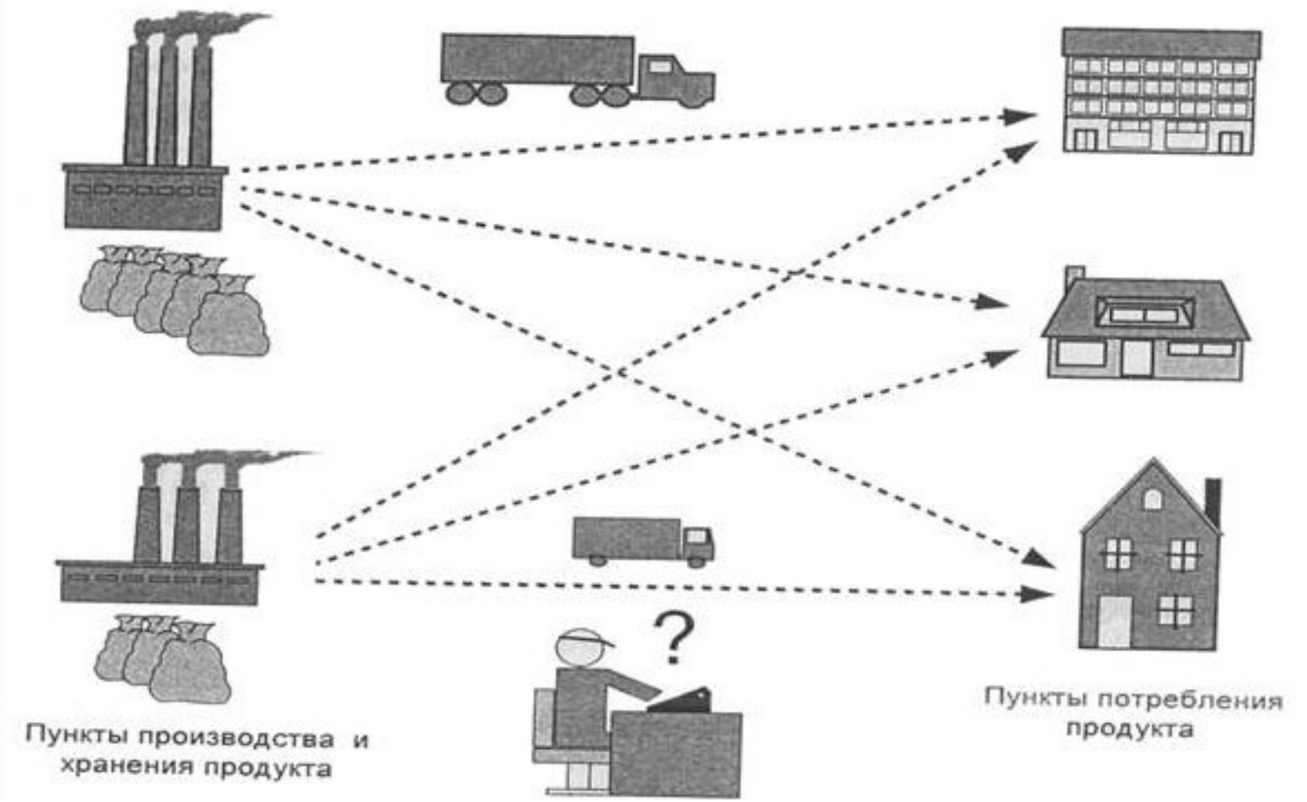
Транспортная задача - это

математическая задача по нахождению оптимального распределения поставок однородного «товара» (груза, вещества) между пунктами отправления и назначения при заданных, численно выраженных затратах (стоимостях, расходах) на перевозку.

- Проблема была впервые формализована французским математиком Гаспаром Монжем в 1781 году. Прогресс в решении проблемы был достигнут во время Великой Отечественной войны советским математиком и экономистом Леонидом Канторовичем. Поэтому иногда эта проблема называется транспортной задачей Монжа — Канторовича.

Различают два типа транспортных задач:

- по <u>критерию стоимости </u>(план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию);
- по критерию времени (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).



Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объема $a_1, a_2, \dots, a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объема $b_1, b_2, \dots, b_n$. Известны c_{ij} $(i = 1,2,\dots m; j = 1,2,\dots,n$) – стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю.

Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

	b_1	b_2	….	b_n
a_1	C_{11}	C_{12}	….	C_{1n}
a_2	C_{21}	C_{22}	….	C_{2n}
….	….	….	….	….
a_m	C_{m1}	C_{m2}	….	C_{mn}

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} ($i = 1,2,...m; j = 1,2,...,n$) – объемы перевозок от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю.
Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m1} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Математическая модель транспортной задачи в общем случае имеет вид:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

Целевая функция задачи выражает требование обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

- Равенство описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

- Выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей.

Математическая формулировка транспортной задачи состоит в следующем: найти переменные $X = (x_{ij})$ $i = 1,2,...m; j = 1,2,...,n$

удовлетворяющие системам ограничений $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$

условиям неотрицательности $x_{ij} \geq 0$
и обеспечивающие минимум целевой функции $Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

- Суммарные запасы поставщиков должны быть равны суммарным запросам потребителей.

Такая задача называется задачей с правильным балансом, а ее модель – закрытой. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а ее модель – открытой.
Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей, т. е. задача должна быть с правильным балансом.

$a_i \backslash b_j$	50	70	80
90	9	5	3
110	4	6	8

Решение:

1) Введем переменные задачи (матрицу перевозок):

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} x_{12} x_{13} \\ x_{21} x_{22} x_{23} \end{pmatrix}$$

2) Запишем матрицу стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

3) Целевая функция задачи:

$$Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

4) Составим систему ограничений.

Сумма перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X – запасам второго по

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110$$

Это означает, что запасы всех поставщиков вывозятся полностью

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 50$$
$$x_{12} + x_{22} = 70$$
$$x_{13} + x_{23} = 80$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью.

Ответ:

Целевая функция задачи – $Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}$

Ограничения:

$$x_{11} + x_{21} = 50$$
$$x_{12} + x_{22} = 70$$
$$x_{13} + x_{23} = 80$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110$$