Вычисление натурального логарифма

Начнем с известного представления рядом Тейлора функции натурального логарифма в окрестности 1.

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad , \qquad -1< x\le 1$$

<u>Недостатки этого представления</u>: 1) диапазон чисел узкий; 2) для значений x, близких по модулю к 1, сходимость ряда становиться медленной.

Получим другое представление для натурального логарифма.

$$Ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots$$

Найдем разность этих представлений

$$Ln\frac{1-x}{1+x}=-2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots)$$

Обозначим $\frac{1-x}{1+x}=z$, откуда x=(1-z) / (1+z) .

В результате получим

$$\ln(z) = -2\left(\frac{1-z}{1+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^5 + \cdots\right), \quad при \;\; 0 < z < \infty$$

Диапазон чисел расширили.

Пусть x – положительное число, логарифм которого надо вычислить.

Представим его в виде произведения $x=2^m * q$, где $0.5 \le q < 1$, и далее обозначим $\dfrac{1-q}{1+q} = \xi$ где $0 < \xi \le \dfrac{1-1/2}{1+1/2} = \dfrac{1}{3}$

Теперь логарифм числа x можно представить в виде

$$\ln(x) = \ln(2^m q) = m \ln(2) + \ln(q) = m \ln(2) - 2\left(\xi + \frac{\xi^3}{3} + \cdots + \frac{\xi^{2n-1}}{2n-1}\right) - R_n$$

Остаточный член, по определению, имеет вид *(замена знаменателей во всех слагаемых на 2n+1)*

$$R_n = 2\left(\frac{\xi^{2n+1}}{2n+1} + \frac{\xi^{2n+3}}{2n+3} + \ldots\right) < 2\frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}\left(1 + \xi^2 + \xi^4 + \ldots\right)$$

В правой части неравенства, в круглых скобках - бесконечная геометрическая прогрессия, со знаменателем меньшем 1. Сумма такой прогрессии легко находится, и равна

$$\frac{1}{1-\xi^2}$$

Получаем неравенство для остаточного члена

$$R_n < \frac{2}{1-\xi^2}\frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}$$

Если учесть, что $0 < \xi \leq \frac{1}{3}$

тогда можно записать

$$\frac{2}{1-\xi^2} < \frac{9}{4}$$

Следовательно получаем неравенство: $0 < R_n < \frac{9}{4}\frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}$

Или более грубо:

$$0 < R_n < \frac{1}{4(2n+1)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$$

Сам вычислительный процесс можно организовать следующим образом.

Обозначим $U_k = \dfrac{\xi^{2k-1}}{2k-1}, \; k = 1, 2, \ldots$

тогда можно получить $Ln(x) = mLn(2) - 2(U_1 + U_2 + \ldots + U_n) - R_n$

Считая, что $Ln(2) = 0.69314708$ вычисление логарифма любого положительного числа не представляет труда.

Окончание процесса суммирования производим тогда, когда $U_n < 4\varepsilon_R$ где ε_R остаточная погрешность.

В самом деле, в этом случае имеем

$$R_n < \frac{9}{4}\xi^2 \frac{\xi^{2n-1}}{2n-1} \le \frac{1}{4} U_n < \varepsilon_R$$

Вычисление значений тригонометрических функций

Функция SIN(x)

Используя формулы приведения, значение аргумента x можно привести к интервалу $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

Для значений аргумента $0 < x \le \frac{\pi}{4}$

$$Sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (1)$$

Для значений аргумента $\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}$ можно получить

$$Sin(x) = Cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (2)$$

$$z = \frac{\pi}{2} - x, \ 0 < z \le \frac{\pi}{4}$$

Сумму ряда удобно вычислять путем

$$Sin(x) = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + R_n$$

где слагаемые U_k можно последовательно находить по рекуррентным формулам

$$U_1 = x$$

$$U_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} U_k \quad ,(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Ряд (1) знакочередующийся, с монотонно убывающими по модулю членами. Тогда остаточный член можно записать

$$|R_n| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = |U_{n+1}|$$

$$sign(R_n) = sign(U_{n+1})$$

Поэтому процесс суммирования можно прекратить, как только обнаружится, что $|U_n| \leq \varepsilon_R$, ε_R заданная <u>*остаточная*</u> погрешность.

Вычисление значений тригонометрических функций

<u>***Функция COS(x)***</u>

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Сумму ряда удобно вычислять путем

$$\cos(x) = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + R_n$$

где слагаемые v_n можно последовательно находить по рекуррентным формулам

$$v_1 = 1, \quad v_{k+1} = -\frac{x^2}{(2k-1)2k} v_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Ряд знакочередующийся, с монотонно убывающими по модулю членами. Тогда остаточный член можно записать

$$|R_n| \le \frac{x^{2n}}{(2n)!} = |v_{n+1}|, \quad \operatorname{sgn}(R_n) = \operatorname{sgn}(v_{n+1})$$

Поэтому процесс суммирования можно прекратить, как только обнаружится, что $|v_n| \le \varepsilon_R$, ε_R заданная <u>*остаточная*</u> погрешность.

Итеративные методы вычисления значений функций

Задана функция $y = f(x)$ надо вычислить значение функции в точке $x = \xi$,то есть $y_\xi = f(\xi)$.

Запишем функцию в неявном виде $F(x, y) = 0$.

Предположим, что $F(x, y)$ - непрерывна и имеет непрерывную частную производную $F'_y(x, y)$.

Тогда $F(\xi, y_\xi) = 0$

Итеративные методы вычисления значений функций

$$F(x,y)=0$$

По теореме Лагранжа о непрерывных функциях:

$$F(x,y_0)-F(x,y)=F(x,y_0)-0=(y_0-y)\cdot F'_y(x,\overline{y})$$

где $\overline{y}$ промежуточное значение между y_0 и y.

Тогда $$y=y_0-\frac{F(x,y_0)}{F'_y(x,\overline{y})}$$

Полагая $\overline{y}\approx y_0$, получим:

$$y_1=y_0-\frac{F(x,y_0)}{F'_y(x,y_0)}$$

Повторяя этот алгоритм, получим итеративный процесс:

$$y_{n+1}=y_n-\frac{F(x,y_n)}{F'_y(x,y_n)}$$

Итеративные методы вычисления значений функций. Геометрическая интерпретация

Условия сходимости:

$F'_y(x, y) \qquad F''_y(x, y)$

Сохраняют постоянные знаки

Остановка итеративного процесса:

$$|y_{n-1} - y_n| < \varepsilon$$