Тригонометричес кие уравнения

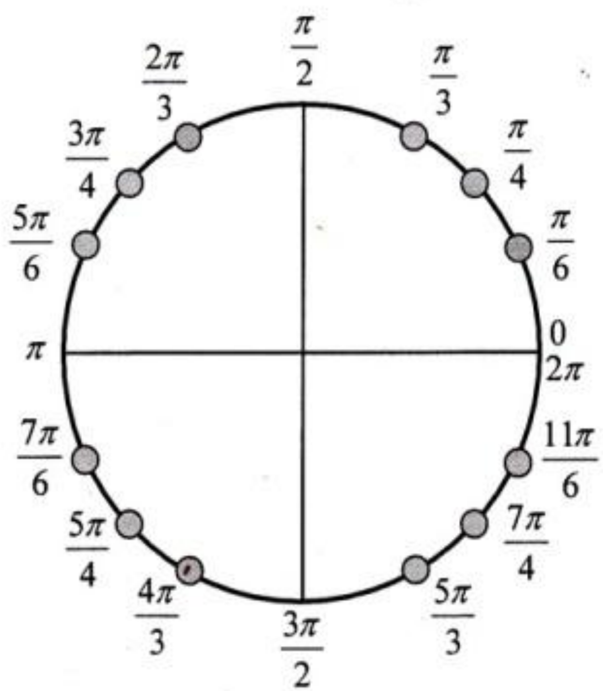
Девиз : « ***Не делай никогда того, чего не знаешь , но научись всему, что следует знать»***

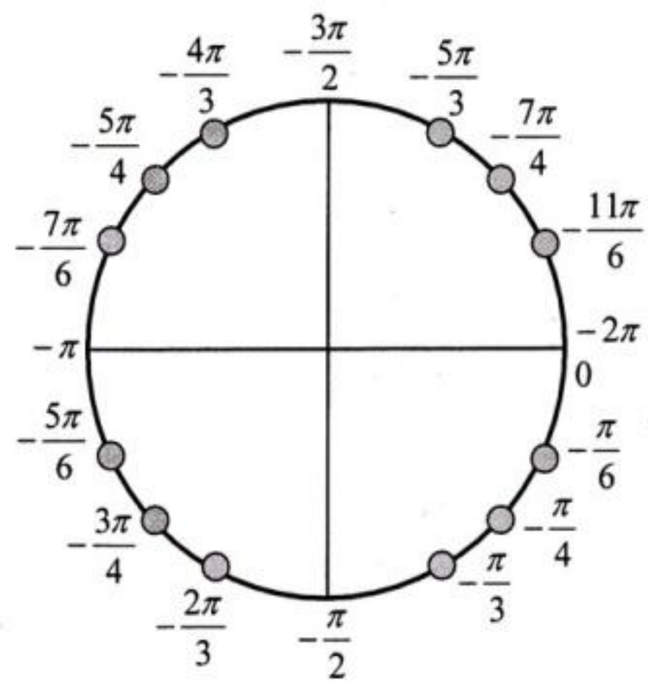
Пифагор

С помощью тригонометрической окружности найти все значения из промежутка [-2π; 2π] для следующих выражений

$\arccos\frac{1}{2}$ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\arccos 1$ $\arccos(-\frac{1}{2})$ ***arcsin 0***,

arcsin$\left(-\frac{1}{2}\right)$. $\arccos\frac{-\sqrt{2}}{2}$





Верно ли равенство

$$а) \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$б) \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4};$$

$$в) \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{6};$$

$$г) \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\pi}{6};$$

$$д) \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$е) arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Имеет ли смысл выражение:

а) $\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$; б) $arcsin2$;

в) $\arcsin\left(\sqrt{2}-1\right)$; г) $\arccos\sqrt{3}$;

д) $arctg5$; е) $arctg\ (-\sqrt{3})$

Определение.

- **Уравнения вида $f(x) = a$, где a – данное число, а $f(x)$ – одна из тригонометрических функций, называются простейшими тригонометрическими уравнениями.**

Решение уравнения

$$\cos x = a$$

$$\cos x = a \qquad |a| \le 1$$

$|a| > 1$

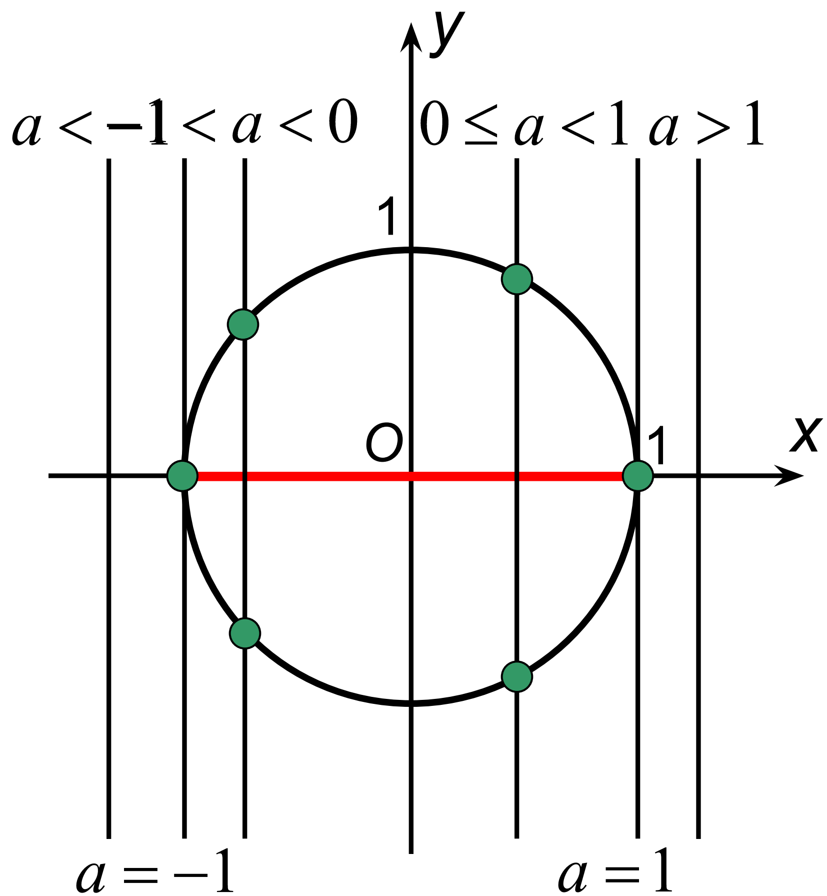
Нет точек пересечения прямой и окружности

$|a| = 1$

Одна точка пересечения прямой и окружности

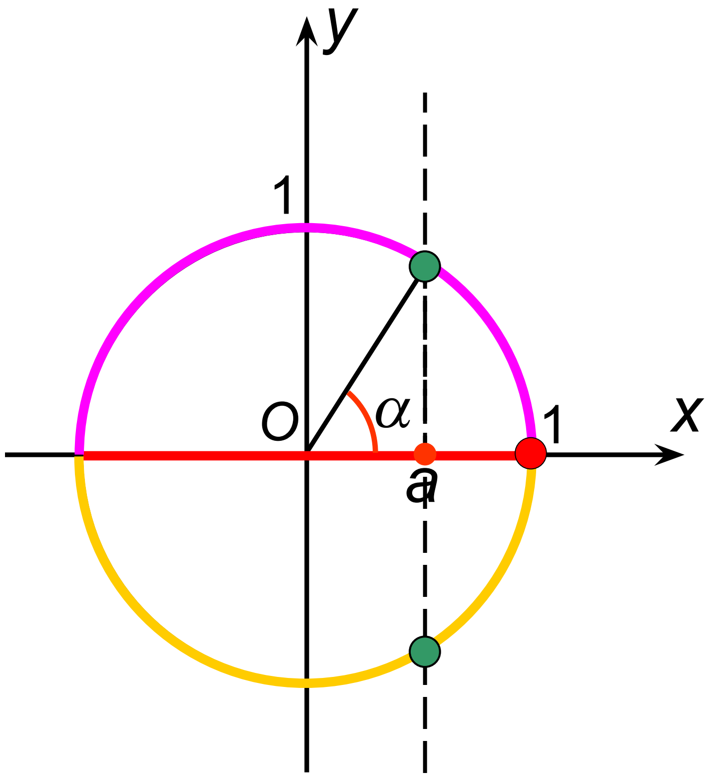
$|a| < 1$

Две точки пересечения прямой и окружности



Арккосинус числа

$$\cos x = a \qquad -1 \le a \le 1$$

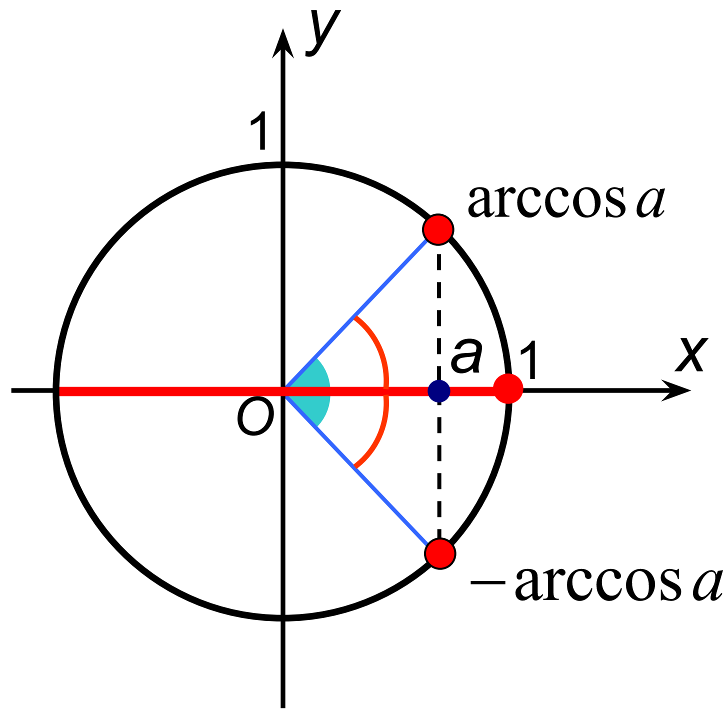


$$\alpha = \arccos a$$

1) $\alpha \in [0;\ \pi]$

2) $\cos\alpha = a$

Решение уравнения $\cos x = a$



$x = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$

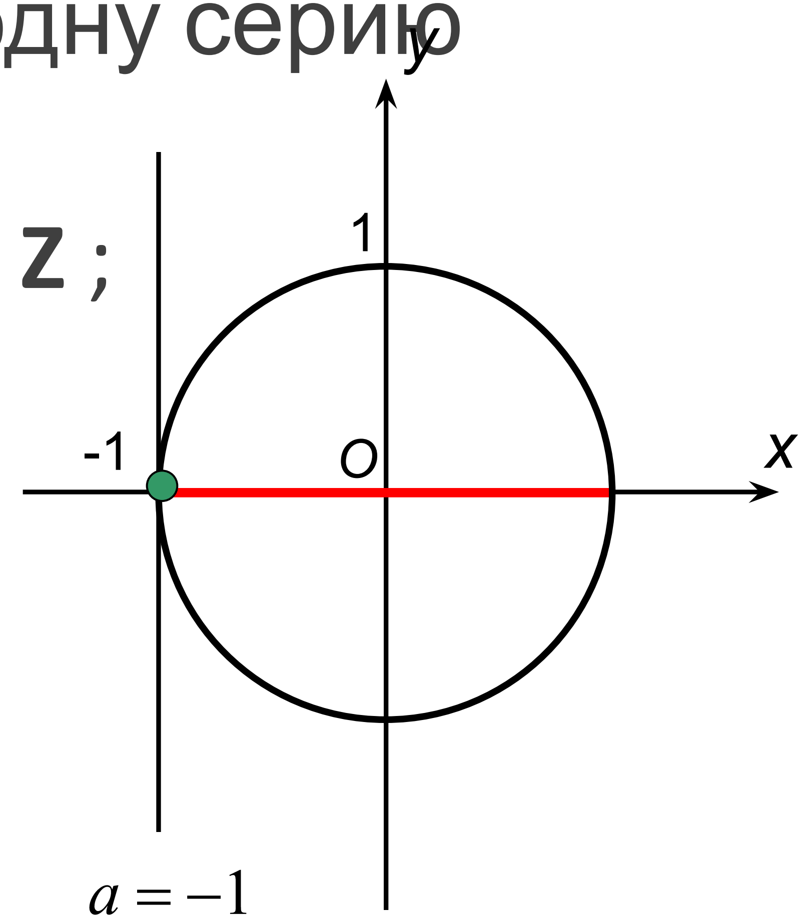
$x = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Уравнение cos t = a

- в) при **x = -1** имеет одну серию решений

$$\mathbf{x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;}$$



Уравнение cos x = a

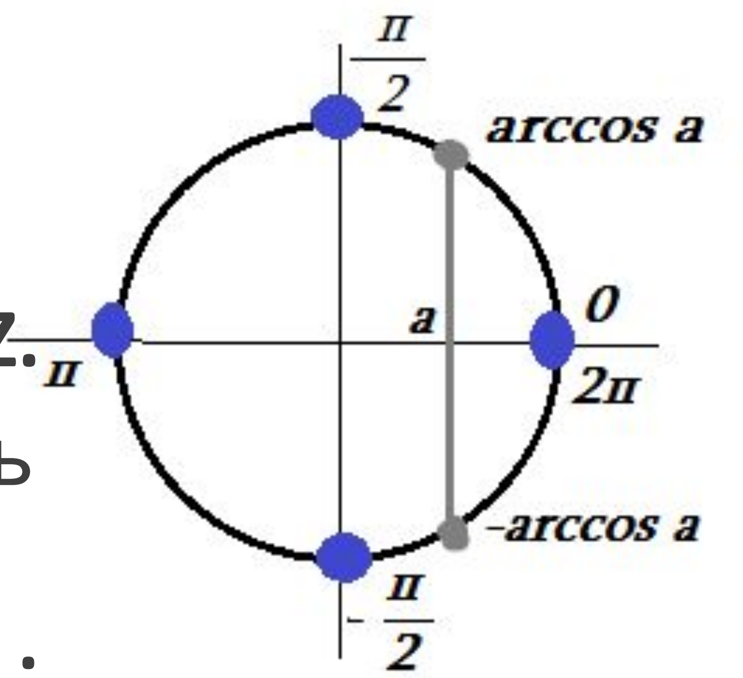
- а) при **-1< a < 1** имеет две серии корней

$x_1 =$ ***arccos*** **a + 2πk, k є Z**

$x_2 =$ **-** ***arccos*** **a + 2πm, m є Z.**

Эти серии можно записать так

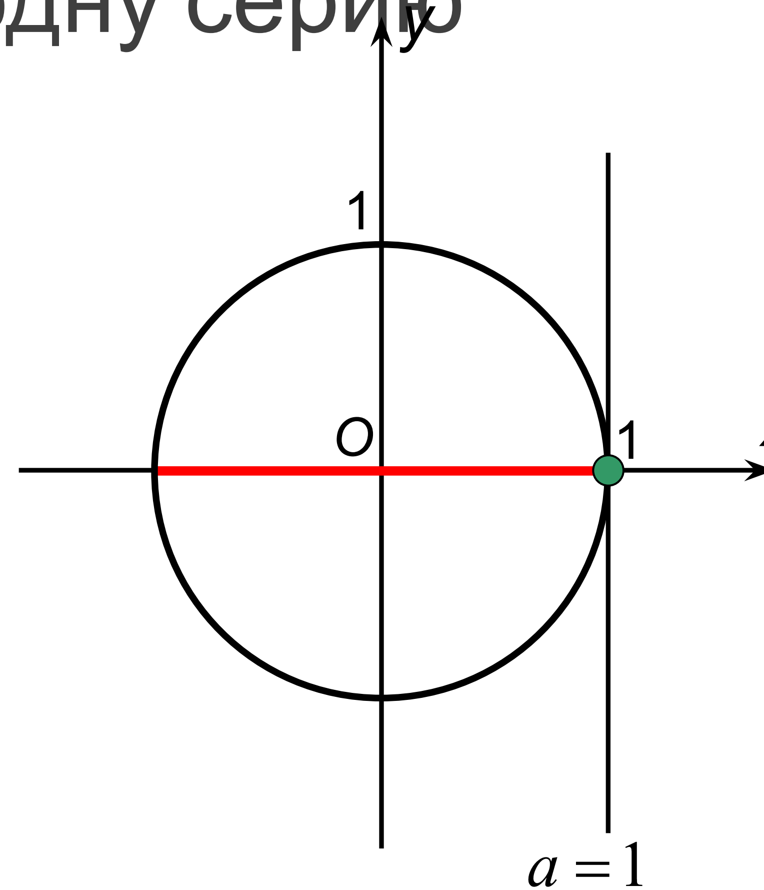
x = ± ***arccos*** **a + 2πn, n є Z ;**



Уравнение cos x = a

- б) при **a = 1** имеет одну серию решений

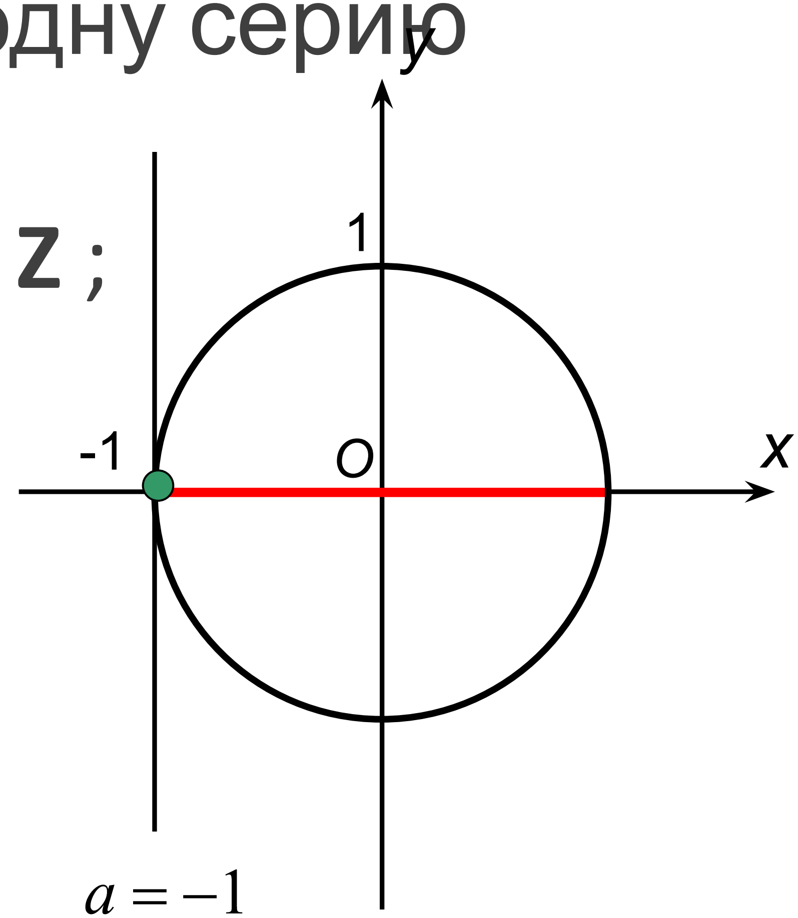
x = 2πn, n є Z ;



Уравнение cos x = a

- в) при **a = -1** имеет одну серию решений

x = π + 2πn, n є Z ;



Уравнение cos x = a

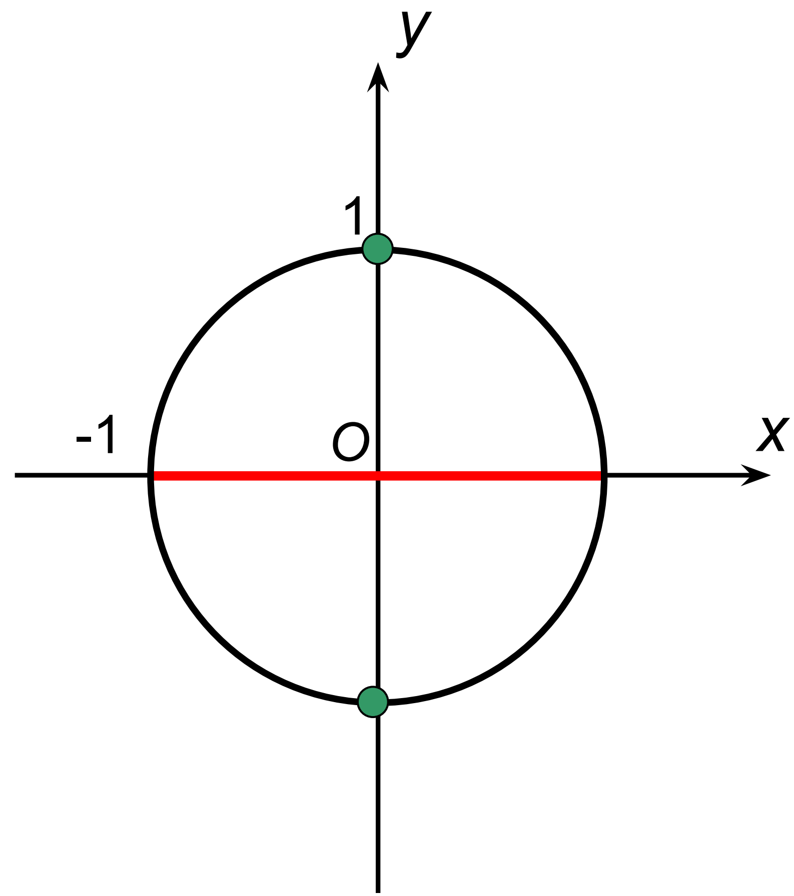
- г) при **a = 0** имеет две серии корней

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z$

$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in Z.$

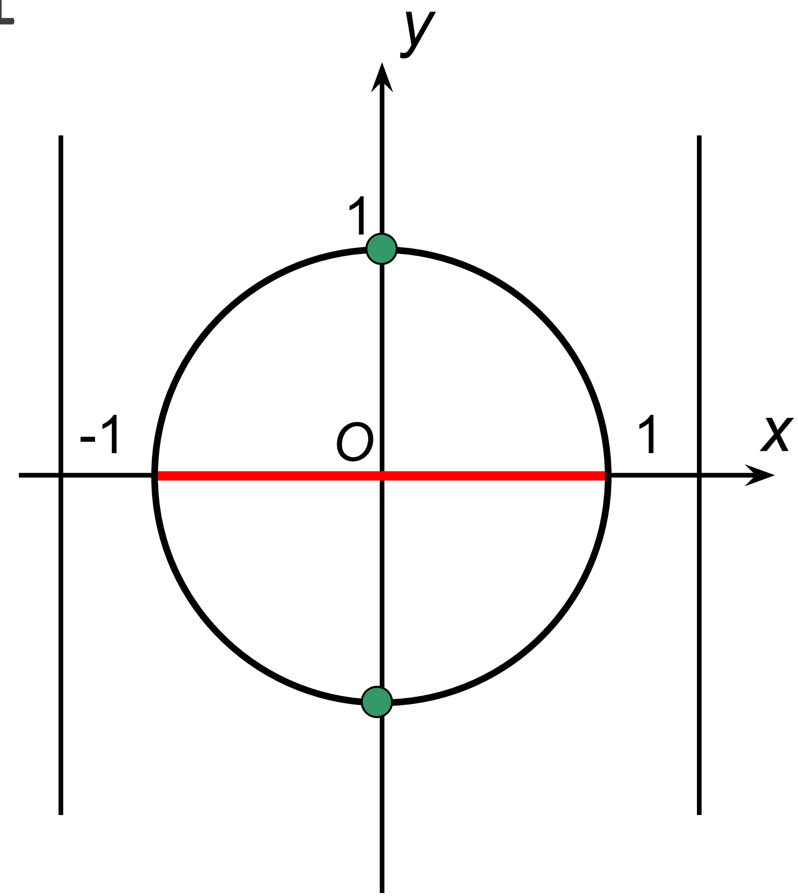
Обе серии можно записать в одну серию

$\mathbf{t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.}$



Уравнение cos x = a

д) при a > 1 и a < -1 уравнение не имеет корней.



Решите уравнение

1) $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Решите уравнение

3) cos 4x = 1

4x = 2πn, n ϵ

Z

$$x = \frac{2\pi n}{4}, n \epsilon Z$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \epsilon Z$$

4) $\cos\frac{x}{2} = -1$

$$\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, n \epsilon Z$$

$$x = 2\pi + 4\pi n, n\epsilon Z$$

Решите уравнение

5) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z$$

$$x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решите уравнение ***и*** **укажите корни,**

принадле **ромежутку [-π;-2π].**

а)

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

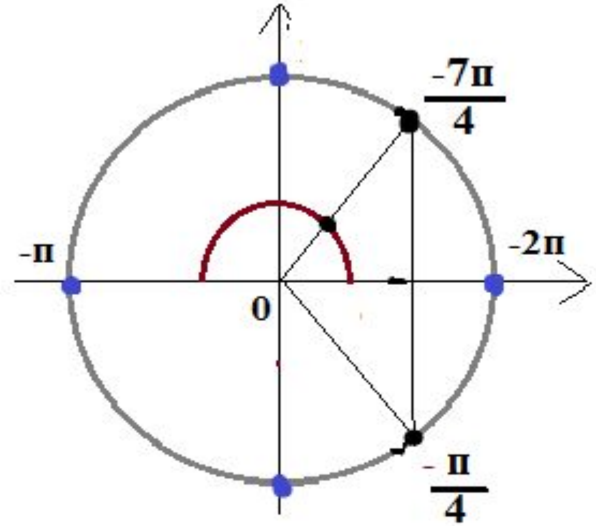
$$x = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

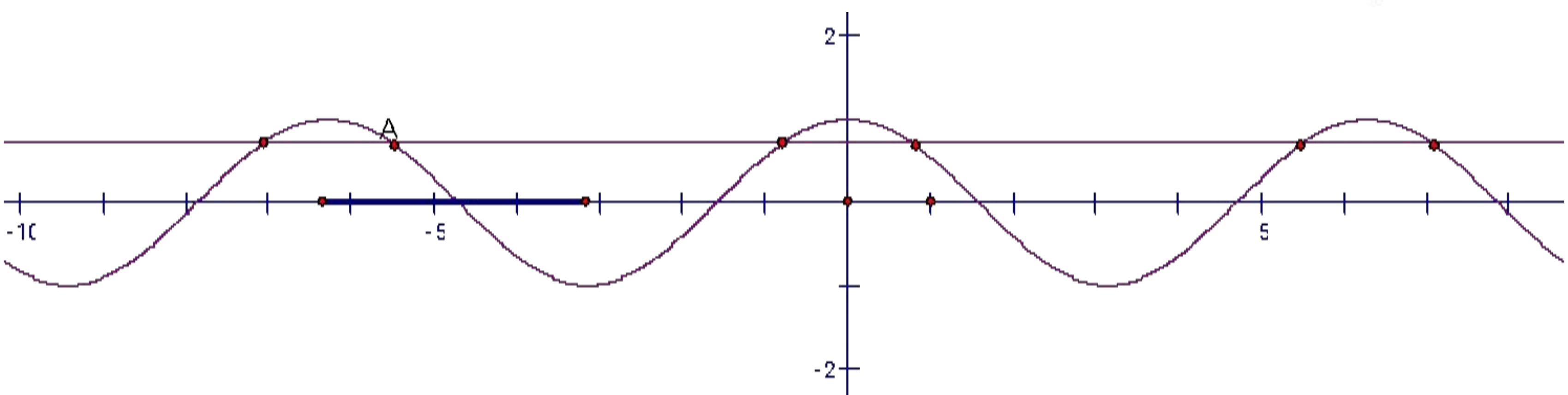
б) сделаем выборку корней, принадлежащих промежутку [-2π; -π].

1) с помощью окружности

$$x = -\frac{7\pi}{4}$$



2) с помощью графика



б)

Задание 1. Найти корни уравнения:

1) а) $\cos x = 1$ б) $\cos x = -1$ в) $\cos x = 0$

г) $\cos x = 1{,}2$ д) $\cos x = 0{,}2$

2) а) б)

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

в) г)

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 2x = 1$$

$y = a$

$\sin x = a$

$|a| \le 1$

$|a| > 1$

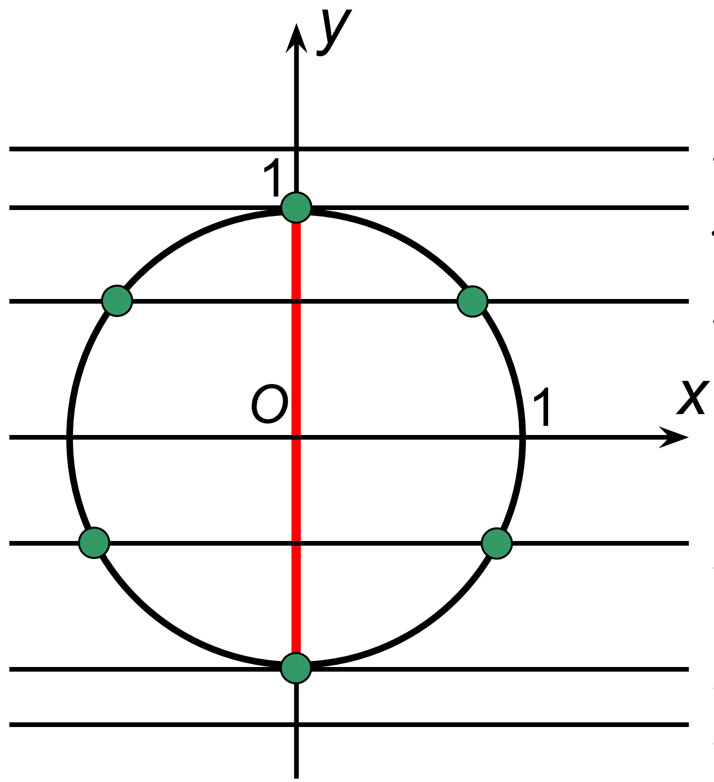
Нет точек пересечения прямой и окружности

$|a| = 1$

Одна точка пересечения прямой и окружности

$|a| < 1$

Две точки пересечения прямой и окружности



$y = a \quad (a > 1)$

$y = a \quad (a = 1)$

$y = a \quad (0 \le a < 1)$

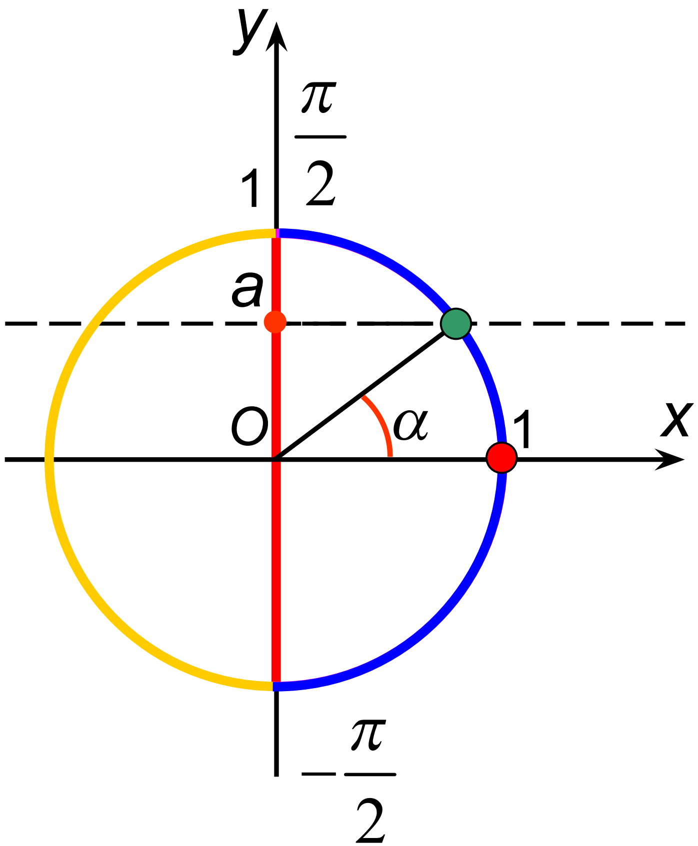
$y = a \quad (-1 < a < 0)$

$y = a \quad (a = -1)$

$y = a \quad (a < -1)$

Арксинус числа

$$\sin x = a \quad -1 \le a \le 1$$

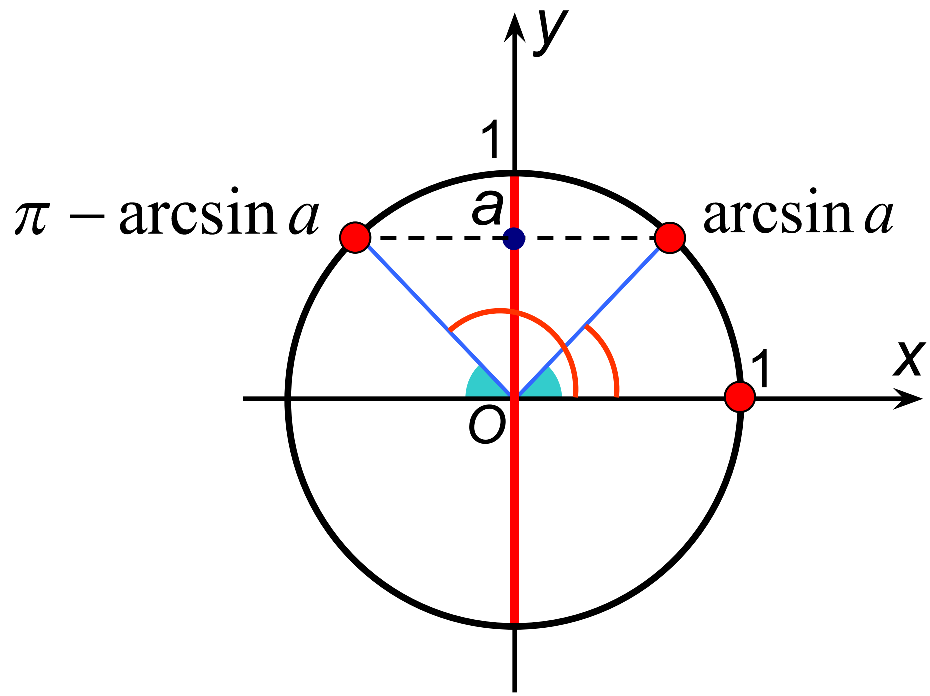


$$\alpha = \arcsin a$$

1) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

2) $\sin \alpha = a$

Решение уравнения $\sin x = a$



$$x = (\pi - \arcsin a) + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$x = -\arcsin a + \pi(2k+1), \quad k \in Z$$

$$x = \arcsin a + \pi(2k), \quad k \in Z$$

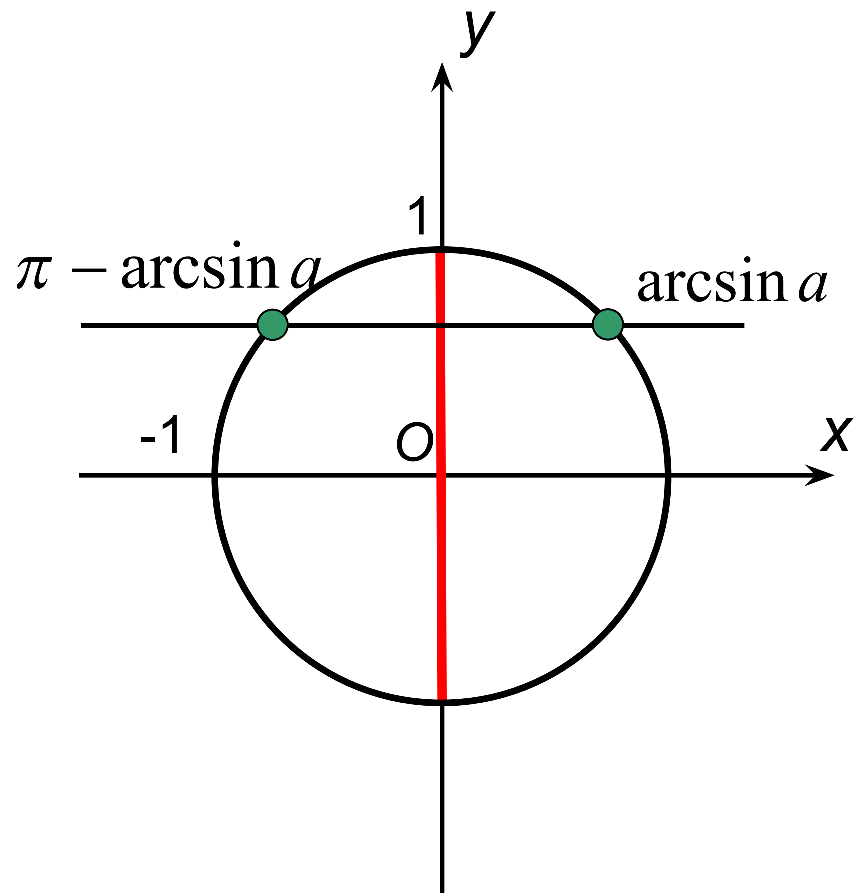
$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$$

Уравнение sin x = a

- а) при **-1< t < 1** имеет две серии корней

x_1 = ***arcsin* a + 2πn, n є Z**

x_2 = π - *arcsin* a + 2πn, n є Z.



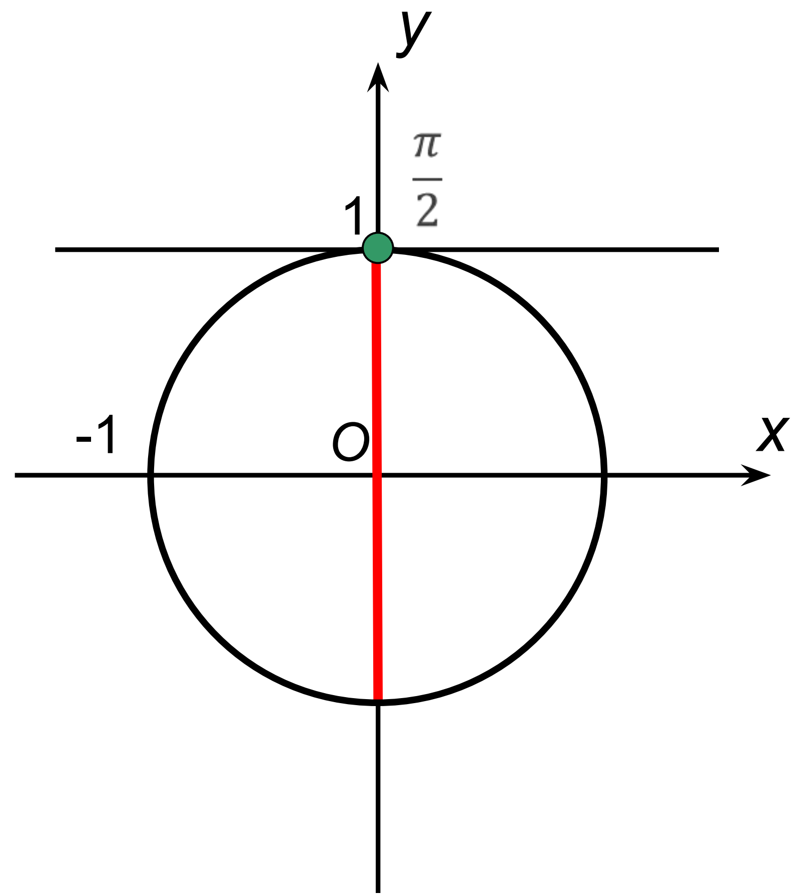
Эти серии можно записать так:

X = (-1)^k *arcsin* a + πk, k є Z

Уравнение sin x = a

- б) **при a = 1** имеет одну серию решений

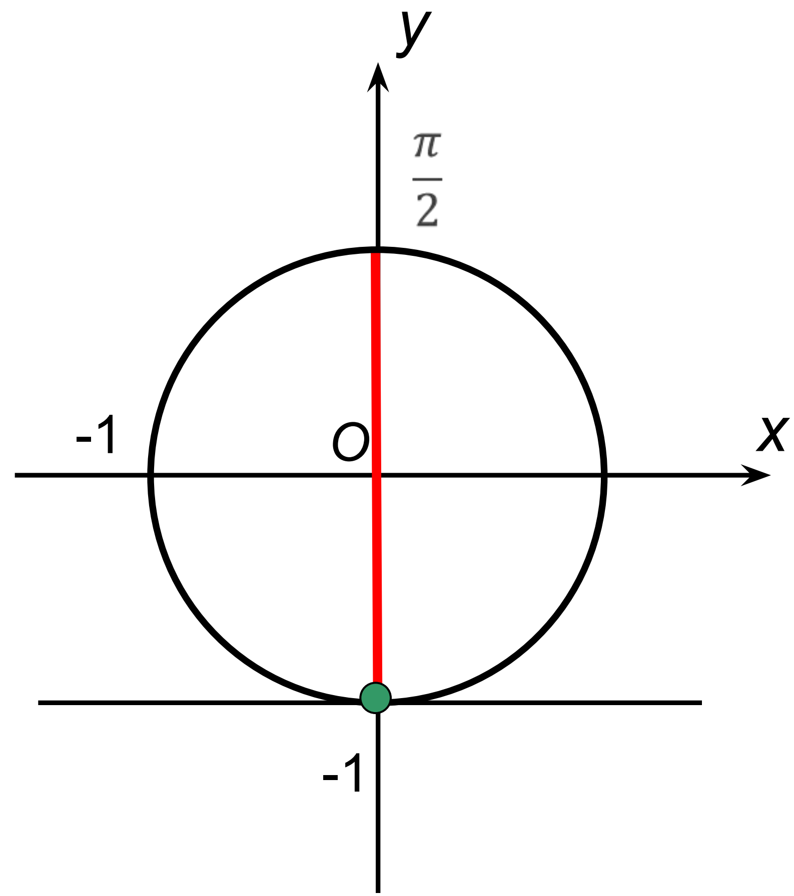
$$X = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$



Уравнение   sin x = a

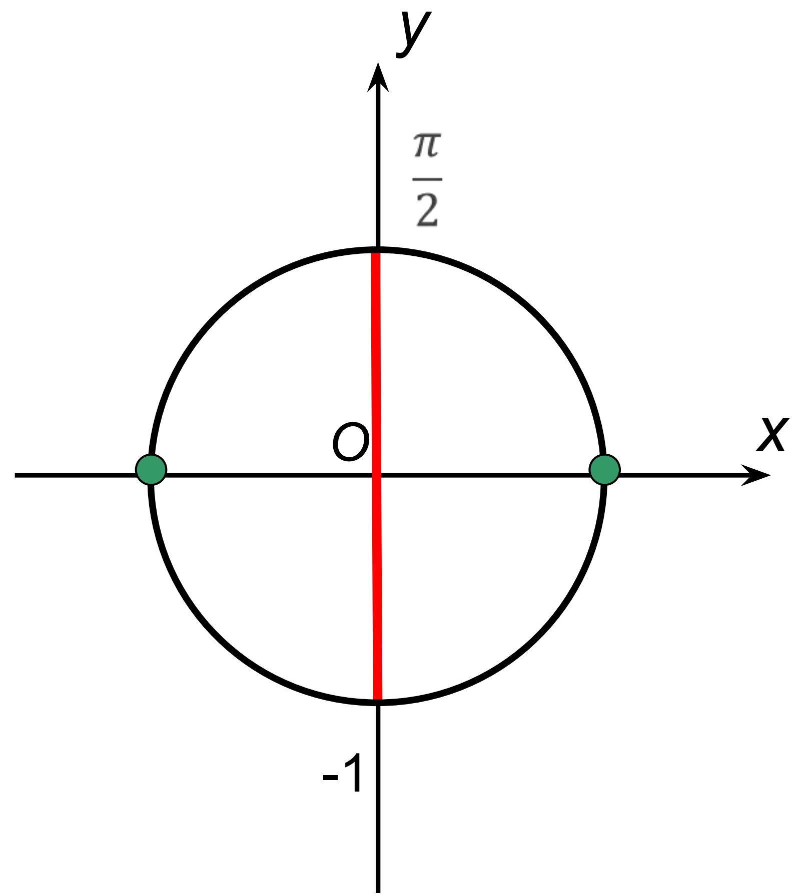
- в) **при а = -1** имеет одну серию решений

$$X = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$



Уравнение $\sin x = a$

- г) **при $a = 0$** имеет две серии решений



$x_1 = 0 + 2\pi n, \ n \in Z$

$x_2 = \pi + 2\pi n, \ n \in Z.$

Эти серии можно записать так:

$x = \pi k, \ k \in Z$

Решите уравнение

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

- $$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Решите уравнение

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Задание 2. Найти корни уравнения:

1) а) $\sin x = 1$ б) $\sin x = -1$ в) $\sin x = 0$

г) $\sin x = 1{,}2$ д) $\sin x = 0{,}7$

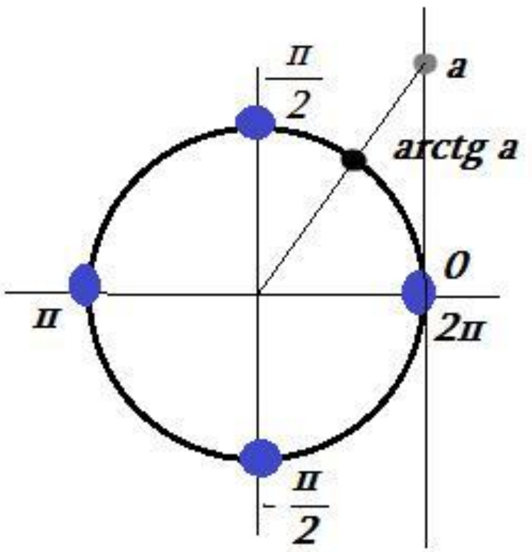
2) а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $\sin x = -\frac{1}{2}$ г) $\sin 2x = 0$

Уравнение tg t = a

при любом ***a ϵ R*** имеет одну серию решений

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \; n \in Z$.



Решите уравнение

1) x= t$\sqrt{3}$

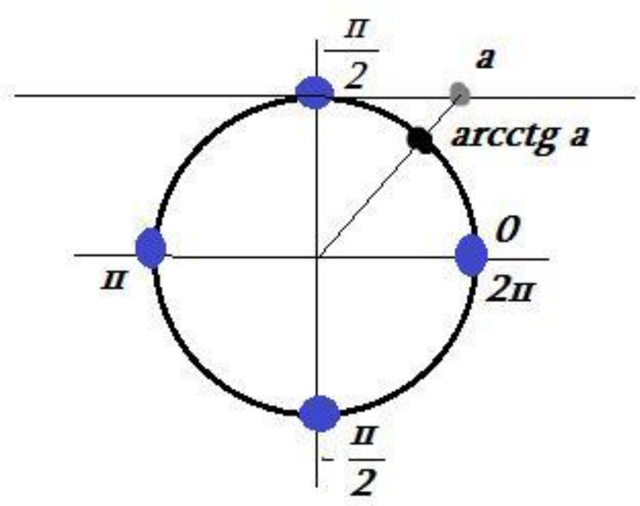
2) x= tg (- $\sqrt{3}$)

x = + πn, nϵ Z.

Уравнение ctg t = a

при любом ***a ϵ R*** имеет одну серию решений

$x = \text{arcctg } a + \pi n, \; n \in Z.$



Решите уравнение

1) ctg x = 1

2) ctg x = - 1