

# Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

## Решение уравнений с одной переменной.

$$f(x) = 0$$

Алгебраическое уравнение в канонической форме

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Примеры трансцендентных уравнений:

$$x - 10 \sin(x) = 0; \quad 2^x - 2 \cos(x) = 0; \quad \lg(x + 5) = \cos(x).$$

### Численные методы решения:

- Метод половинного деления
- Метод хорд
- Метод касательных (Ньютона)
- Метод простой итерации
- Метод Рыбакова.

# Приближенное решение уравнений.

## Поиск корней функции

### 1. Отделение корней

**Теорема 1.** Если непрерывная функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков на концах отрезка  $[a, b]$  то есть  $f(a) \cdot f(b) < 0$  то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень на уравнения  $f(x) = 0$

То есть найдется хотя бы одно число  $\xi \in (a, b)$  такое, что  $f(\xi) = 0$

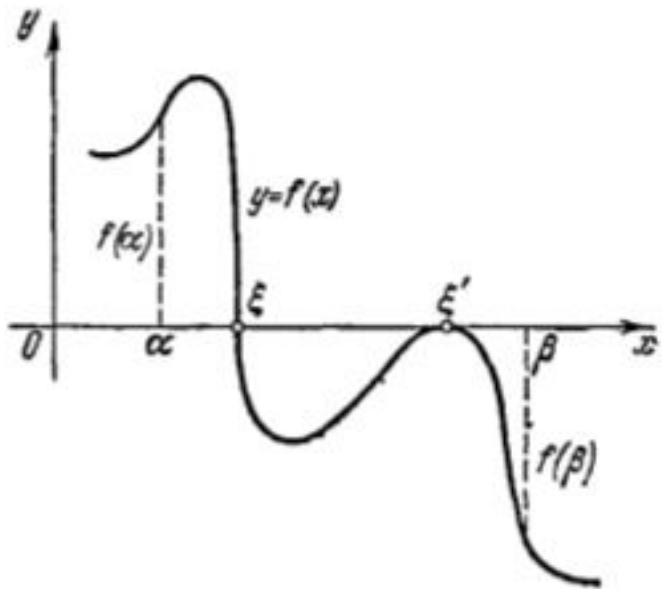


Рис.1

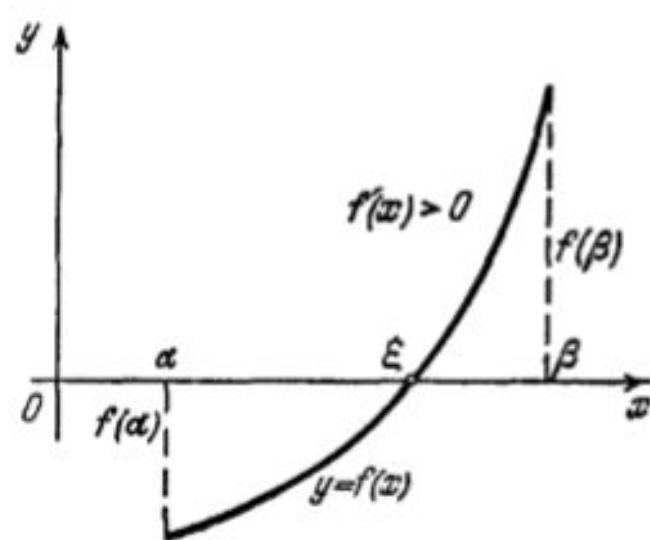


Рис.2

# Приближенное решение уравнений.

## Поиск корней функции

### 2. Получение приближенного значения корня. Оценка погрешности

**Теорема 2.** Пусть  $\xi$  – точный, а  $\bar{x}$  – приближенный корни уравнения  $f(x) = 0$ , находящиеся на одном и том же отрезке  $[a, b]$ , причем  $|f'(x)| \geq m_1 > 0$  при  $a \leq x \leq b$ . Тогда справедлива оценка:

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} \quad (2)$$

// доказательство на доске

**Пример.** Приближенным корнем уравнения  $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0$

является  $\bar{x} = 1,22$ . Оценить абсолютную погрешность этого корня.

# Приближенное решение уравнений.

## Поиск корней функции

Замечание.

$$|f(\bar{x})| =$$

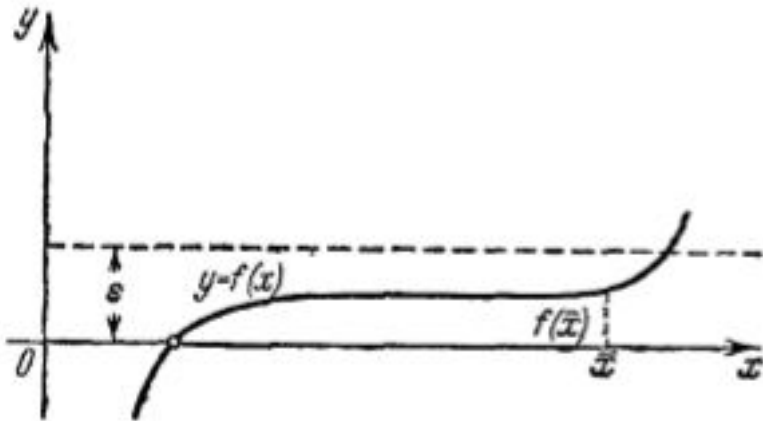


Рис. 11.

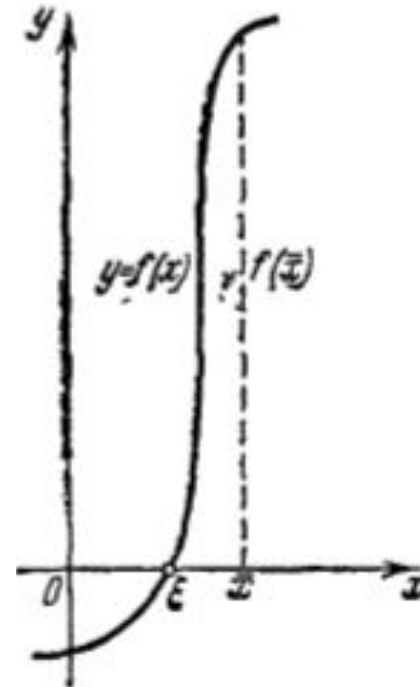


Рис. 12.

# Приближенное решение уравнений.

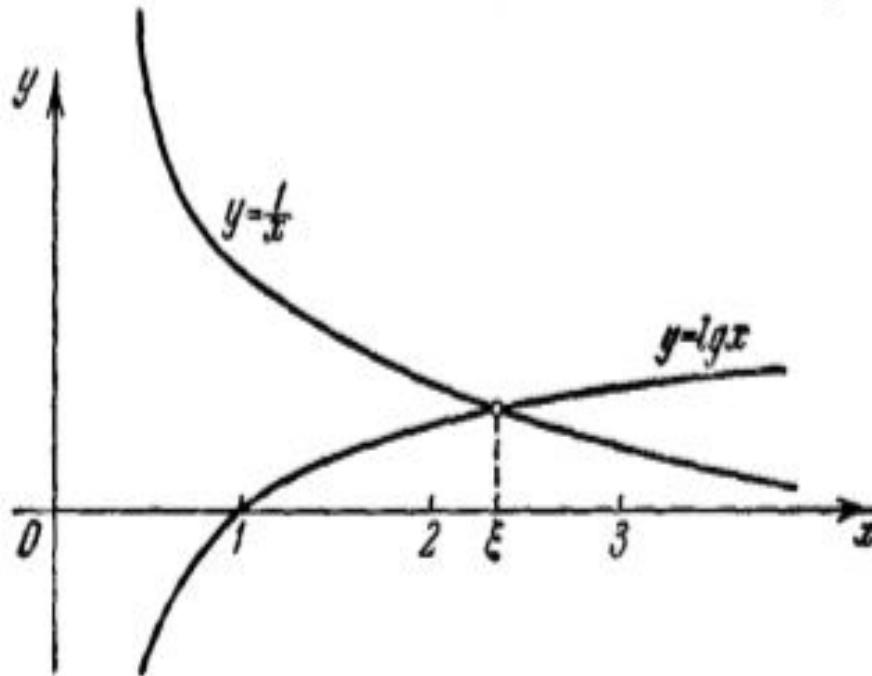
## Графический метод поиска корней

$$f(x) = 0$$

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

Пример. Графически решить уравнение  $x \cdot \lg(x) = 1$ .

Решение. Запишем заданное уравнение в виде  $\lg(x) = \frac{1}{x}$



# Приближенное решение уравнений.

## Метод дихотомии (половинного деления)

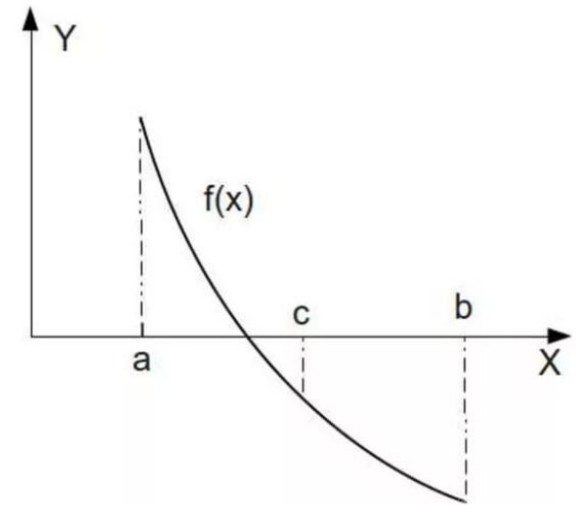
Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и имеет единственный корень на этом интервале.  $f(x) = 0$

Разделим отрезок  $[a, b]$  пополам точкой  $c = \frac{a+b}{2}$ .

Выполняется одно из условий:

$$f(a) \cdot f(c) < 0 \quad \text{или} \quad f(c) \cdot f(b) < 0$$

$[a, c] \qquad \qquad \qquad [c, b]$



Выбираем тот из отрезков, на котором функция меняет знак.

Получаем бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков

Таких, что  $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \dots$

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a)$$

# Приближенное решение уравнений.

## Метод дихотомии (половинного деления)

$a_1, a_2, \dots, a_n \dots$  - монотонно неубывающая ограниченная последовательность.

Следовательно, существует  $\bar{\xi}$  такое, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{\xi}$ .

$b_1, b_2, \dots, b_n \dots$  - монотонно невозрастающая ограниченная последовательность.

Тогда в силу равенства  $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$  существует общий предел

$$\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в неравенстве  $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$[f(\bar{\xi})]^2 \leq 0$$

Отсюда  $f(\bar{\xi}) = 0$ , то есть  $\bar{\xi}$  - корень уравнения  $f(x) = 0$ .

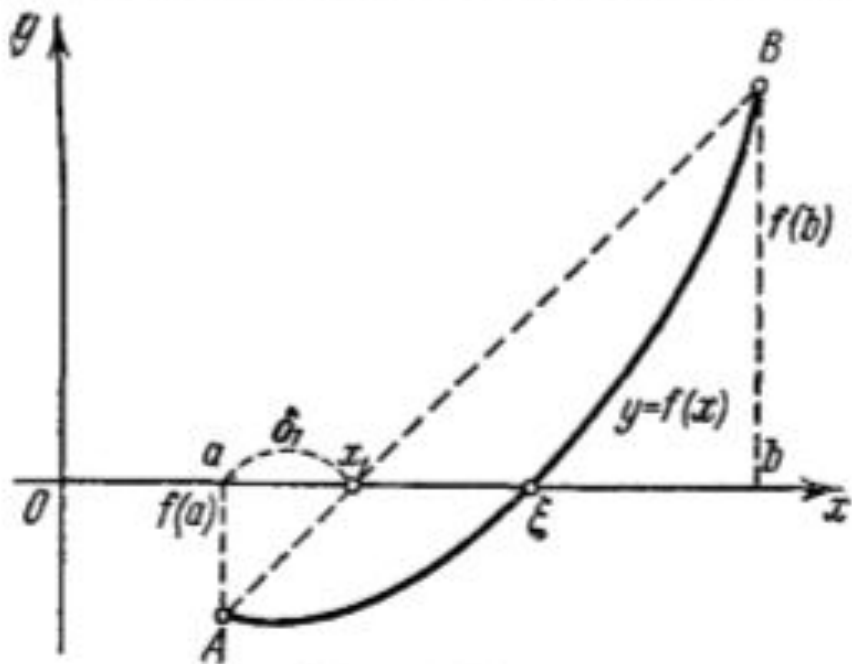
Причём

$$0 \leq \bar{\xi} - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$$

То есть погрешность метода не больше  $\frac{b - a}{2^n}$

# Приближенное решение уравнений.

## Метод хорд (метод пропорциональных частей)



Хорда:  $A[a, f(a)]$

$B[b, f(b)]$

Полагая  $x = x_1$  и  $y = 0$ :

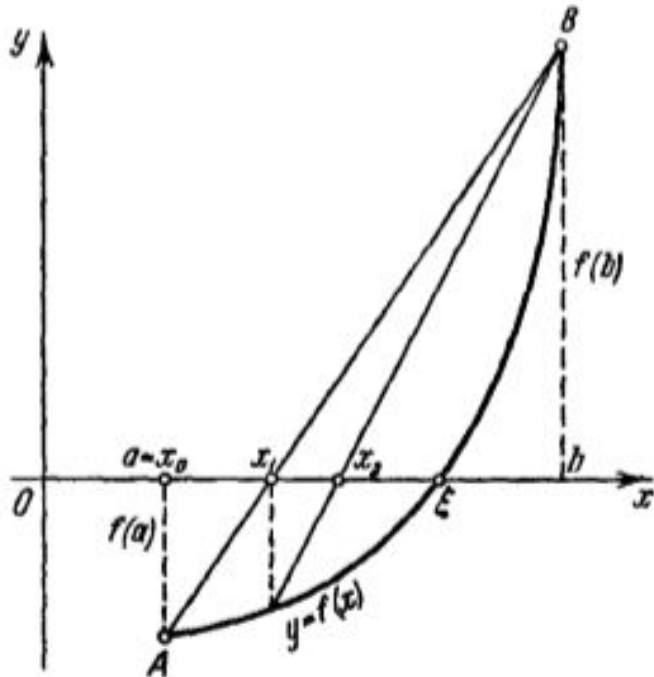
$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$



# Приближенное решение уравнений.

## Метод хорд

(метод пропорциональных частей)



$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1)$$

.....

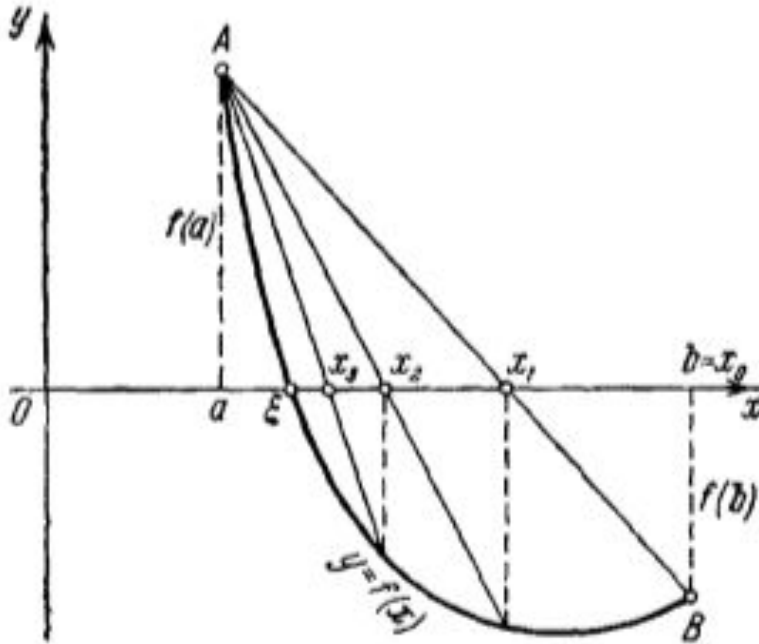
$$x_0 = a$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}(b - x_{n-1})$$

# Приближенное решение уравнений.

## Метод хорд

(метод пропорциональных частей)



$$x_0 = b$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)} (x_{n-1} - a) \quad (3)$$

ограничена и монотонна,  
( $x_n$ )

$$\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (a < \bar{\xi} < b)$$

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f(\bar{\xi}) - f(a)} (\bar{\xi} - a)$$

$$f(\bar{\xi}) = 0$$

# Приближенное решение уравнений.

## Метод хорд Оценка точности

### Вариант оценки 1.

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad \text{где } |f'(x)| \geq m_1 \quad \text{при } a \leq x \leq b$$

### Вариант оценки 2. //вывод на доске

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|$$
$$|f'(x)| \geq m_1$$
$$|f'(x)| \leq M_1$$

### Вариант оценки 3.

Если  $M_1 \leq 2m_1$ , то  $|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$