Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та нефіксованим часом

Підготуваа

Студент III курсу

Групи УК-52

Бурлака В.О.

Керівник: д. ф.-м. н., проф. Капустян В.О.

Постановка задачі:

Модель системи керування має вигляд:

$$\frac{dx_i}{dt} = \int_0^{\tau} f_i(x(t), x(t-\varepsilon), u(t), u(t-\varepsilon), t)d\varepsilon, i = \overline{1,n}, 0 < t \le T,$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), t \in [-\tau, 0], \qquad i = \overline{1,n},$$

$$u_j(t) = \psi_j(t), t \in [-\tau, 0], \qquad j = \overline{1,m}$$

$$x(0) = x^0, x(T) = x^T$$

Функції$f_i(x(t), x(t-\varepsilon), u(t), u(t-\varepsilon), t), i = \overline{1,n}$ – неперервні по всіх аргументах і мають частинні похідні по x;

Функції $\varphi_i(t), \psi_j(t)$ – кусково-неперервні по t, τ – фіксоване додатне число, T – нефіксоване додатне число ($\tau < T$).

Постановка задачі

Керування $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ – кусково-неперервні по t функції, для яких виконуються умови

$$|u_j(t)| \leq l_j, j = \overline{1, m},$$

де l_j – задані додатні числа.

Такі функції утворюють множину допустимих керувань, яку будемо позначати через U. Потрібно знайти вектор допустимих керувань $u_*(t) \in U$, та число T, які б мінімізували критерій якості

$$I(u) = \int_0^T f_0(x(t), u(t), t)dt + F(x(T)),$$

де $f_0(.)$, F(.) - невід'ємні неперервні функції

Дискретизація задачі

Дискретизація – це перетворення функцій неперервних змінних у функції дискретних змінних, за якими початкові неперервні функції можуть бути відновлені із заданою точністю.

Початкова система задачі має вигляд:

$$\dot{x}(t) = \int_0^{\tau} f_i(x(t), x(t-\varepsilon), u(t), u(t-\varepsilon), t)d\varepsilon$$

$$I(u) = \int_0^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + F(x(t)) \to min$$

$$x(0) = x^0$$

$$x(T) = x^T$$

Дискретизація задачі

В завданні маємо інтервали $0 < t \le T, \ t \in [-\tau, 0]$. Для того, щоб звести задачу до дискретного вигляду, ділимо обидва інтервали на підінтервали довжиною Δt. Кількість цих підінтервалів буде відповідно наступною:

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

$$n = \frac{\tau}{\Delta t}$$

Дискретизація задачі

В кінцевому варіанті задача математичного програмування для мого завдання має вигляд:

$$I(u) = \sum_{i=0}^{N-1} f_0(x_i, u_i, i\Delta t)\Delta t + F(x_N) \to min$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 - x_0}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} f\left(x_0, x_{-j}, u_0, u_{-j}, 0\right)\Delta t \\ \vdots \\ \dfrac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} f\left(x_i, x_{i-j}, u_i, u_{i-j}, i\Delta t\right)\Delta t \\ \vdots \\ \dfrac{x_N - x_{N-1}}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{N-1}, x_{N-j-1}, u_{N-1}, u_{N-j-1}, (N-1)\Delta t\right)\Delta t \end{cases}$$

Дискретизація задачі

$$x_{-n} = \varphi_{-n}$$
$$u_{-n} = \psi_{-n}$$
$$\vdots$$
$$x_{-j} = \varphi_{-j}$$
$$u_{-j} = \psi_{-j}$$
$$\vdots$$
$$u_{-1} = \psi_{-1}$$
$$u_{-1} = \psi_{-1}$$
$$x_0 = x^0$$
$$x_N = x^T$$
$$|u_0| \leq l$$
$$\vdots$$
$$|u_i| \leq l$$
$$\vdots$$
$$|u_N| \leq l$$

Економіко-математична модель

$$\dot{Y}(t) = \int_0^{\tau} V(t-\varepsilon)d\varepsilon - D(t)$$

$$I\big(V(t)\big) = \int_0^{T} qY(t)dt - zY(T) \to min$$

$$Y(0) = Y_0 = 0,$$

T − нефіксоване додатне число

$3 \leq \mathrm{T} \leq 7$

Економіко-математична модель

$$V(t) = \varphi(t), \qquad t \in [-\tau, 0]$$

де $q = 4,\ z = 1;\ \tau = 2;\ \varphi(t) = 100\,;$

$$D(t) = 50t$$

$$0 \le V(t) \le 500$$

$V(t)$ - керуюча функція.

Розв’язання задачі

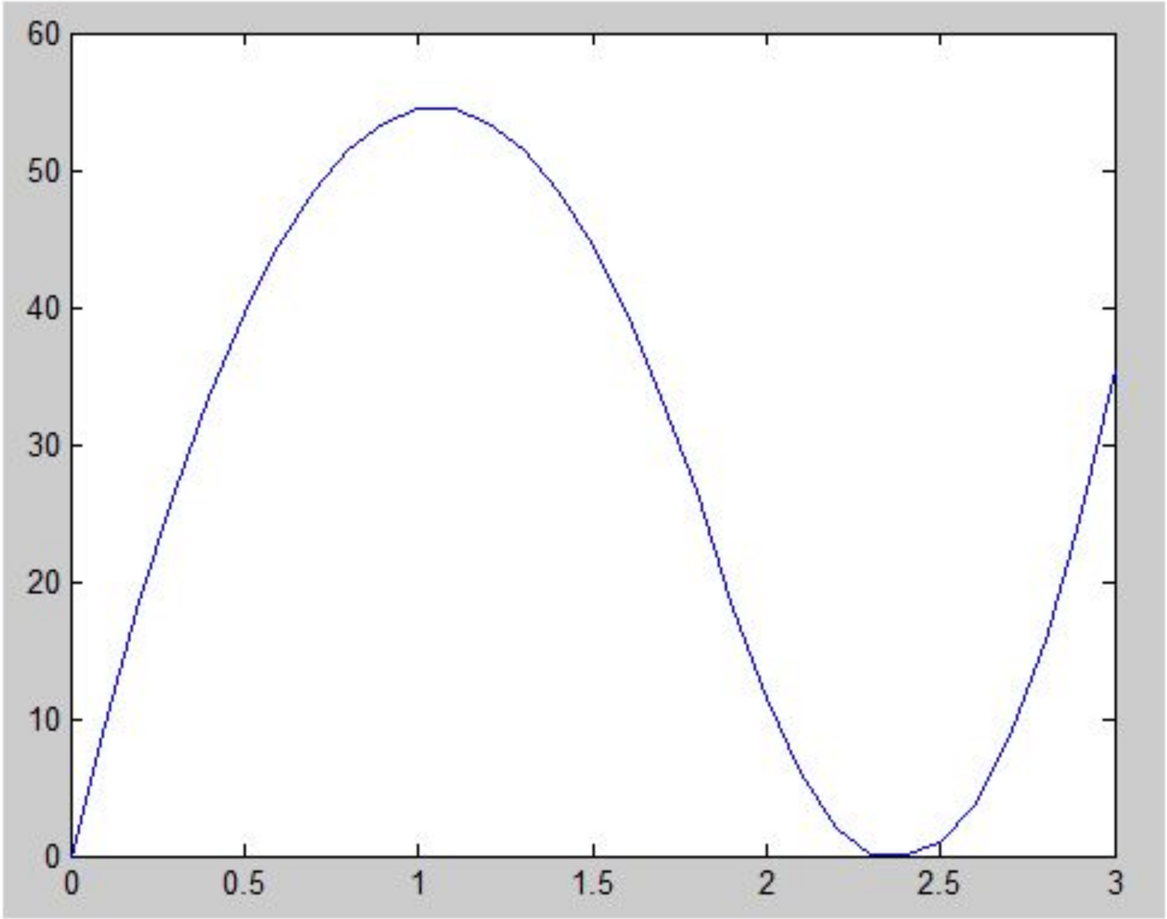
Дискретизуємо вказану модель:

$$I(V) = \sum_{i=0}^{N-1} 4Y_i\Delta t - Y_N \to min$$

$$\begin{cases} \dfrac{Y_1 - Y_0}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} V_{-j}\Delta t - D_0 \\ \vdots \\ \dfrac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} V_{i-j}\Delta t + D_i \\ \vdots \\ \dfrac{Y_N - Y_{N-1}}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} V_{N-j-1}\Delta t + D_{N-1} \end{cases}$$

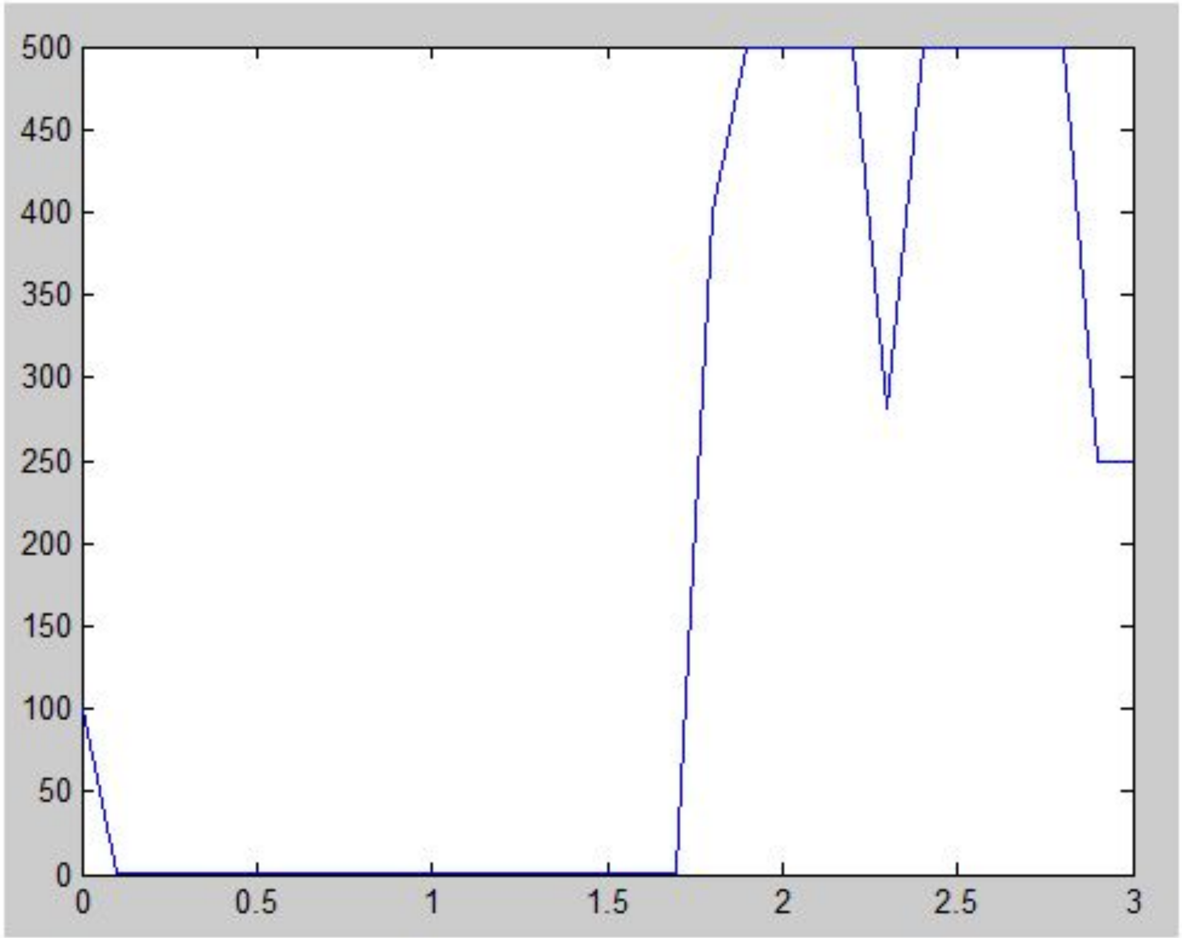
$$V_{-n} = \varphi_{-n}$$
$$\vdots$$
$$V_{-j} = \varphi_{-j}$$
$$\vdots$$
$$V_{-1} = \varphi_{-1}$$
$$Y_0 = 0$$
$$0 \le Y_0$$
$$0 \le Y_i$$
$$0 \le Y_N$$
$$0 \le V_0 \le 500$$
$$\vdots$$
$$0 \le V_i \le 500$$
$$\vdots$$
$$0 \le V_N \le 500$$

Розв'язання задачі



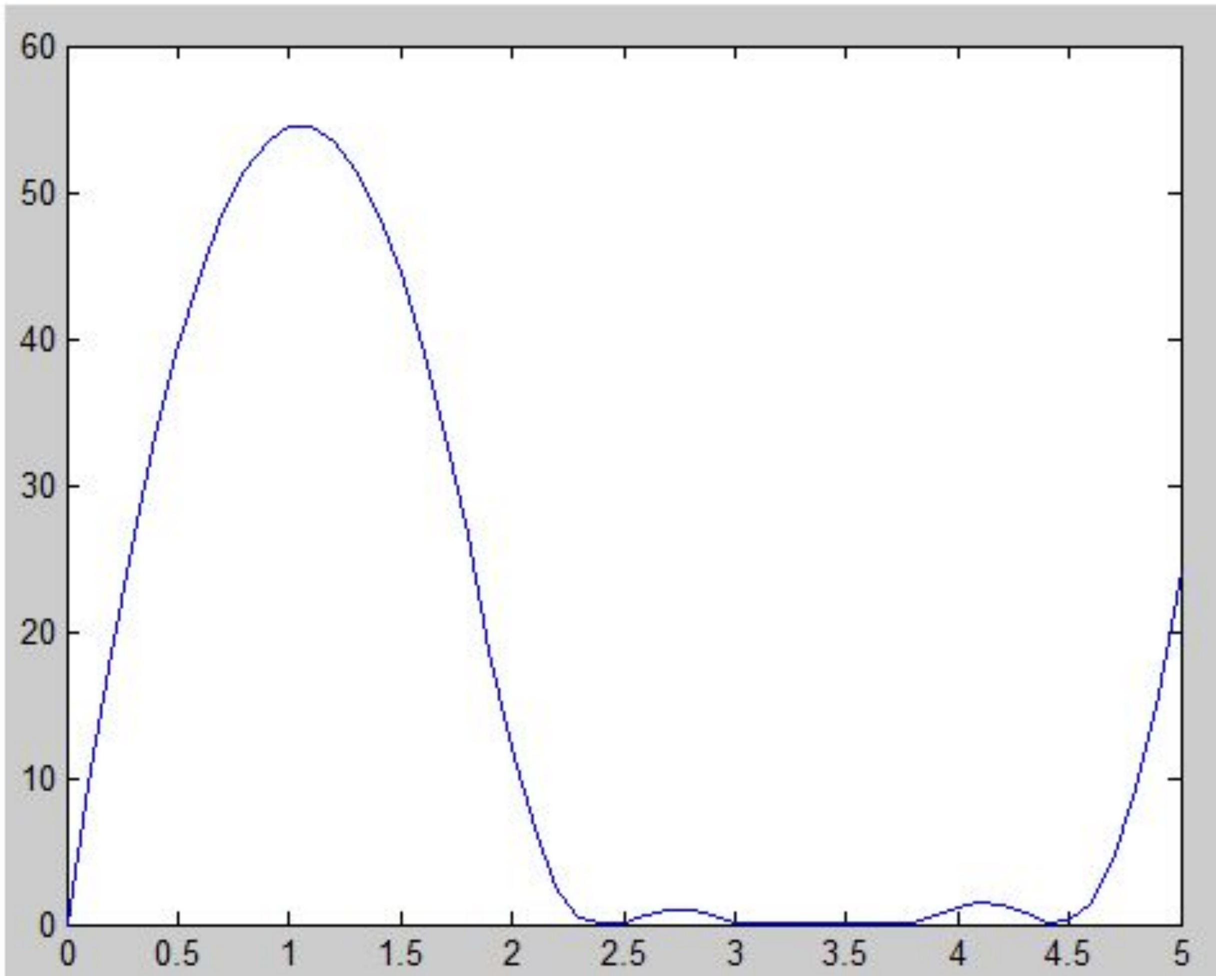
Графік $Y^*(t), V \in [0;\ T^* = 3]$.

Розв'язання задачі



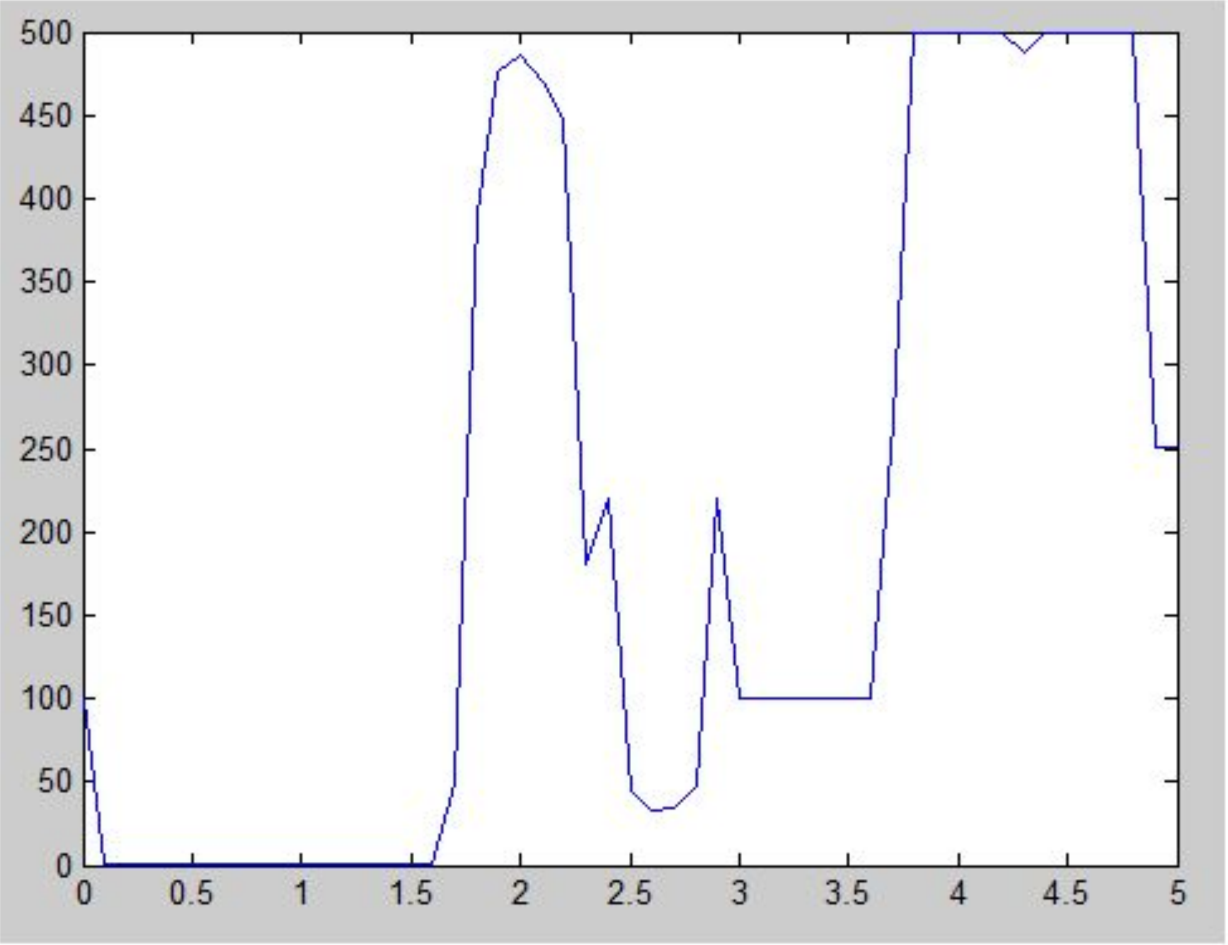
Графік $V^*(t)$, $V \in [0;\ T^* = 3]$.

Розв’язання задачі



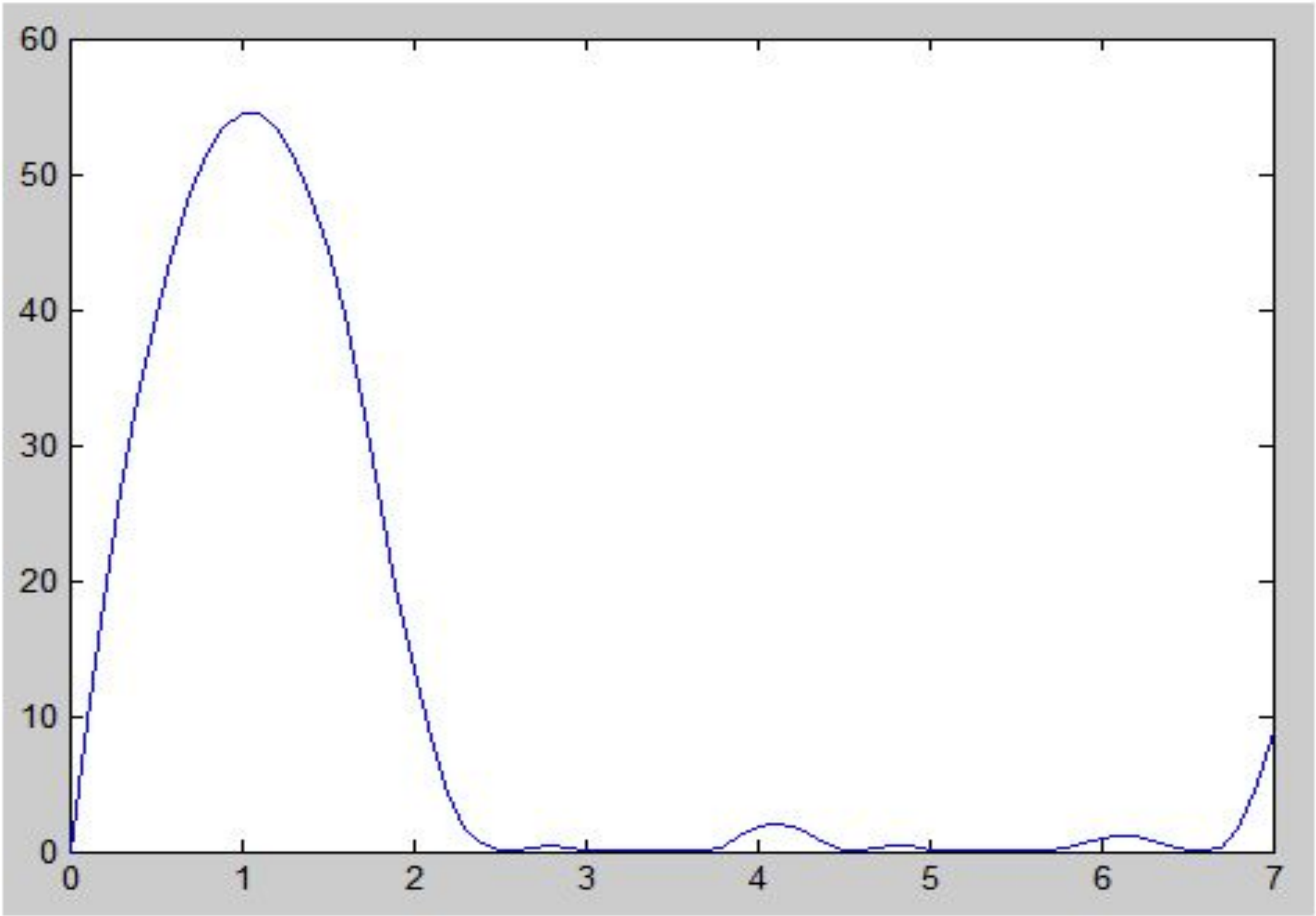
Графік Y*(t) при T=5;

Розв’язання задачі



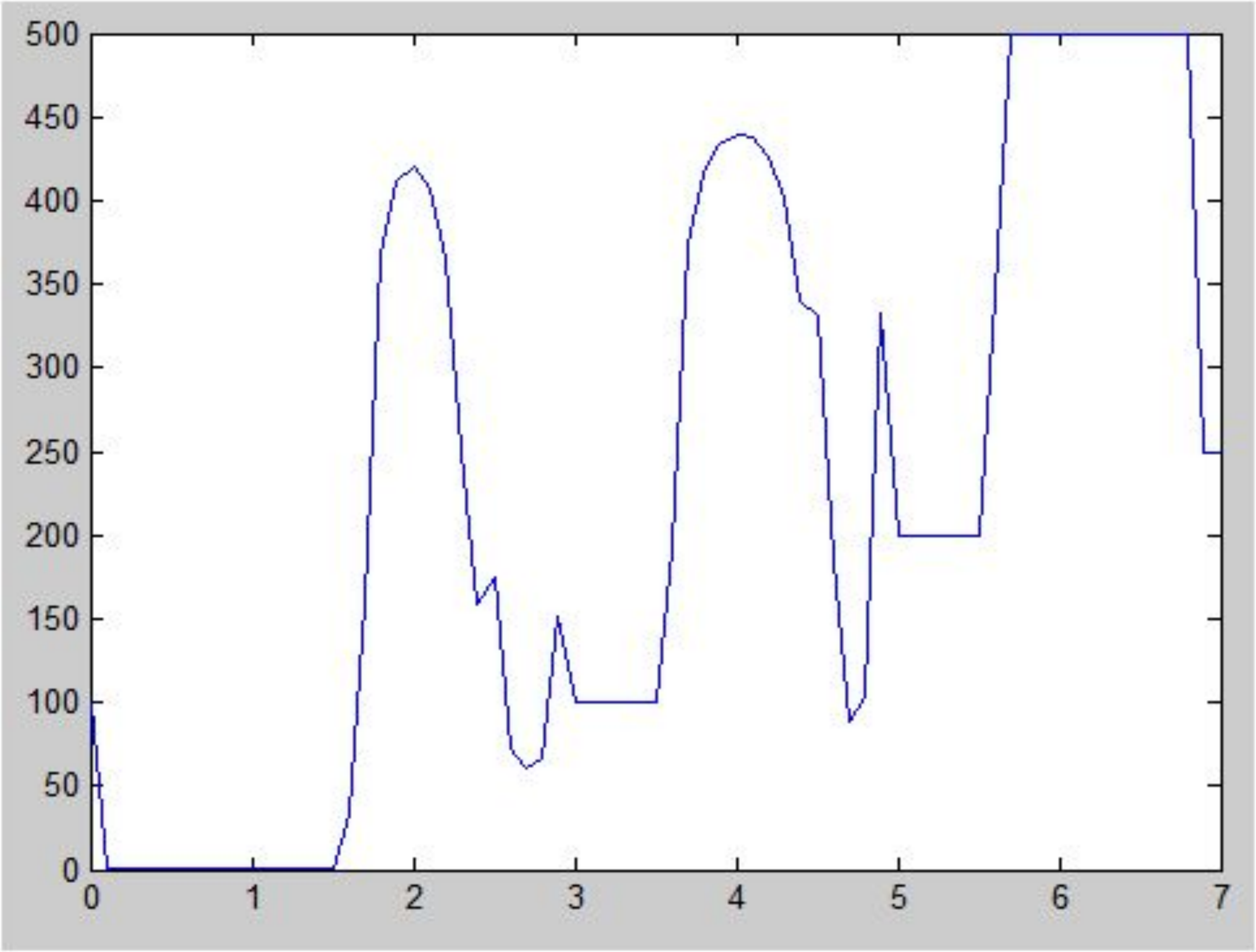
Графік V*(t) при T=5;

Розв’язання задачі



Графік Y*(t) при T=7;

Розв’язання задачі



Графік V*(t) при T=7;

Постановка задачі

1.1. Побудувати календарний план оптимального постачання продукції у дискретному варіанті чисельним методом з наступними вхідними даними:

$$T = 5, x_0 = 2, a_1 = 2, b_1 = 4, a_2 = 4, b_2 = 3.$$

Точність розрахунків оцінюється з умови $|x^*(0) - x_0| \leq \varepsilon$. Значення функції $r(t)$ наведені в наступній таблиці:

t	0	1	2	3	4	5
$r(t)$	1	3	4	6	5	7

Розв'язання задачі

$T := 5 \quad x_{00} := 2 \quad a_1 := 2 \quad b_1 := 4 \quad a_2 := 4 \quad b_2 := 3 \quad \varepsilon := 0.05$

$r_0 := 1 \quad r_1 := 3 \quad r_2 := 4 \quad r_3 := 6 \quad r_4 := 5 \quad r_5 := 7$

$x_5 := 5.19$

$x_5 = 5.19$

$\psi_5 := -2 \cdot (a_1 \cdot (x_5 - r_5)) = 7.2$

$x_4 := x_5 - \dfrac{\psi_5}{2 \cdot a_2} = 4.28$

$u_4 := \dfrac{\psi_5}{2 \cdot a_2} = -4.02$

$\psi_4 := -2 \cdot (a_1 \cdot (x_4 - r_4)) = 2.86$

$x_3 := x_4 - \dfrac{\psi_4}{2 \cdot b_2} = 3.93$

$u_3 := \dfrac{\psi_4}{2 \cdot b_2} = 0.36$

$\psi_3 := -2 \cdot (a_1 \cdot (x_3 - r_3)) = 8.29$

$x_2 := x_3 - \dfrac{\psi_3}{2 \cdot b_2} = 2.89$

$u_2 := \dfrac{\psi_3}{2\ b_2} = 1.04$

$\psi_2 := -2 \cdot (a_1 \cdot (x_2 - r_2)) = 4.44$

$x_1 := x_2 - \dfrac{\psi_2}{2 \cdot b_2} = 2.34$

$u_1 := \dfrac{\psi_2}{2\ b_2} = 0.55$

$\psi_1 := -2 \cdot (a_1 \cdot (x_1 - r_1)) = 2.65$

$x_0 := x_1 - \dfrac{\psi_1}{2 \cdot b_2} = 2$

$|x_0 - x_{00}| \le \varepsilon$

$|x_0 - x_{00}| = 0$

$0.04 > 0.05$

$u_0 := \dfrac{\psi_1}{2\ a_2} = 0.33$

$\psi_0 := -2 \cdot (b_1 \cdot (x_0 - r_0)) = -4.02$

Постановка задачі

1.2. Побудувати оптимальний план постачання продукції (неперервний час) методом Ейлера (або методом Рунге-Кутта) з наступними вхідними даними:

$$T = 3, x_0 = 1, a_1 = 2, b_1 = 5, a_2 = b_2 = 3.$$

Значення функції $r(t)$ наведені в наступній таблиці (n – остання цифра номеру залікової книжки):

t	*0*	*1*	*2*	*3*
$r(t)$	*2.5*	*4*	*3.5*	*3*

Крок чисельного інтегрування $\Delta t = 0{,}01$, оцінка точності $\varepsilon = 0{,}05$, $|x^*(0) - x_0| \leq \varepsilon$.

Розв‘язання задачі

$T := 3 \quad x_{00} := 1 \quad a_1 := 2 \quad b_1 := 5 \quad a_2 := 3 \quad b_2 := 3 \quad \varepsilon := 0.05$

$r_0 := 2.5 \quad r_1 := 4 \quad r_2 := 3.5 \quad r_3 := 3 \qquad t_{delta} := 0.01$

(3) $x_3 := 4.01$

$x_3 = 4.01$

$\psi_3 := -2 \cdot (a_1 \cdot (x_3 - r_3)) = 1$ $\qquad \psi_{(3ttdelta)} := \psi_3 + 2 \cdot t_{delta} \cdot (a_1 \cdot (x_3 - r_3)) = 1$

$x_2 := x_3 - \frac{\psi_3}{2 \cdot b_2} = 4.3$ $\qquad x_{(3ttdelta)} := x_3 + \frac{t_{delta}}{2} \cdot \left(\frac{\psi_3}{a_2}\right) = 4.33$

$u_2 := \frac{\psi_3}{2\ b_2} = 0.173$

$\psi_2 := -2 \cdot (b_1 \cdot (x_2 - r_2)) = -1.72$ $\qquad \psi_{(2ttdelta)} := \psi_2 + 2 \cdot t_{delta} \cdot (b_1 \cdot (x_2 - r_2)) = -1.75$

$x_1 := x_2 - \frac{\psi_2}{2 \cdot a_2} = 6.59$ $\qquad x_{(2ttdelta)} := x_2 + \frac{t_{delta}}{2} \cdot \left(\frac{\psi_2}{a_2}\right) = 7.582$

$u_1 := \frac{\psi_2}{2\ a_2} = 1.556$

$\psi_1 := -2 \cdot (b_1 \cdot (x_1 - r_1)) = -2.64$ $\qquad \psi_{(1ttdelta)} := \psi_1 + 2 \cdot t_{delta} \cdot (b_1 \cdot (x_2 - r_2)) = -2.65$

$x_0 := x_1 - \frac{\psi_1}{2 \cdot a_2} = 1$ $\qquad x_{(1ttdelta)} := x_1 + \frac{t_{delta}}{2} \cdot \left(\frac{\psi_1}{a_2}\right) = 6.04$

$u_0 := \frac{\psi_1}{2\ a_2} = 4.981$

$\psi_0 := -2 \cdot (b_1 \cdot (x_0 - r_0)) = -4.03$ $\qquad \psi_{(0ttdelta)} := \psi_0 + 2 \cdot t_{delta} \cdot (b_1 \cdot (x_0 - r_0)) = -4.05$

$x_{(0ttdelta)} := x_0 + \frac{t_{delta}}{2} \cdot \left(\frac{\psi_0}{a_2}\right) = 1.137$

$|x_0 - x_{00}| \le \varepsilon$

$|x_0 - x_{00}| = 0.03$

$0.03 < 0.05$

Висновок

У ході даної курсової роботи було складено економіко-математичну модель для поставленої задачі, виконано дискретизацію задачі та знайдено оптимальне рішення для моделі.