



ТОМСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ



# ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Надежность технических систем**

2018

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

---



## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

---



- отказы ТС\*
- ошибки операторов ТС
- внешние негативные воздействия

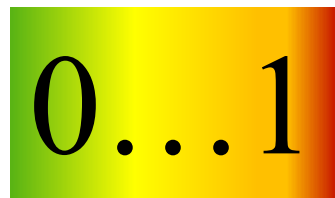


*\*Отказ – это нарушение работоспособности\*\**

*\*\*Работоспособность – состояние ТС, при котором она способно выполнять свои функции с параметрами, установленными требованиями технической документации.*



- отказ ТС;
- аварийный исход;
- образование поражающих факторов;
- поражение объектов воздействия;
- вторичные поражающие факторы;
- воздействия вторичных факторов;
- поражение.



# Вероятность

Основная причина – отказ.

Отказ – случайное события.

Параметры, описывающие случайные события, – случайные величины.

*Случайное событие* – событие, которое может произойти или не произойти.

*Случайная величина* – величина, которая при многократных равноточных измерениях (сделанных в одних условиях) может принимать различные числовые значения.



**В основе обработки случайных величин  
лежат знания  
вероятностных закономерностей случайных событий,  
являющихся предметом  
теории вероятностей.**

Данные знания позволяют построить закономерности изменения численных характеристик, описывающих случайные события.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях науки, техники и технологии:

- теория автоматического управления,
- **теория надежности,**
- теория ошибок наблюдений,
- теория массового обслуживания

и т.д.

### Событие

*Достоверное событие* – событие, которое произойдет при соблюдении определенных условий.

Например, отказ.

*Невозможное событие* – событие, которое заведомо не может произойти при заданных условиях.

*События независимые* – наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. В противном случае события – *зависимые*.



*Не совместные (совместные) события* – события, появление одного из которых исключает (не исключает) возможности появления другого.

Пример, отказ и безотказная работа.

*Противоположное событие  $\bar{A}$*  относительно некоторого события  $A$  – событие ( $\bar{A}$ ), состоящее в не появлении выбранного события  $A$ .

Например, отказ и безотказная работа.

*Полная группа событий* – совокупность событий, при которой в результате действий должно произойти хотя бы одно из событий этой совокупности.

Например, отказ и безотказная работа.

*Генеральная совокупность  $N$*  – полный набор всех возможных значений, которые может принимать случайная физическая величина.

*Выборка объема* – набор  $n$  значений величин  $x_i$ , полученный из генеральной совокупности  $N$ .

Можно понимать:

- под выборкой – реально рассматриваемую совокупность значений  $(x_1, x_2, \dots, x_i)$  случайной величины  $X$ ;
- под генеральной совокупностью – гипотетически существующую совокупность возможных значений.



**Цель обработки набора значений величин  $x_i$  выборки –  
определение закономерностей, описывающих  
генеральную совокупность.**

## Частотное определение вероятности

*Абсолютная частота случайного события  $A$*  – количество  $m$  проявления данного события, зафиксированного в объеме данных  $n$ .

*Относительная частота случайного события  $A$ :*

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где  $m$  – число появления события  $A$  в серии испытаний;

$n$  – общее число проведенных одинаковых испытаний.



При малом количестве испытаний в серии значения  $W$  для разных серий различны –  $W_k$

$$W_k = \frac{m_k}{n}.$$

При большом числе испытаний значения появления события  $W_k$  в различных сериях отличаются друг от друга незначительно

$$W_1 = \frac{m_1}{n} \approx W_2 = \frac{m_2}{n} \approx \dots W_k = \frac{m_k}{n},$$

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = P,$$

где  $P$  – вероятность появления случайного события  $A$ .

Из определения вероятности вытекают свойства:

- вероятность случайного события есть положительное число

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- вероятность достоверного события

$$P(A)=1.$$

- вероятность невозможного события

$$P(A)=0.$$



## Теорема сложения вероятностей

Если события  $A$  и  $B$  совместны, то вероятность появления одного из них равна сумме их вероятностей минус вероятность их одновременного появления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Вероятность появления одного из двух несовместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Сумма вероятностей двух несовместных противоположных событий, образующих полную группу

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

## Теорема умножения вероятностей

- зависимые события:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

*Условная вероятность* события  $A$   $P(A/B)$  – вероятность события  $A$ , вычисленная в предположении, что событие  $B$  произошло

- независимые события:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$



## Функция распределения

Многokратные равноточные измерения физической величины – выборка  $x_i$ .

Истинное значение  $x_0$  измеряемой величины  $X$  – неизвестно.

Область значений разбивается на равные интервалы  $\Delta x$ .

Определяется количество измерений, попавших в каждый интервал:  $m_1, m_2, \dots, m_k$ .

Для каждого интервала получим значения:

- абсолютной частоты –  $m_1, m_2, \dots, m_k$ ;
- относительной частоты:

$$W_k = \frac{m_k}{n},$$

где  $k$  – порядковый номер интервала;

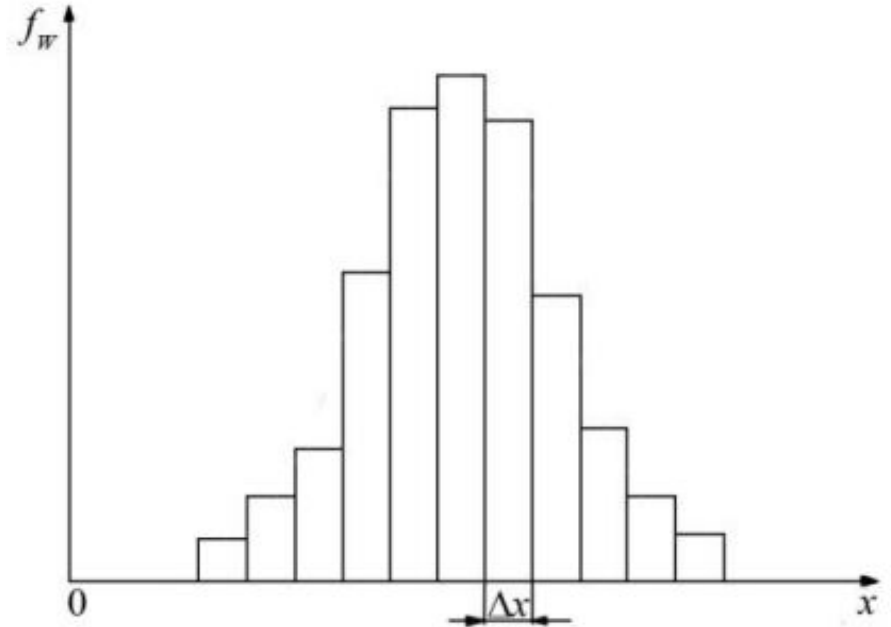
- плотности относительной частоты

$$f_k(x) = \frac{m_k}{\Delta x \cdot n},$$



Гистограмма распределения по осям:

- абсцисс – интервалы  $\Delta x$ ,
- ординат – значения  $m_i$ ,  $W_i$  или  $f_W$ .



Для каждого числа  $x$  в диапазоне изменения случайной величины  $X$  существует определенная вероятность  $P(X < x)$  того, что  $X$  не превышает значения  $x$ :

$$F(x) = P(X < x)$$

Вероятность этого события называют *функцией распределения*:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Показывает, какие значения случайной величины наиболее вероятны.

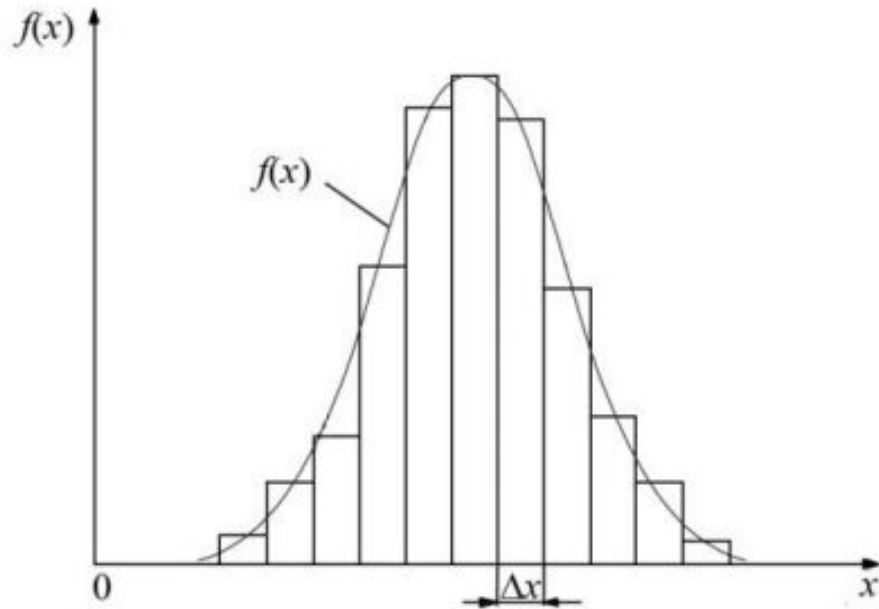
## Плотность вероятности

Находится при условии:

- число интервалов  $k \rightarrow \infty$ ,
- длина интервала  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Плотность вероятности –  
производная от функции  
распределения:

$$f(x) = \frac{P(x)}{dx} = \frac{F(x)}{dx}.$$





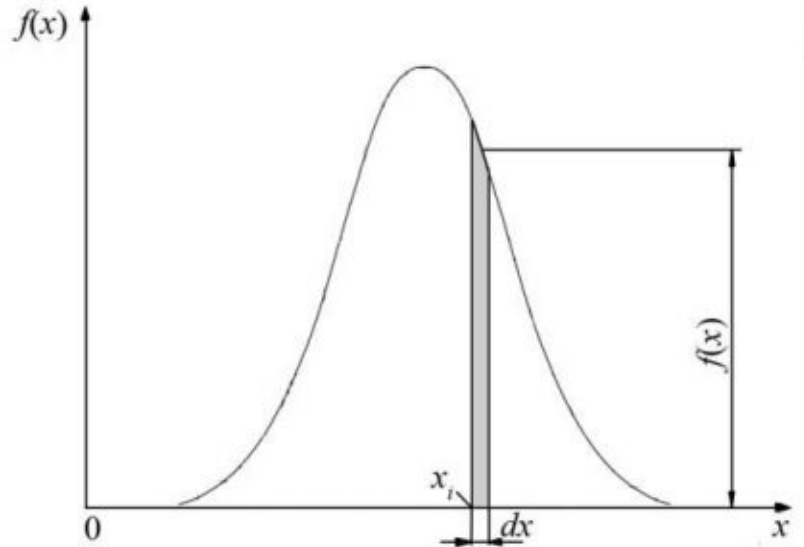
Плотность вероятности (площадь под кривой в интервале  $x \in [x_i, x_i + dx]$ ) позволяет вычислить вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{x_i}^{x_i+dx} f(x) dx.$$

Для интервала  
бесконечной длины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$



В теории надежности за случайную величину обычно принимают время работы изделия (время до возникновения отказа):

$$x \rightarrow t: F(x) \rightarrow F(t), f(x) \rightarrow f(t)$$

**Во многих случаях нет необходимости пользоваться функциями  $F(t)$  или  $f(t)$ , достаточно знать числовые характеристики этих кривых.**

## Числовые характеристики

В теории надежности наиболее распространены:

- среднеарифметическое значение;
- математическое ожидание;
- дисперсия;
- среднеквадратичное отклонение.

*Случайная величина:*

- дискретная;
- непрерывная.





*Математическое ожидание* – наиболее вероятное значение случайной величины:

- для дискретных случайных величин

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i;$$

- для непрерывных случайных величин

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсия – мера отклонения случайной величины  $X$  от ее математического ожидания

$M(x)$ :

- для дискретных случайных величин

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 \cdot p_i;$$

- для непрерывных случайных величин

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - M(x))^2 \cdot f(x) dx$$

Среднеквадратичное отклонение характеризует рассеяние случайной величины:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

На практике  $M(x)$  и  $D(x)$  случайной величины можно оценить только на основе выборки из конечного числа измерений случайной величины:

- выборочное среднее арифметическое значение случайной величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

- исправленное выборочное среднеквадратическое значение случайной величины

$$D(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



Для оценки

- $M(x)$  кроме  $\bar{x}$  могут использоваться:
  - медиана – значение, при котором площади под кривой справа и слева от медианы равны;
  - мода – значение, в котором плотность вероятности наибольшая либо (для дискретных) наиболее часто встречающееся значение
- дисперсии – размах:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

## Законы распределения случайных величин

*Закон распределения случайной величины* – функциональная зависимость между возможными значениями случайной величины и соответствующим им вероятностям.

Наиболее полно описываются числовыми характеристиками, функцией распределения и плотностью вероятности.



Наибольшее распространение получили законы:

- для дискретных случайных величин:
  - биномиальный закон;
  - закон Пуассона;
- для непрерывных случайных величин:
  - нормальный закон и логарифмически-нормальное;
  - закон Вейбулла-Гнеденко;
  - экспоненциальный закон;
  - гамма-распределение;
  - Рэля.

## Закон Пуассона

Описывает закономерность появления случайных отказов в сложных системах.

Случайная величина  $X$  распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что эта величина примет определенное значение  $m$ , выражается:

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

$\lambda$  – параметр распределения (ожидаемое количество появлений значения  $m$ )

Параметр распределения

$$\lambda = np,$$

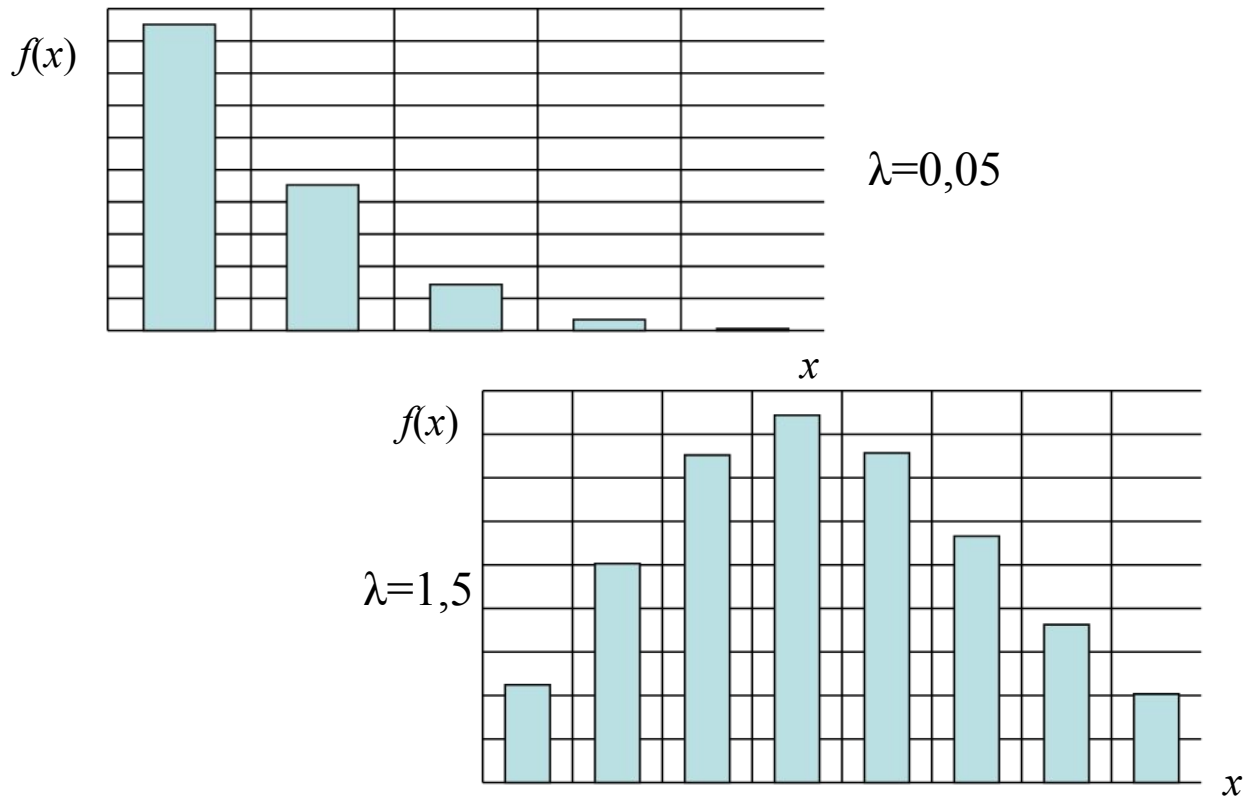
где  $n$  – общее количество испытаний;

$p$  – вероятность появления ожидаемого события (отказа).

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = D(x) = \lambda$$







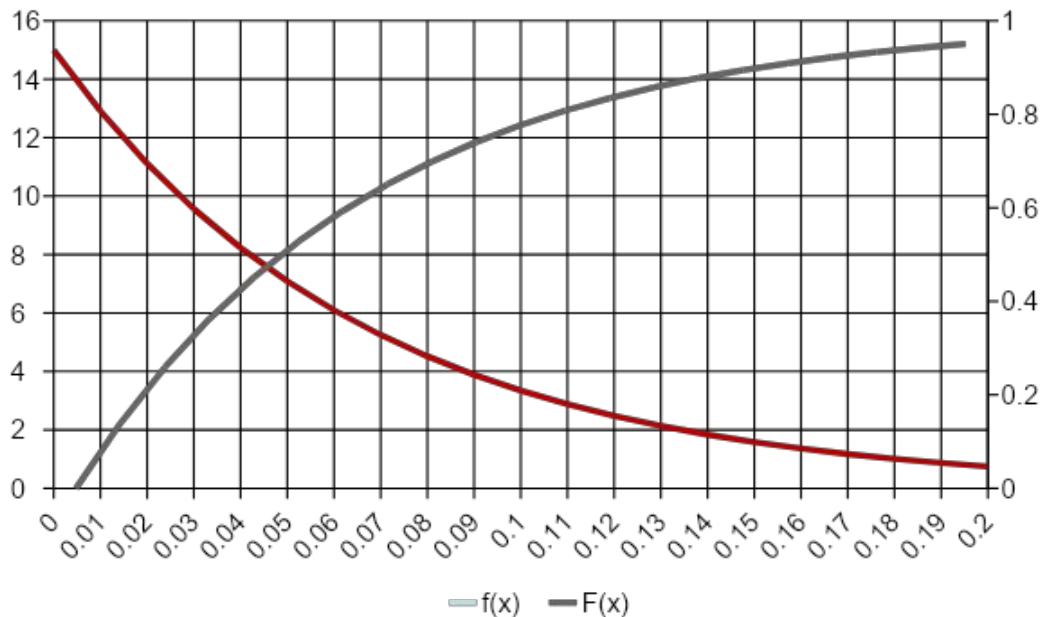
## Экспоненциальный закон

Основной закон, т.к. описывает закономерность появления отказов в период нормальной эксплуатации изделий: постепенные отказы еще не проявились и надежность характеризуется внезапными отказами.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$



Графики функции распределения  $F(x)$  и плотности вероятности  $f(x)$  при  $\lambda=15$

## Нормальный закон

Используют для описания постепенных отказов, когда распределение времени безотказной работы вначале имеет низкую плотность, затем максимальную и далее плотность снижается.

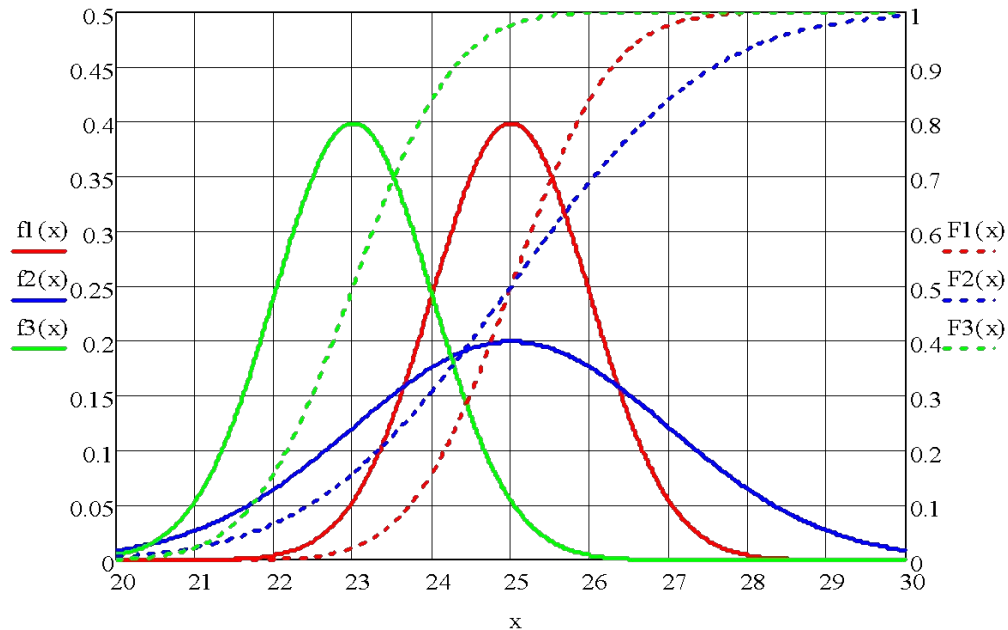
Плотность вероятности и функция распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

где  $m$  – математическое ожидание, мода, медиана;

$\sigma$  – стандартное отклонение.

$a$  и  $b$  – пределы изменения значений величины  $X$ .



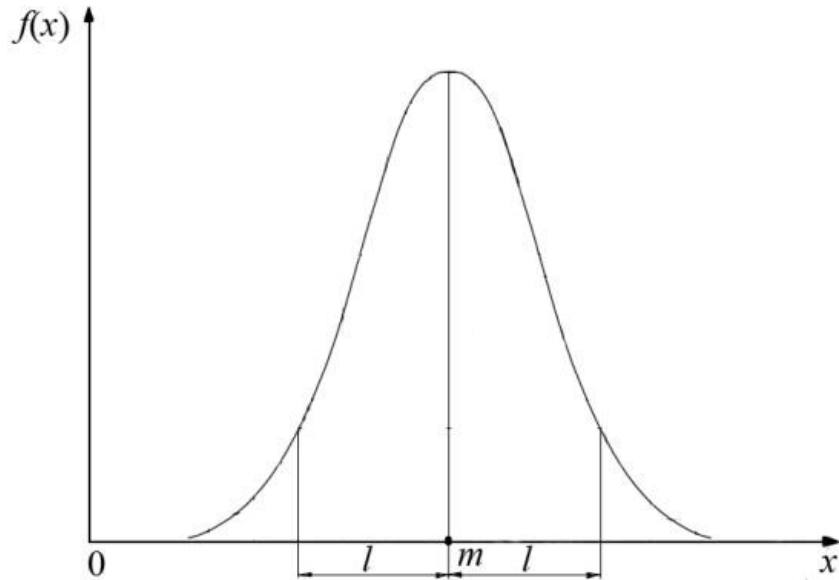
Графики функции распределения  $F(x)$  и плотности вероятности  $f(x)$ :  
 $m=25, \sigma=1$  ( $f_1(x), F_1(x)$ );  $m=25, \sigma=2$  ( $f_2(x), F_2(x)$ );  $m=23, \sigma=1$  ( $f_3(x), F_3(x)$ )

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx;$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (M(x) - x)^2 f(x)dx.$$

Часто приходится вычислять  
вероятность того, что значение  
случайной величины  $X$  попадает в  
интервал  $(m - l, m + l)$





Вероятность, с которой в условиях данного эксперимента полученные экспериментальные данные можно считать надежными либо достоверными, называют **доверительной вероятностью** (надежностью)

Интервал  $x \in [-l, +l]$ , соответствующий доверительной вероятности, называется **доверительным интервалом**.



Вероятность попадания значения случайной величины  $X$  в интервал  $(m - l, m + l)$ , выраженный через среднеквадратичное отклонение  $\sigma$ :

## Правило трех сигм

Интервал	Вероятность
$m - \sigma \leq x \leq m + \sigma$	68,3%
$m - 2\sigma \leq x \leq m + 2\sigma$	95,5%
$m - 3\sigma \leq x \leq m + 3\sigma$	99,7%

Вероятность того, что случайная величина отклонится от своего  $M(x)$  ожидания на величину, большую чем утроенное  $\sigma$ , практически равна нулю (0,3%).

## Закон Вейбулла-Гнеденко

Универсальный – при соответствующих значениях переходит в нормальное, экспоненциальное и другие.

Закон удовлетворительно описывает:

- разброс усталостной прочности стали, пределов ее упругости;
- наработку до отказа подшипников, элементов радиоэлектронной аппаратуры,
- надежность деталей и узлов машин, в частности автомобилей, а также для оценки надежности машин в процессе их приработки

Функция распределения

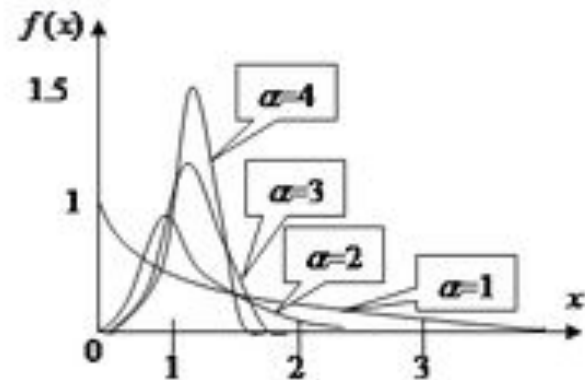
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha},$$

$\alpha$  – параметр формы (определяется подбором в результате обработки экспериментальных данных);

$\lambda$  – параметр масштаба

плотность вероятности

$$f(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha},$$





ТОМСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ



# ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Надежность технических систем**

2018