Цель лекции: дать основные понятия и определения алгоритмов решения задач вычислительной математики.

Работа с матрицами – сердце научных расчетов!

.

Алгоритмы умножения матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

```
MATRIX_MULTIPLY(A, B)
n ← rows[A]
Пусть C — матрица n × n
for i ← 1 to n
        do for j ← 1 to n
                do c_ij ← 0
                    for k ← 1 to n
                        do c_ij ← c_ij + a_ik · b_kj
return C
```

Алгоритмы умножения матриц

Алгоритм Штрассена

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg, \\ s &= af + bh, \\ t &= ce + dg, \\ u &= cf + dh. \end{aligned}$$

Алгоритмы решения СЛАУ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 , \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n .
\end{aligned}
$$

Итерационные

$$\bar{X}_{к+1} = H\bar{X}_{к} + C$$

Метод простой итерации
Метод Зейделя

Алгоритмы решения СЛАУ

Прямые

Метод Гаусса

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

Метод LU-разложения

Предложен Тадеушем Банахевичем в 1938

Алгоритмы решения СЛАУ

Метод LU-разложения

$$L = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Алгоритмы решения СЛАУ

Метод LU-разложения

```
LU_Decomposition(A)
n ← rows[A]
for k ← 1 to n
    do u_kk ← a_kk
       for i ← k + 1 to n
           do l_ik ← a_ik / u_kk     ▷ l_ik содержит v_i
              u_ki ← a_ki            ▷ u_ki содержит w_i^T
       for i ← k + 1 to n
           do for j ← k + 1 to n
                  do a_ij ← a_ij − l_ik u_kj
return L и U
```

Алгоритмы решения СЛАУ

Метод LU-разложения. Пример

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{matrix}$$

а)

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 16 & 9 & 18 \\ 2 & 4 & 9 & 21 \end{matrix}$$

б)

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 17 \end{matrix}$$

в)

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \end{matrix}$$

г)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

Алгоритмы решения СЛАУ

Метод LU-разложения

LUP_SOLVE(L, U, π, b)

$n \leftarrow rows[L]$

for $i \leftarrow 1$ **to** n

  do $y_i \leftarrow b_{\pi[i]} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$

for $i \leftarrow n$ **downto** 1

  do $x_i \leftarrow \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j\right) / u_{ii}$

return x

Вычисление обратной матрицы

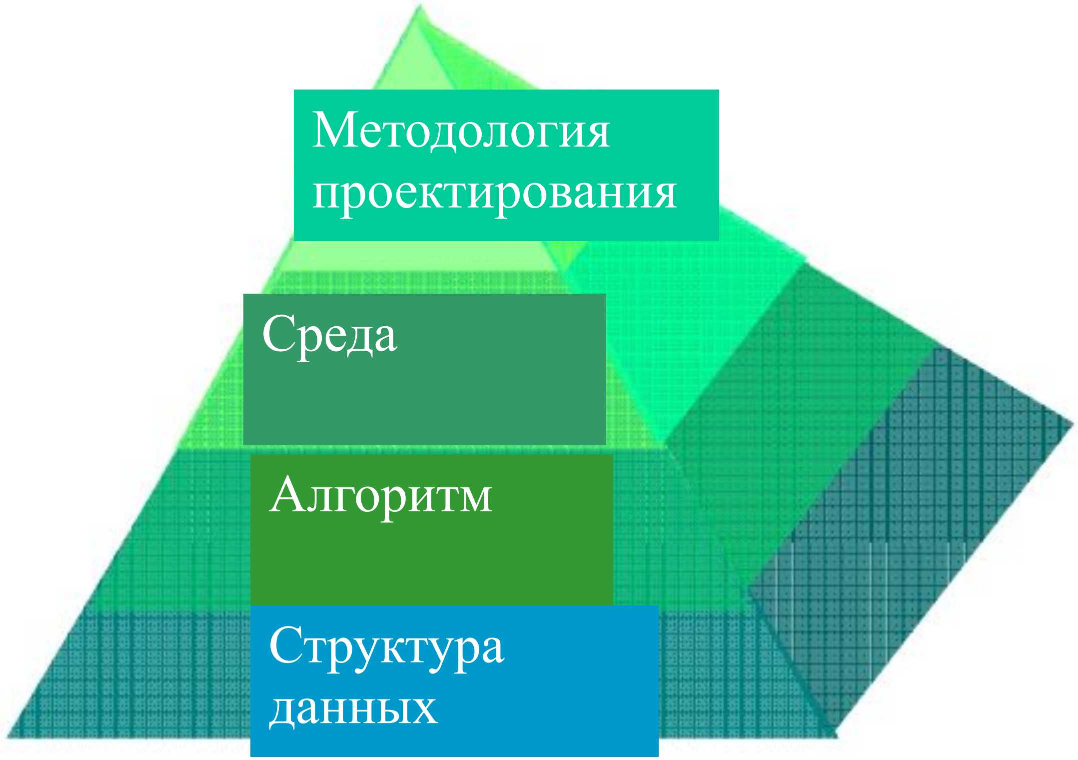
$$AX = I_n$$

$$AX_i = e_i$$

Algowiki

http://algowiki-project.org

Пирамида для решения проблемы



ДЗ
Конспект
Пример LU разложения

Основные выводы:

1. Рассмотрены основные понятия алгоритмов решения задач вычислительной математики;
2. Изучена применение алгоритмов решения задач вычислительной математики при решении задач конструкторско-технологической информатики;