

Лекция

Взаимные пересечения поверхностей

Пересечение поверхностей

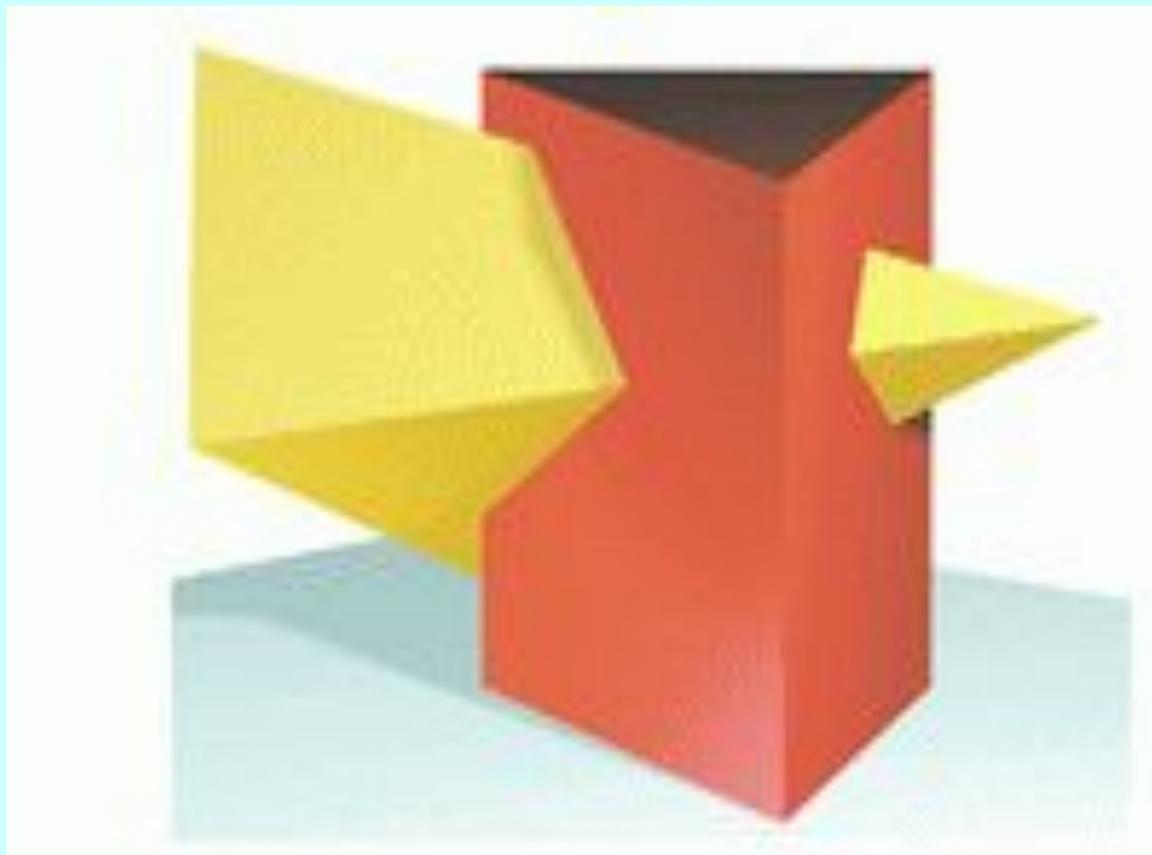
- Из линейной алгебры (многомерной геометрии) хорошо известно, что в расширенном евклидовом пространстве E_{n+} размерность пересечения геометрических объектов может быть определена из соотношения
$$p = m_1 + m_2 - n,$$
где p - размерность объекта получаемого в пересечении,
 m_1 - размерность первого объекта (m_1 - поверхности),
 m_2 - размерность второго объекта (m_2 - поверхности),
 n - размерность рассматриваемого пространства.
- В соответствии с выше приведенной формулой пересечение двух поверхностей (двумерных $m_1 = m_2 = 2$) в трехмерном евклидовом пространстве E_{3+} должно привести к появлению одномерного объекта
- $p = 2+2-3=1$ - пространственной кривой ($p = 1$), все точки которой являются общими для обеих поверхностей.

- При построении линии пересечения наиболее характерны два случая:
 - одна из проекций линии пересечения известна и задача сводится к отысканию недостающих проекций точек по принадлежности одной из поверхностей;
 - проекции линии пересечения не известны.
- И в том и другом случае задача решается введением дополнительных секущих поверхностей, позволяющих находить точки, принадлежащие одновременно трем геометрическим объектам. В качестве дополнительных поверхностей берутся плоскости, цилиндры и сферы, дающие наиболее простые (заранее известные) линии при пересечении с заданными поверхностями.

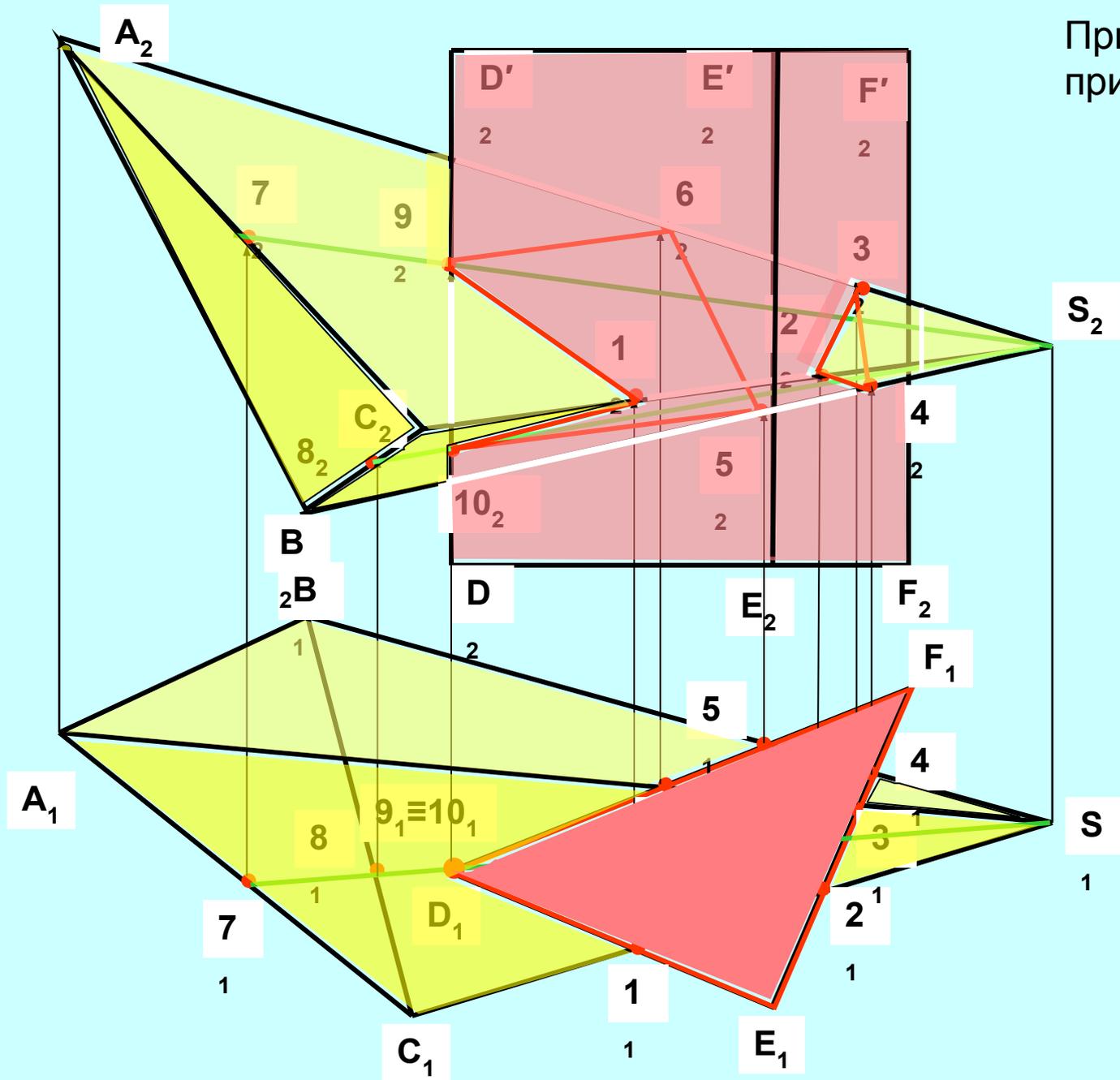
Применение вспомогательных секущих плоскостей.

- Построение линии пересечения поверхностей осуществляется при помощи вспомогательных секущих поверхностей. При этом данные поверхности пересекаются вспомогательной поверхностью и определяются линии пересечения каждой из данных поверхностей со вспомогательной. Если эти линии пересекаются (а они, в силу принадлежности одной и той же вспомогательной поверхности, могут пересекаться, касаться или не иметь общих точек), то полученные точки пересечения принадлежат обеим данным поверхностям и, следовательно, их линиям пересечения.

Пример модели



Пример пересечения
призмы с пирамидой



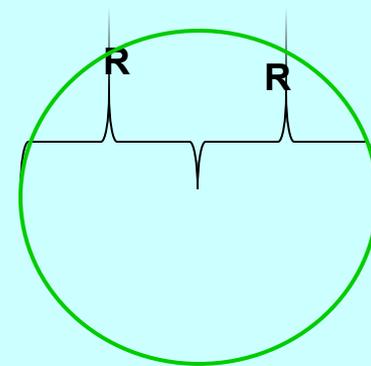
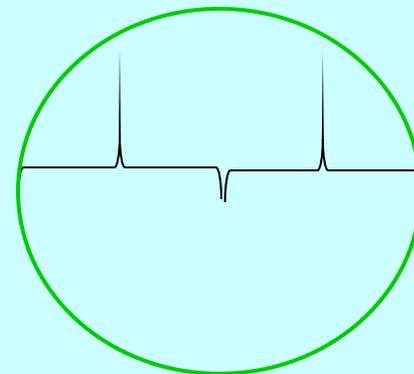
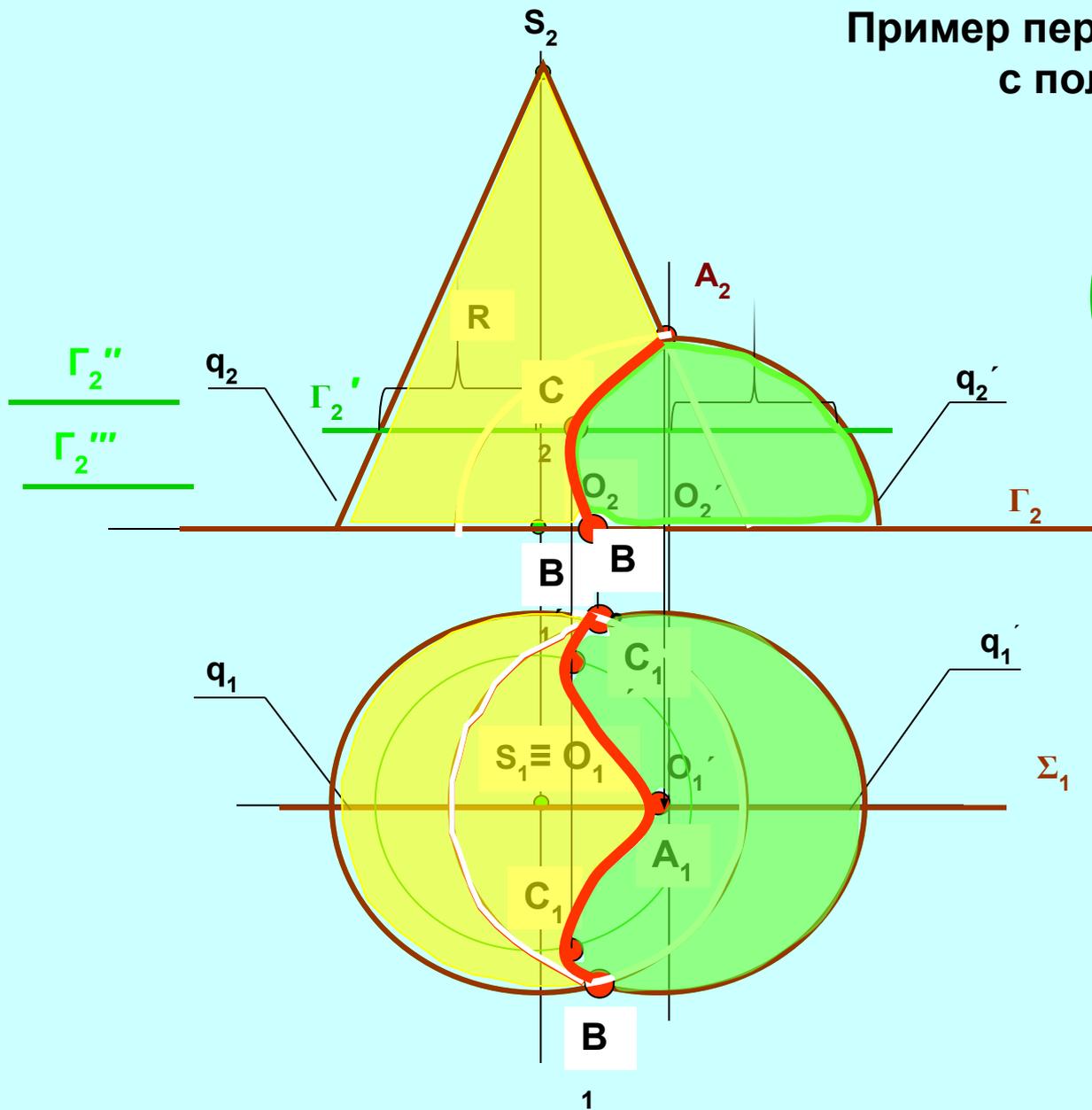
Применение вспомогательных секущих плоскостей.

- Построение линии пересечения кривых поверхностей осуществляется при помощи вспомогательных секущих поверхностей. При этом данные поверхности пересекаются вспомогательной поверхностью и определяются линии пересечения каждой из данных поверхностей со вспомогательной. Если эти линии пересекаются (а они, в силу принадлежности одной и той же вспомогательной поверхности, могут пересекаться, касаться или не иметь общих точек), то полученные точки пересечения принадлежат обеим данным поверхностям и, следовательно, их линии пересечения.

- Если в качестве вспомогательных секущих поверхностей используются плоскости, то способ построения называют **способом вспомогательных секущих плоскостей**. Если используются сферы - **способом вспомогательных сфер**. Рассмотрим применение вспомогательных секущих плоскостей на примере построения линии пересечения конуса и полусферы вращения, конуса и цилиндра, конуса и призмы, полусферы и цилиндра..
- Для построения линии пересечения заданных поверхностей удобно в качестве вспомогательных поверхностей использовать серию горизонтальных плоскостей, перпендикулярных оси конуса, которые пересекают конус и полусферу по окружностям. На пересечении этих окружностей находят точки искомой линии пересечения.

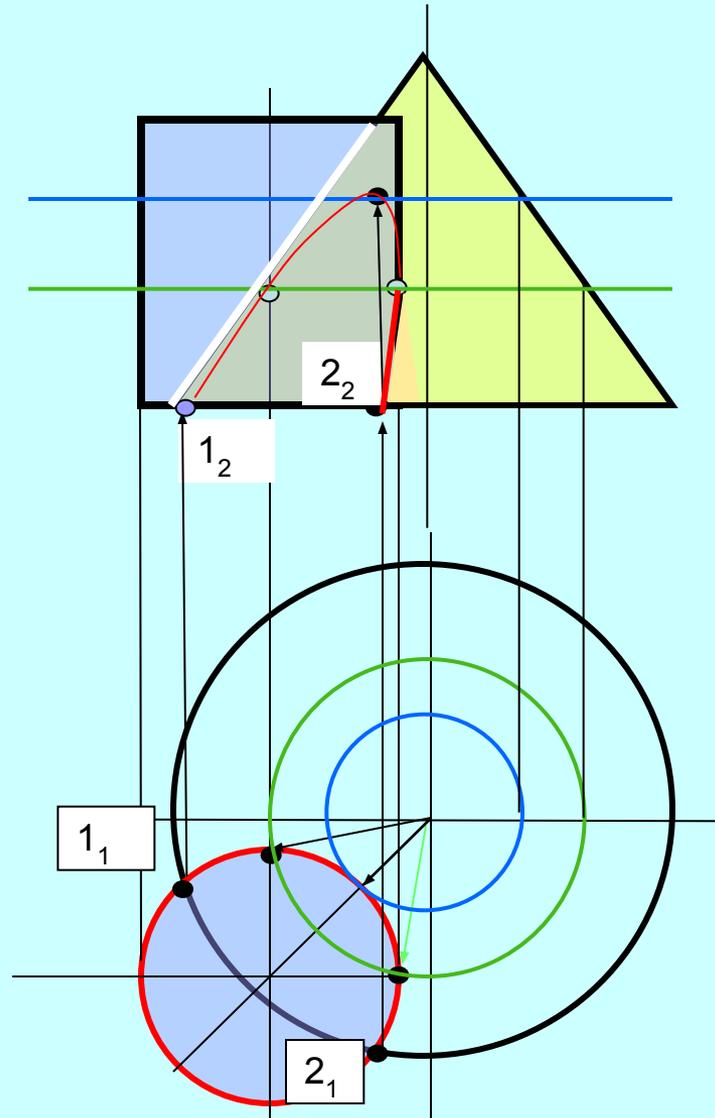
- В пересечении поверхностей образуется линия, **порядок** которой **равен произведению порядков** кривых поверхностей, участвующих в пересечении.
- Опорные и промежуточные точки определяются с помощью способа вспомогательных плоскостей.

Пример пересечения конуса с полусферой



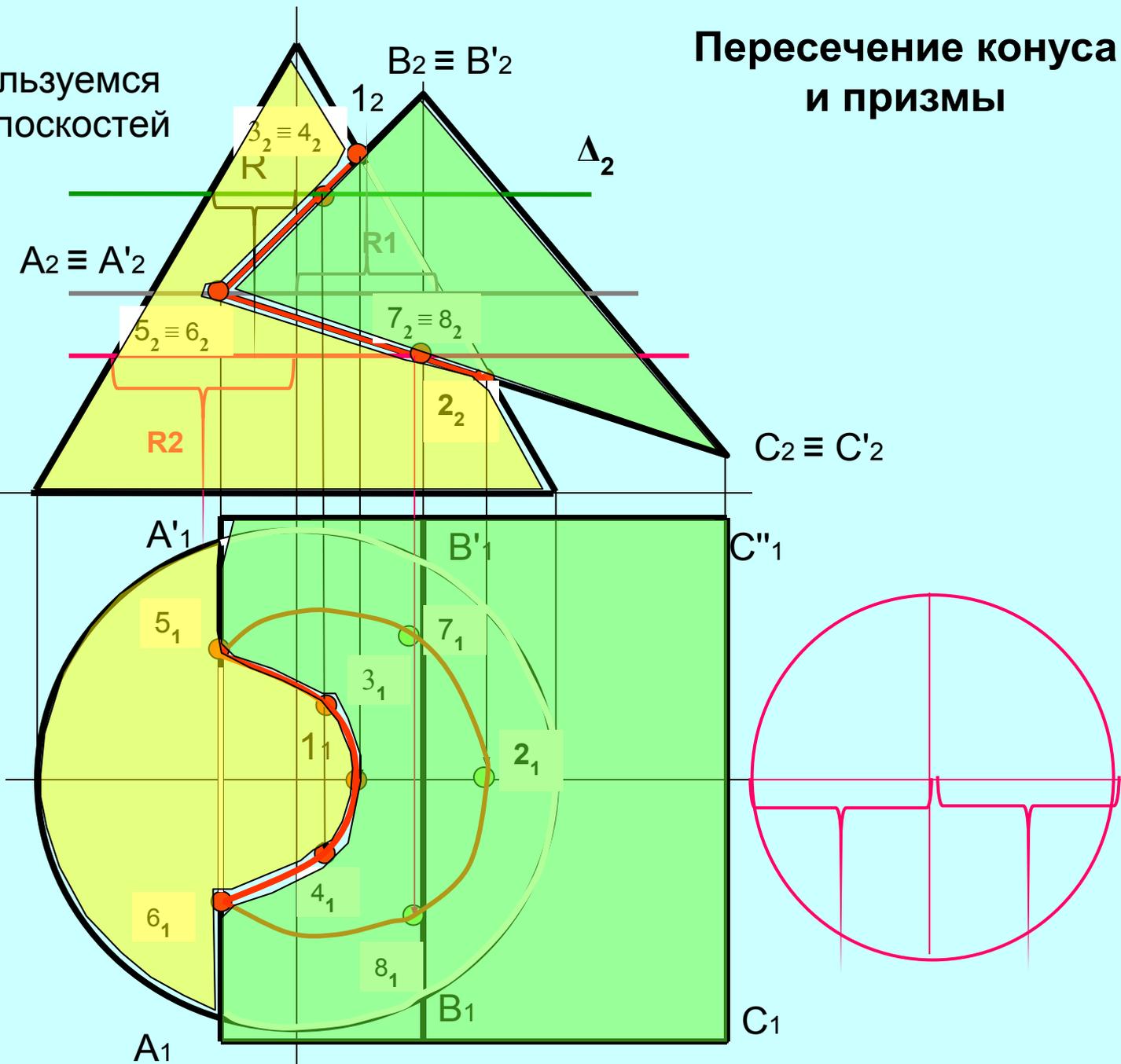
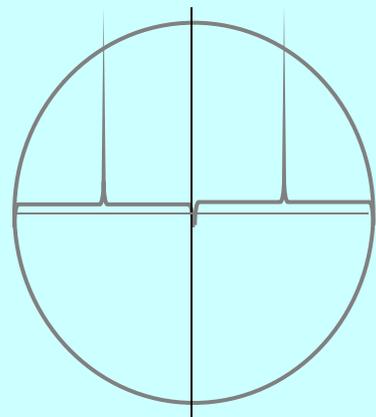
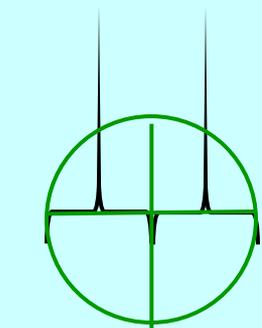
- **Анализ:** Случай врезки. Линия пересечения – пространственная кривая 4-го порядка. Используем способ вспомогательных секущих плоскостей.
- **Рассмотрим Алгоритм решения:**
- Плоскость $\Sigma \parallel P2$ пересекает поверхности по главным меридианам q, q' и дает экстремальную точку **A** (она же очерковая на **P2**).
- Плоскость $\Gamma \parallel P1$ пересекает поверхности по горизонтальным очеркам и дает очерковые на **P1** точки **B** и **B'**.
- Плоскости $\Gamma' \parallel P1$ и $\Gamma'' \parallel P1$ пересекают поверхности по окружностям и дают соответственно экстремальные и промежуточные точки.

Пересечение конуса и цилиндра



Для решения воспользуемся методом секущих плоскостей

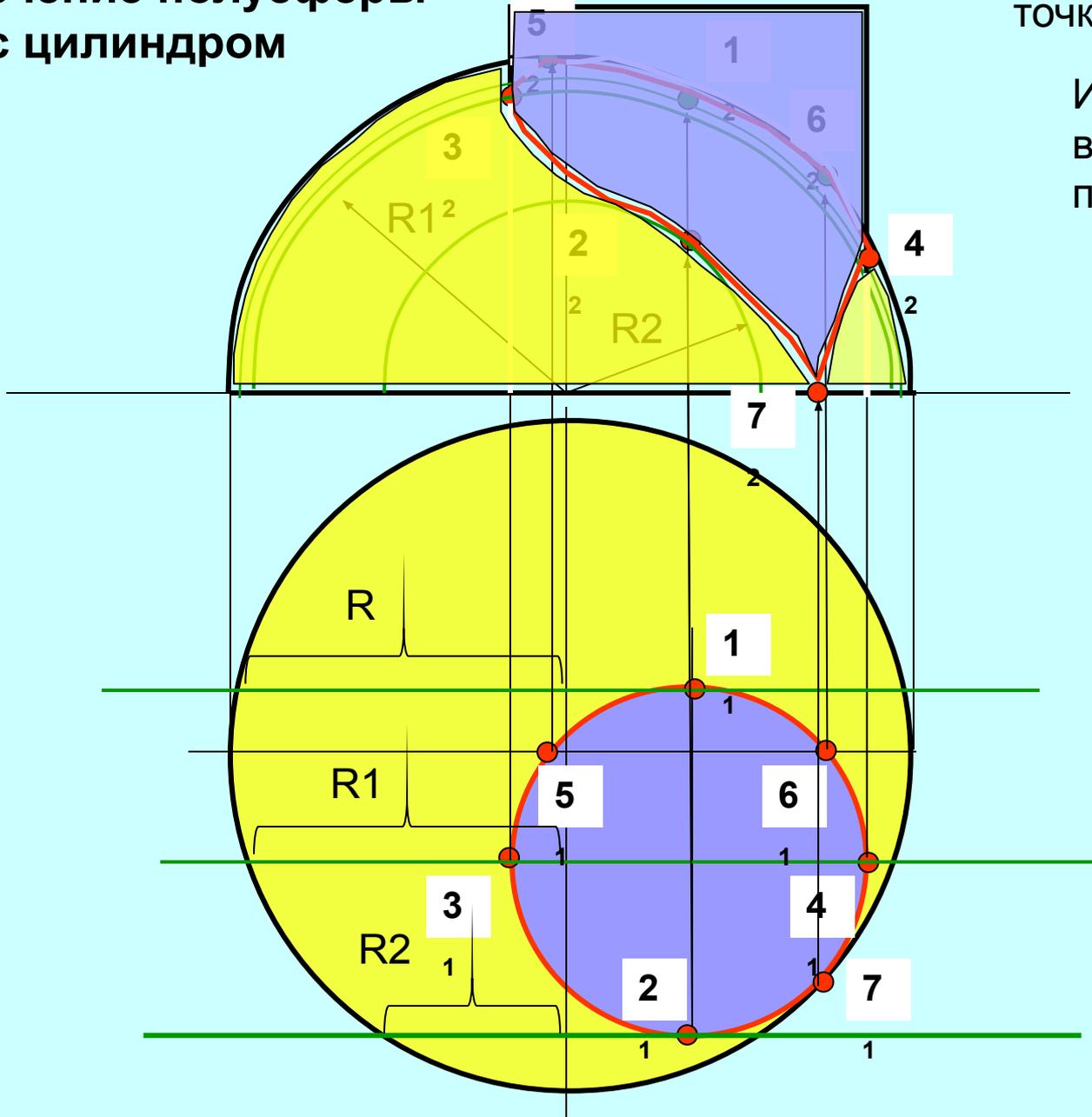
Пересечение конуса и призмы



Пересечение полусферы с цилиндром

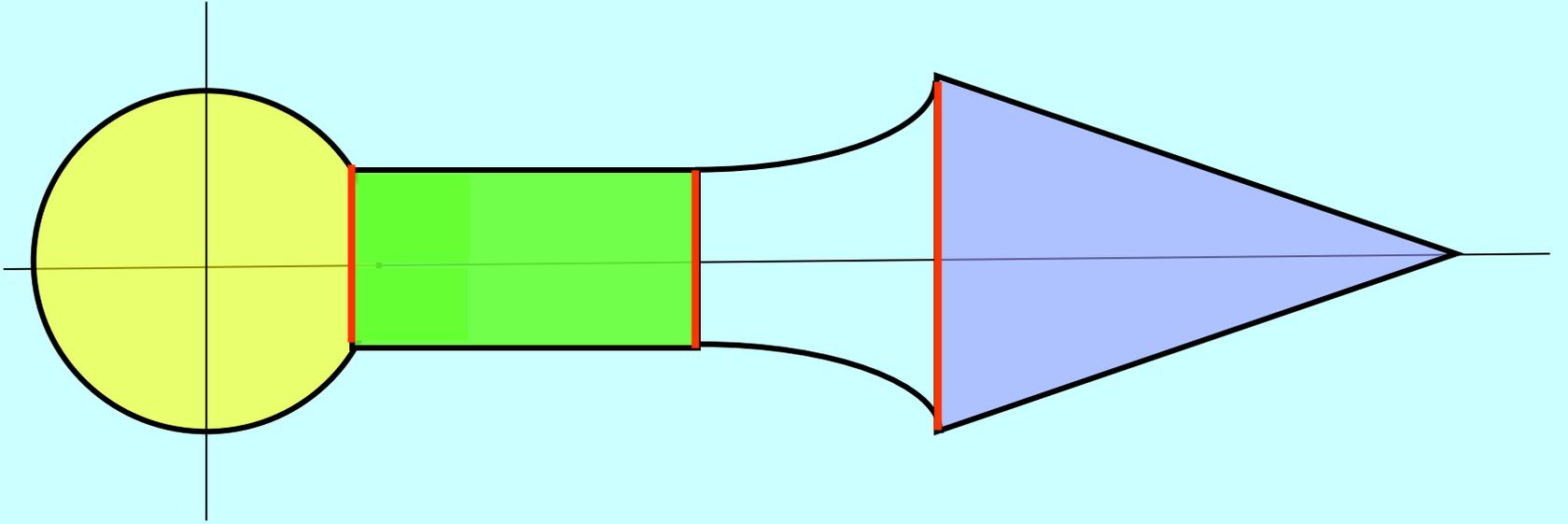
Рассмотрим опорные точки

Используем вспомогательные плоскости

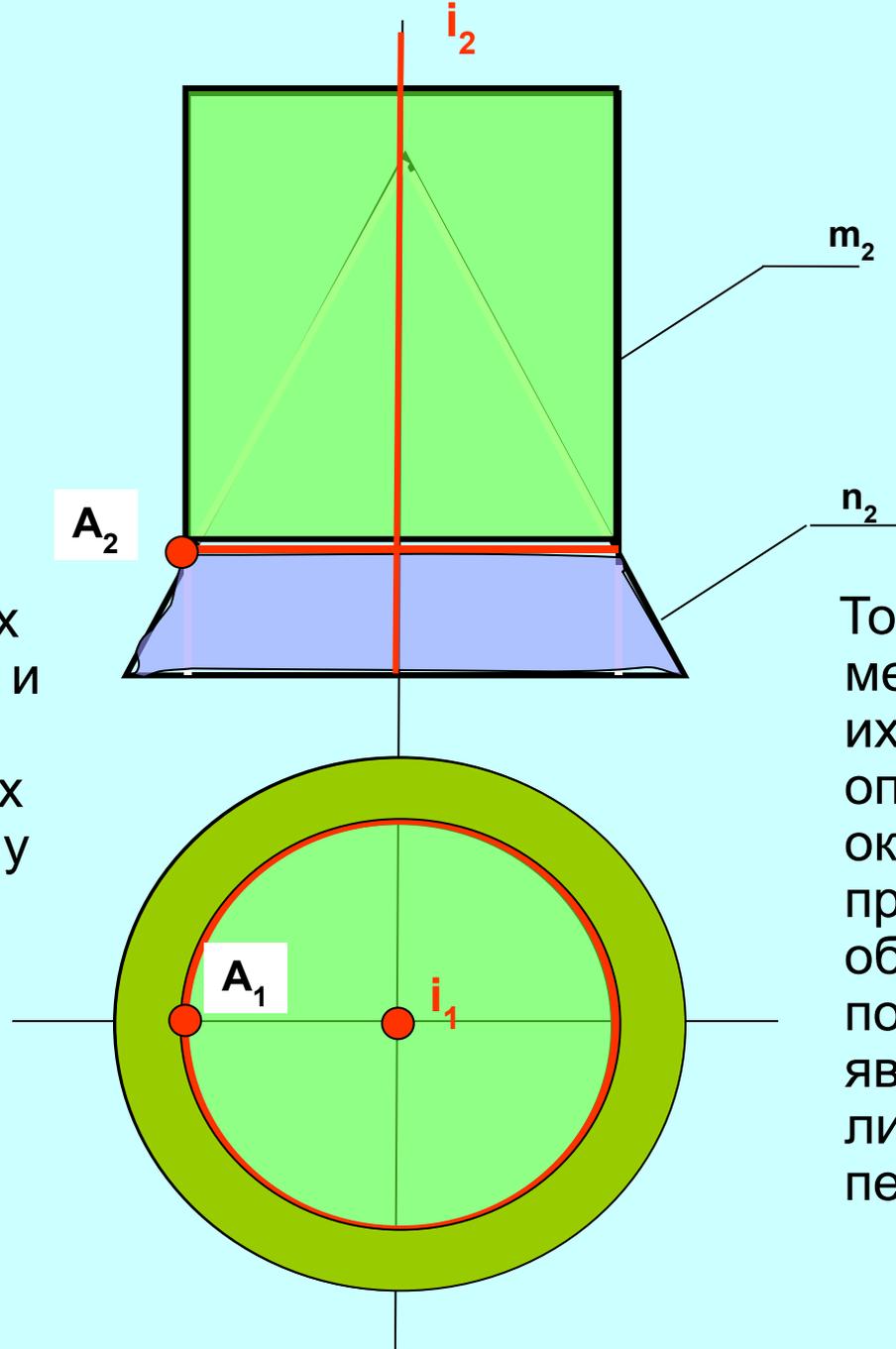


СООСНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- **Соосными** называются поверхности вращения, имеющие общую ось.
- **Теорема.** Две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, число которых равно числу точек пересечения главных полумеридианов поверхностей



- Число окружностей при пересечении поверхностей равно числу точек пересечения их меридианов m и n , расположенных по одну сторону от оси вращения i . соосных поверхностей вращения



Точки пересечения меридианов при их вращении описывают окружности, принадлежащие обеим поверхностям и являющиеся линиями их пересечения.

СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР

- Для построения линии пересечения поверхностей вращения, **имеющих круговые сечения**, в ряде случаев в качестве вспомогательных поверхностей целесообразно использовать сферы.
- Разновидности способа включают в себя: **способ концентрических сфер и способ эксцентрических сфер**.

Способ концентрических сфер применяется, если:

- - оси поверхностей пересекаются;
- - есть общая плоскость симметрии;
- - если способ вспомогательных секущих плоскостей не дает простого решения.

Способ эксцентрических сфер применяется, если:

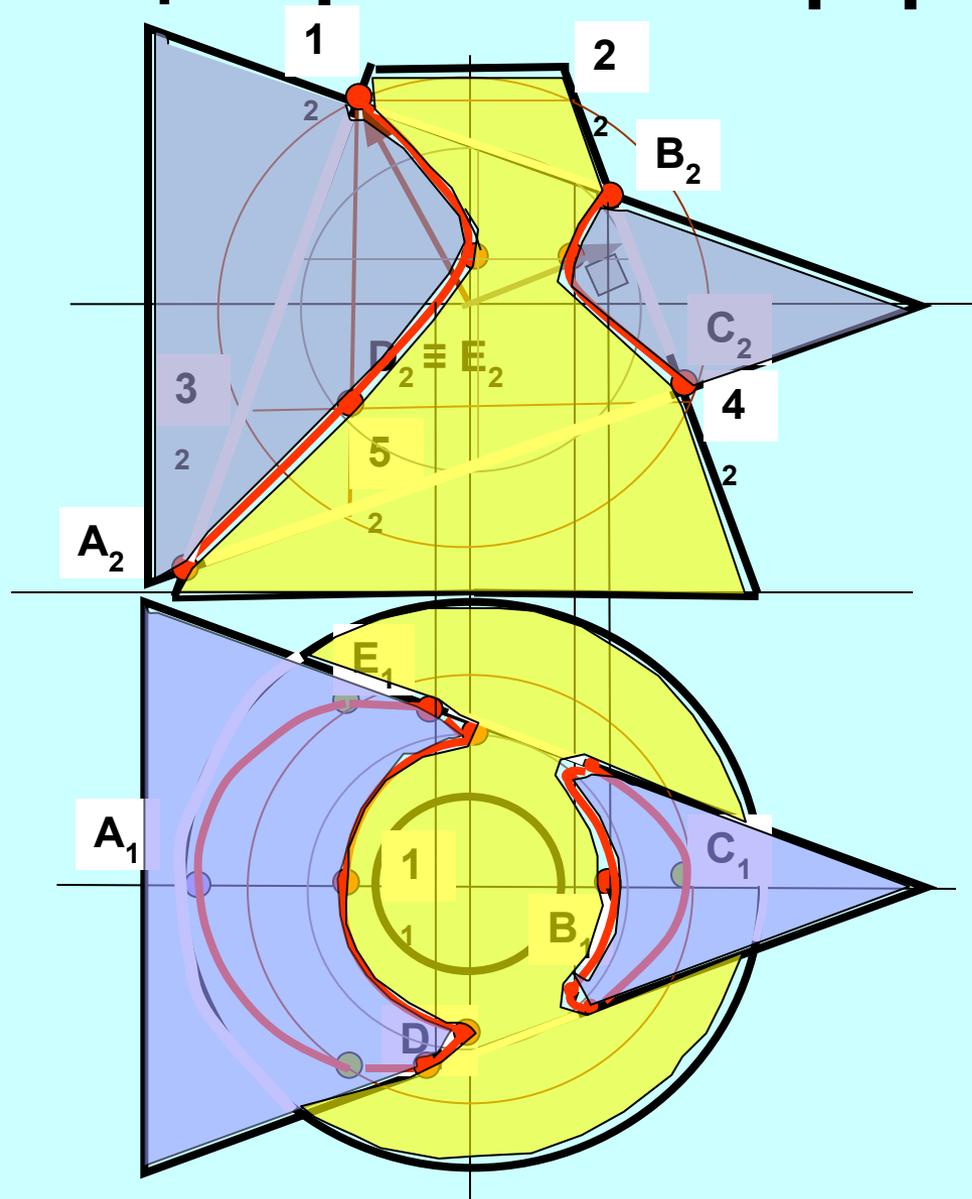
- - оси поверхностей скрещиваются;
- - есть общая плоскость симметрии;
- - каждая из поверхностей имеет семейство круговых сечений;
- - если способ вспомогательных секущих плоскостей не дает простого решения.

Применение концентрических сфер

- Известно, что если ось поверхности вращения проходит через центр сферы и сфера пересекает эту поверхность, то линия пересечения сферы и поверхности вращения - окружность, плоскость которой перпендикулярна оси поверхности вращения. При этом, если ось поверхности вращения параллельна плоскости проекций, то линия пересечения на эту плоскость проецируется в отрезок прямой линии. Это свойство используют для построения линии взаимного пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных сфер. При этом могут быть использованы концентрические и неконцентрические сферы. Рассмотрим применение вспомогательных концентрических сфер - сфер с постоянным центром.

- **Способ секущих сфер с постоянным центром** для построения линии пересечения двух поверхностей применяют **при следующих условиях:**
- **обе пересекающиеся поверхности** - поверхности вращения;
- **оси поверхностей вращения пересекаются;** точку пересечения принимают за центр вспомогательных (концентрических) сфер;
- **плоскость**, образованная осями поверхностей (плоскость симметрии), **должна быть параллельна плоскости проекций.** В случае, если это условие не соблюдается, то, чтобы его обеспечить, необходимо использовать способы преобразования чертежа.

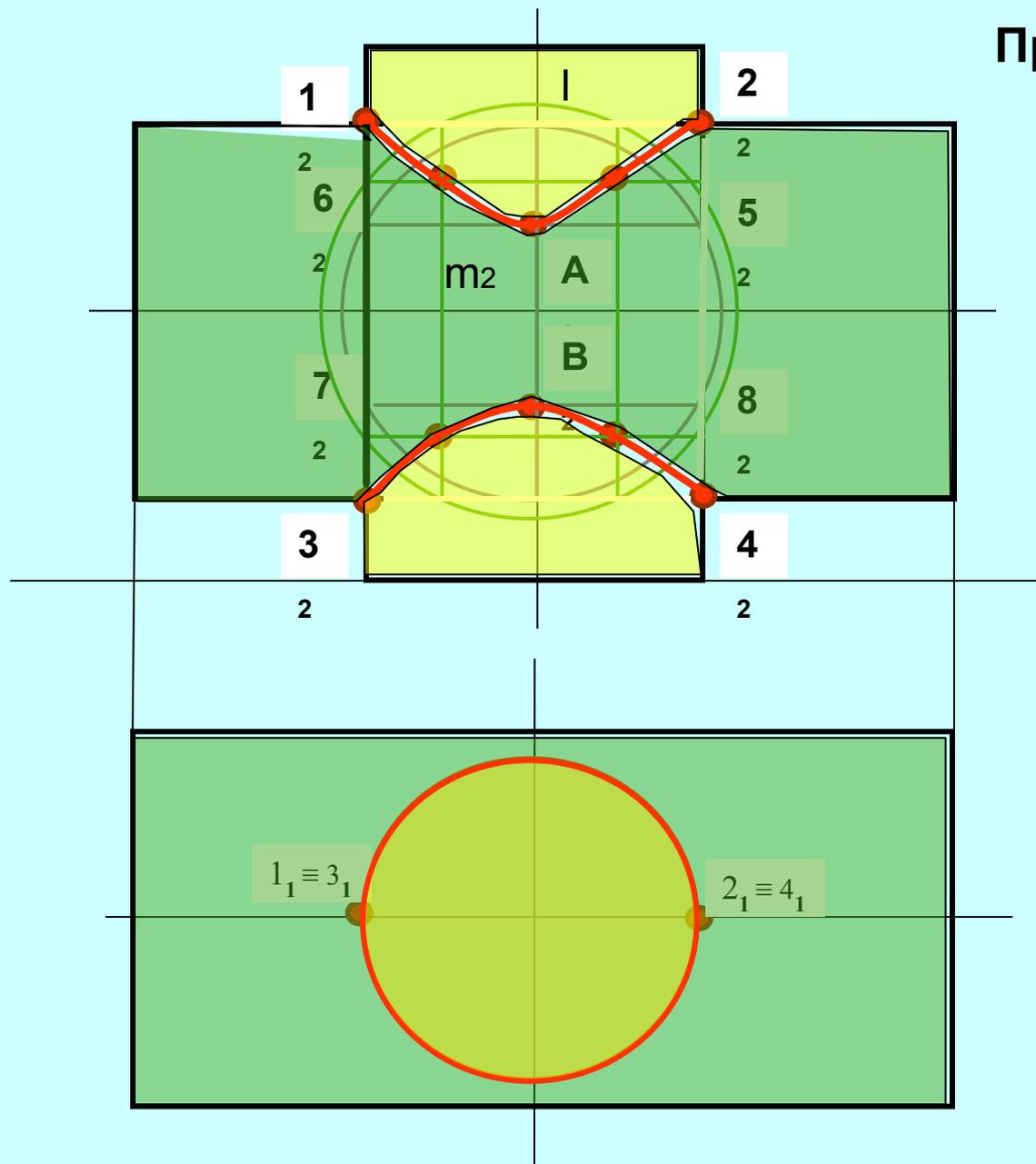
Пример применения способа концентрических сфер



Пересечение двух цилиндров

- Линия пересечения двух цилиндров может быть определена с помощью метода секущих сфер. Это определяется тем, что рассматриваемые поверхности являются поверхностями вращения и оси вращения пересекаются.
- Линия пересечения распадается на две ветви, нижнюю и верхнюю, построение которых аналогично Фронтальные проекции характерных точек линии пересечения $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$ определяются в результате пересечения фронтальных очерков поверхностей, а горизонтальные - определяются по принадлежности этих точек цилиндру. Низшая точка линии пересечения (А) определяется введением сферы, которая пересечет цилиндр по окружности l (фронтальная проекция этой окружности совпадет с фронтальной проекцией оси вращения цилиндра).
- С цилиндром эта же сфера пересечется по окружности m . Точка А и есть результат пересечения окружностей l и m . Промежуточные точки определяются аналогично, как пересечение окружностей, получающихся в пересечении произвольных сфер с цилиндрами. Фронтальные проекции точек линии пересечения определяются как пересечения отрезков прямых, в которые вырождаются окружности, перпендикулярные оси вращения, а горизонтальные проекции находятся по принадлежности одной из поверхностей. В данном случае - поверхности ?.

Пример пересечения цилиндров



Применение вспомогательных эксцентрических сфер.

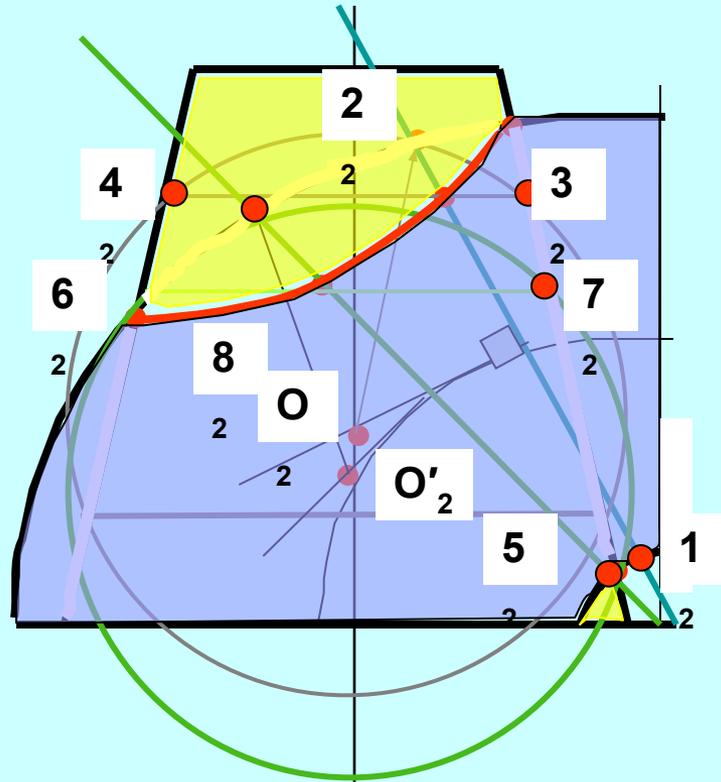
- Такие сферы применяют, если:
- **Одна из пересекающихся поверхностей - поверхность вращения, другая поверхность имеет круговые сечения;**
- **Две поверхности имеют общую плоскость симметрии (т. е. ось поверхности вращения и центры круговых сечений второй поверхности принадлежат одной плоскости - плоскости их симметрии);**
- **Плоскость симметрии параллельна плоскости проекций (это условие при необходимости может быть обеспечено преобразованием чертежа).**

Построение линии пересечения прямого кругового конуса и тора, оси которых скрещиваются

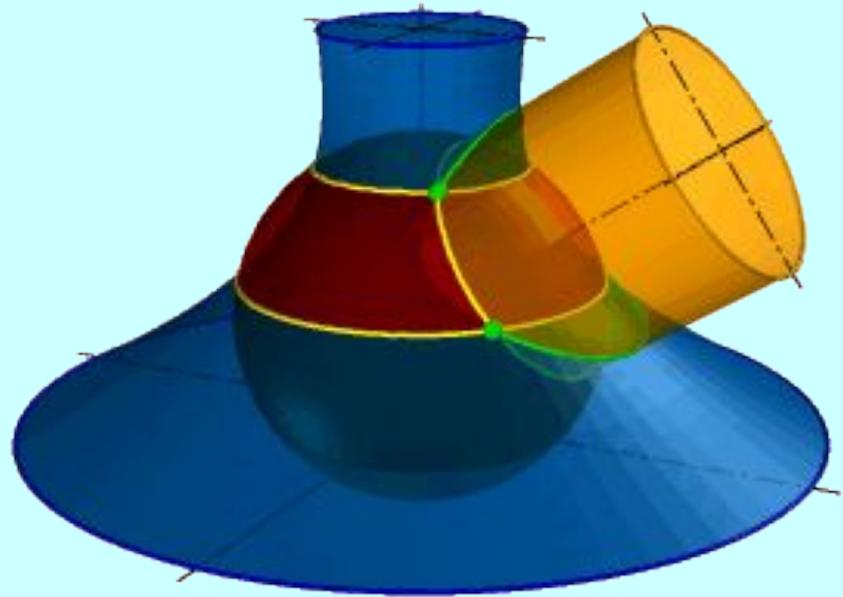
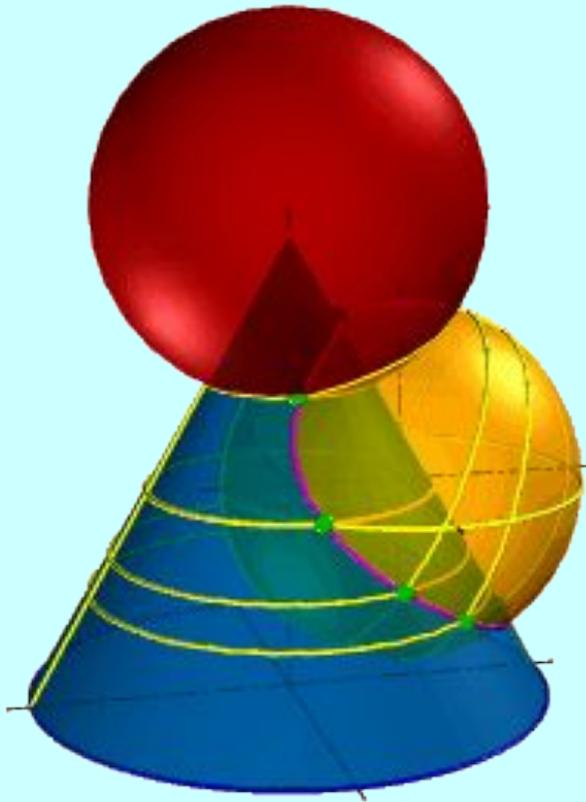
- Ось конуса параллельна плоскости Π_2 , ось тора перпендикулярна плоскости Π_2 , окружность центров осевых круговых сечений тора и ось конуса лежат в одной плоскости, параллельной плоскости Π_2 . Две очевидные характерные точки: высшая с проекцией a_2 и низшая d_2 - являются точками пересечения проекций очерков тора и конуса.
- Для построения проекций промежуточных точек, например проекции b_2 , выполняют следующие построения. Выбирают на поверхности тора окружность, например с проекцией $1_2 2_2$ с центром в точке с проекцией 3_2 . Перпендикуляр к плоскости этой окружности из точки с проекцией 3_2 является линией центров множества сфер, которые пересекают тор по окружности с проекцией $1_2 2_2$.
-

- Из множества этих сфер выбирают сферу с центром на оси конуса. Её проекция O_1 . Эта сфера радиусом R_1 пересекает конус по окружности с проекцией $4_2 5_2$. Пересечение проекций $1_2 2_2$ и $4_2 5_2$ является проекцией пары общих точек тора и конуса, т.е. линии их пересечения. На чертеже обозначена проекция b_2 одной из указанных точек - точки на видимом участке линии пересечения.
- Построение проекций второй пары точек линии пересечения, из которых обозначена проекция c_2 , выполнено с помощью отрезка $6_2 7_2$ - проекции окружности на поверхности тора. Вспомогательная сфера для построения проекции c_2 - сфера радиуса R_2 с центром, проекция которого O_2 . Конус эта сфера пересекает по окружности с проекцией $8_2 9_2$. В пересечении проекций $6_2 7_2$ и $8_2 9_2$ окружностей находим проекцию c_2 искомой точки и симметричной ей на невидимой части пересекающихся поверхностей.

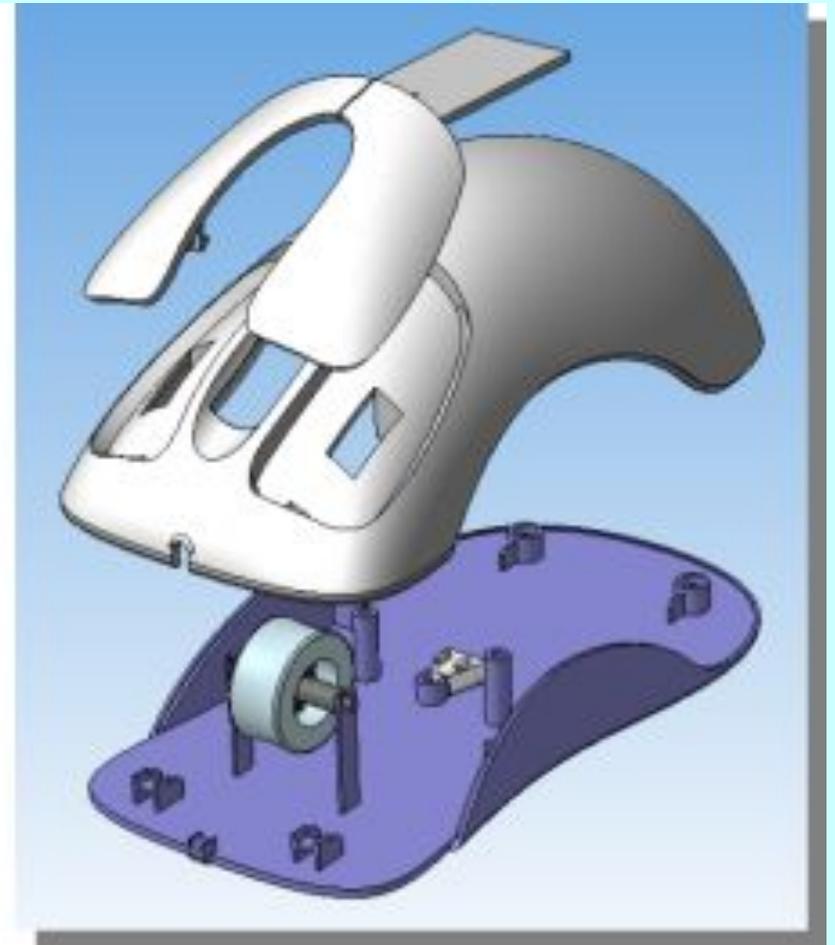
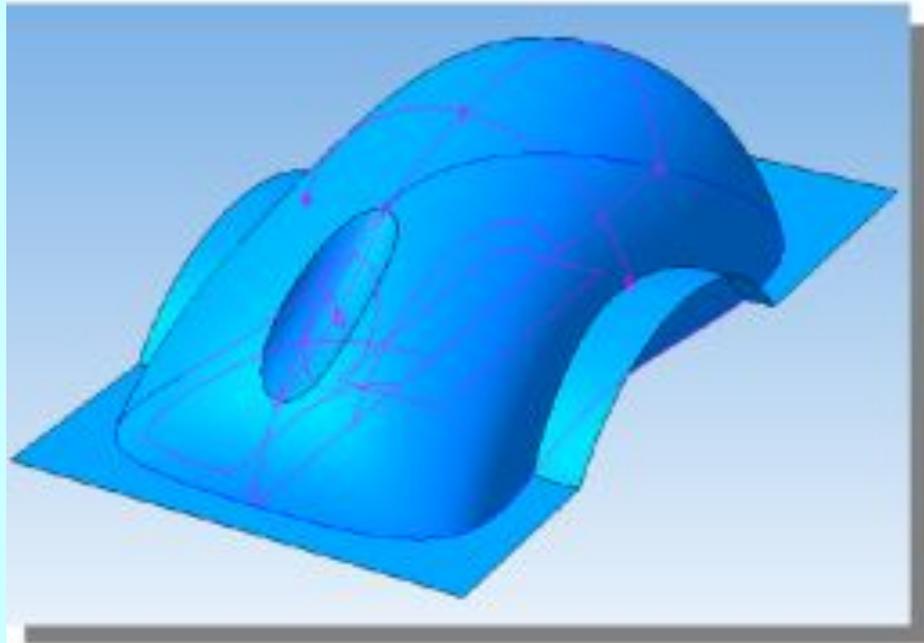
Пример построения линии пересечения прямого кругового конуса и тора



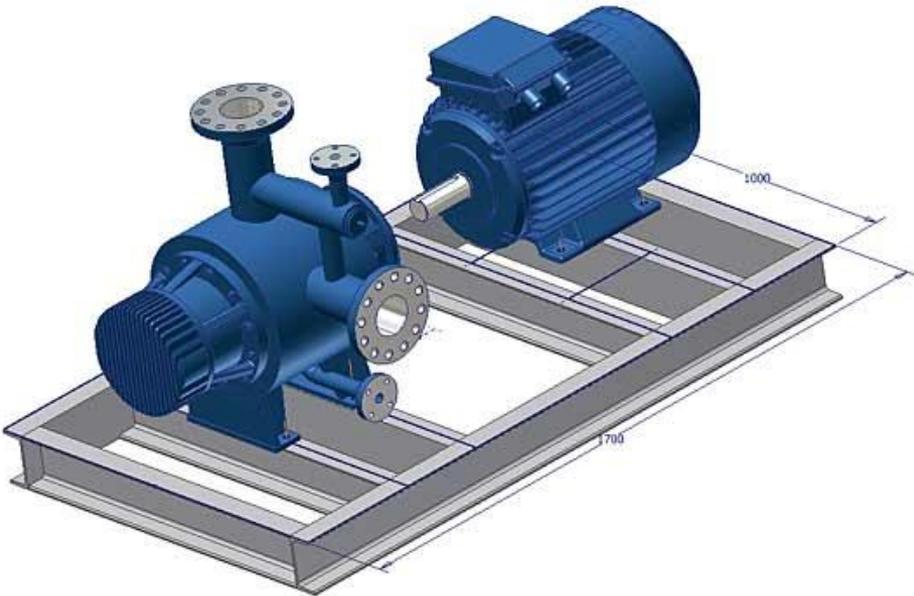
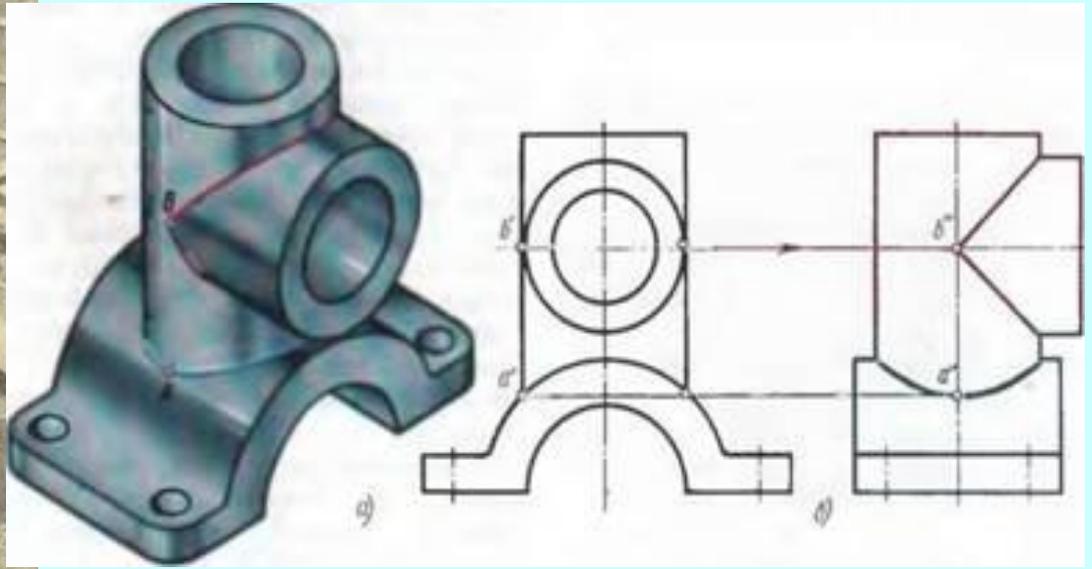
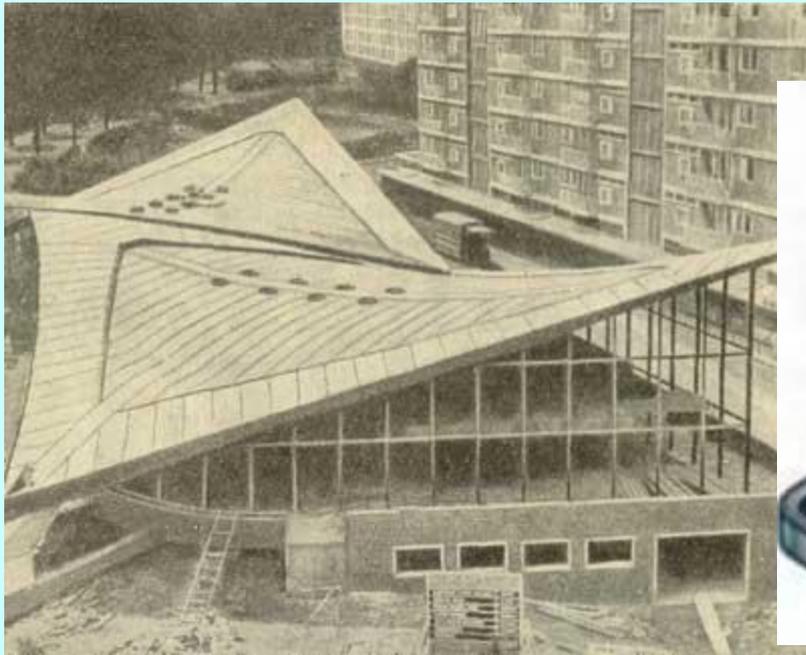
Пример пересечения трех поверхностей













Attack



Life



Defense



Magic



Coins

00101

00147 / 00000



Скоро сессия!!!!!!!

