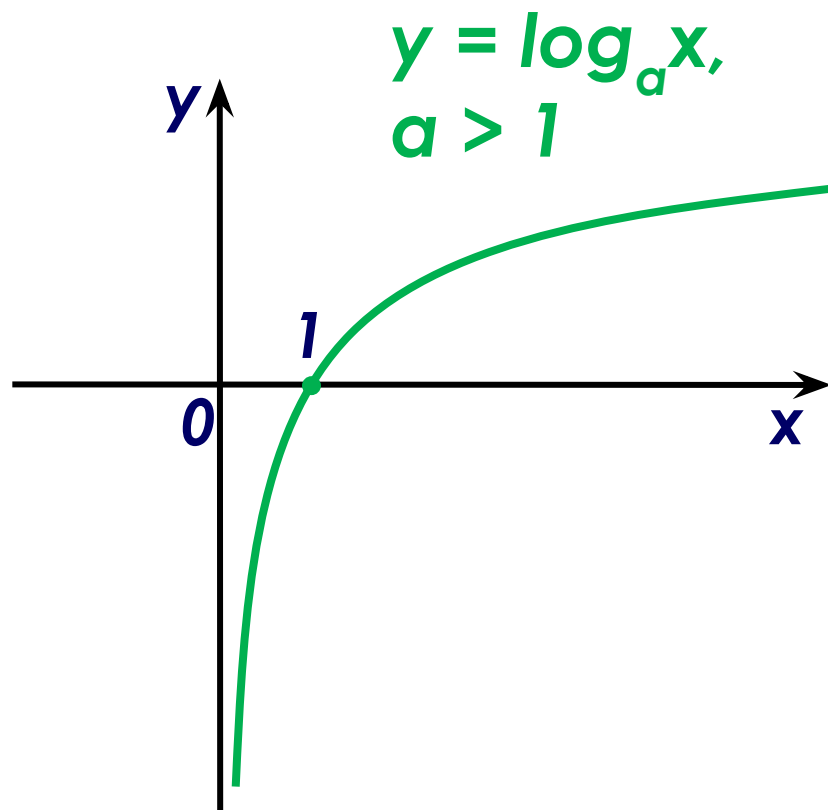
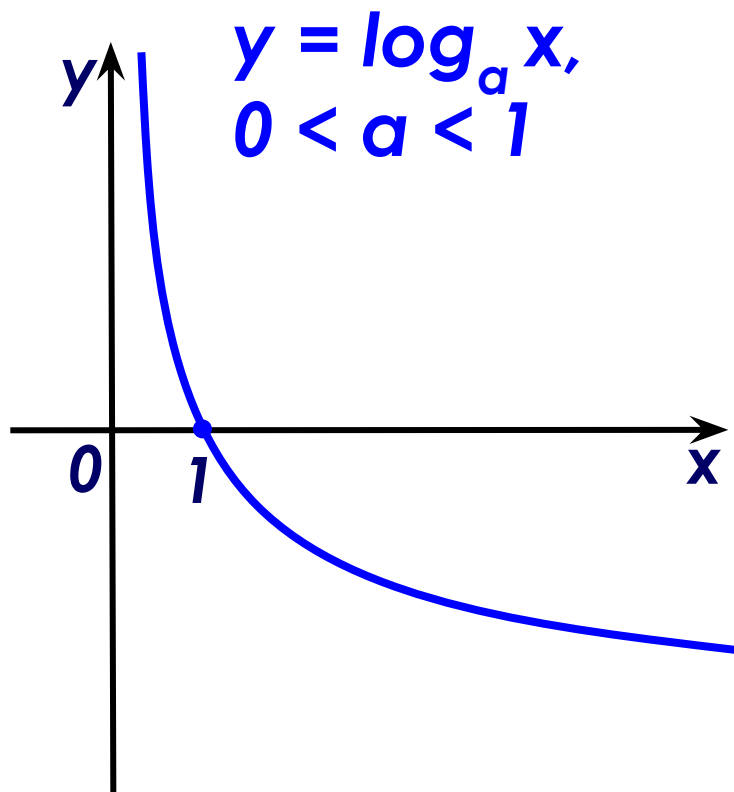




Содержание

- Сведения из истории
- Понятие логарифма
- Свойства логарифмов
- Примеры
- Понятие функции $y = \log_a x$
- Свойства логарифмической функции
- График логарифмической функции
- Свойства сравнения логарифмов

Сведения из истории

Потребность в сложных расчётах в XVI веке быстро росла, и значительная часть трудностей была связана с умножением и делением многозначных чисел, а также извлечением корней. В конце века нескольким математикам, почти одновременно, пришла в голову идея: заменить трудоёмкое умножение на простое сложение, сопоставив с

геометрическую и арифметическую прогрессии, при этом геометрическая будет исходной. Тогда и деление автоматически заменяется на неизмеримо более простое и надёжное вычитание, а извлечение корня степени n сводится к делению логарифма подкоренного выражения на n . Первым эту идею опубликовал в своей книге «*Arithmetica integra*» **Михаэль Штифель**, который, впрочем, не приложил серьёзных усилий для реализации своей идеи.



Сведения из истории



В 1614 году шотландский математик-любитель **Джон Непер** опубликовал на латинском языке сочинение под названием «*Описание удивительной таблицы логарифмов*». В нём было краткое описание логарифмов и их свойств, а также 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом 1'. Термин логарифм, предложенный **Непером**, утвердился в науке. Теорию логарифмов Непер изложил в другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов», изданной посмертно в

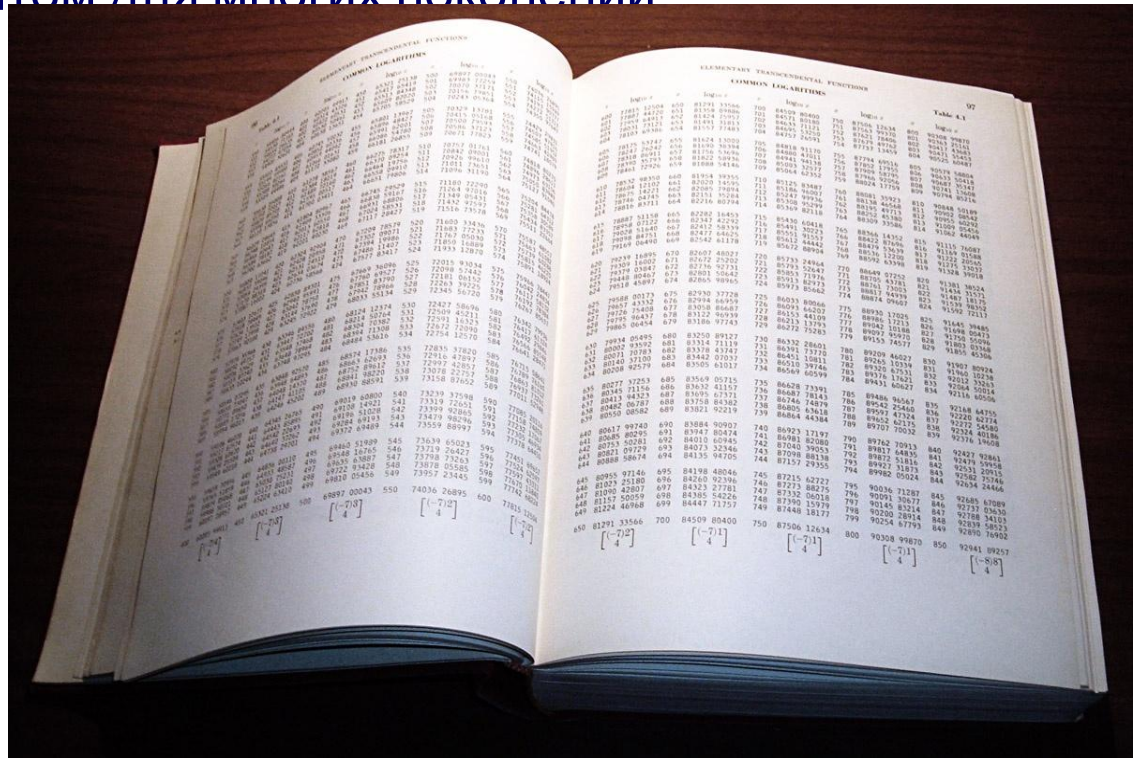
1619 году. Слово **логарифм** происходит от греческого **λόγος** (число) и **αριθμός** (отношение) и переводится, следовательно, как отношение чисел.

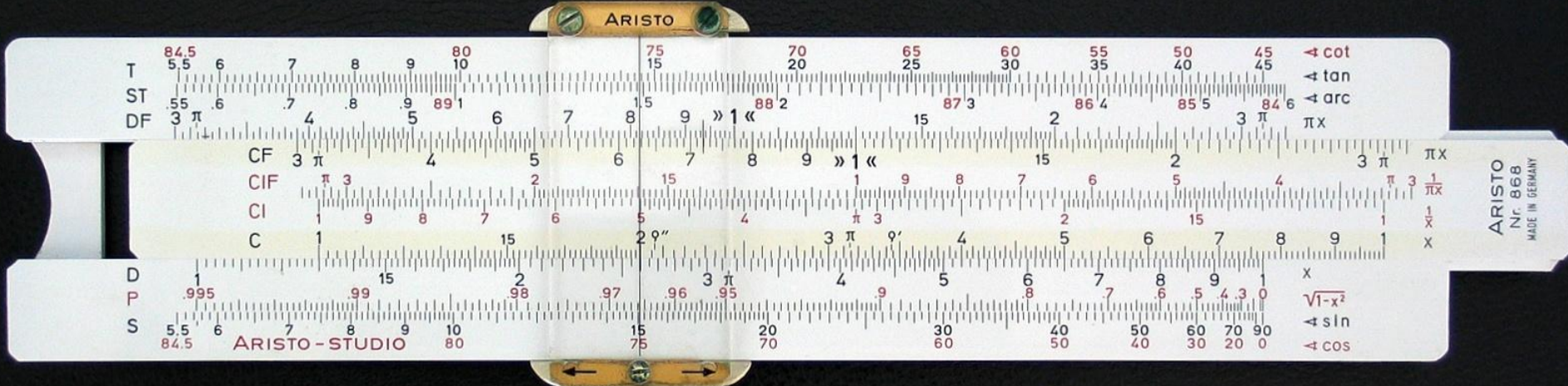
«Логарифм данного синуса есть число, которое арифметически возрастало всегда с той же скоростью, с какой полный синус начал геометрически убывать».

Сведения из истории

Логарифмы необычайно быстро вошли в практику. Изобретатели логарифмов не ограничились разработкой новой теории. Было создано практическое средство – таблицы логарифмов, – резко повысившее производительность труда вычислителей. Добавим, что уже в 1623 г., т. е. всего через 9 лет после издания первых таблиц, английским математиком **Д. Гантером** была изобретена первая логарифмическая линейка, ставшая рабочим инструментом для многих поколений

Первые таблицы логарифмов составлены независимо друг от друга шотландским математиком **Дж. Непером** (1550 - 1617) и швейцарцем **И. Бюрги** (1552 - 1632).





Логарифмическая
линейка

Часы Breitling Navitimer



Круговая логарифмическая
линейка (логарифмический

Понятие логарифма

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b

$$\log_a b = c, a^c = b; a \neq 1, a > 0, b > 0$$

$$a^{\log_a b} = b$$

- основное логарифмическое тождество



Примеры

1. $\log_2 8 = 3, 2^3 = 8;$
2. $\log_3 729 = 6, 3^6 = 729;$
3. $\log_{0,2} 25 = -2, (0,2)^{-2} = 25;$
4. $\log_4 8 = 1,5, 4^{1,5} = 8;$
5. $\log_2 2 = 1, 2^1 = 2;$
6. $\log_{10} 1 = 0, 10^0 = 1;$
7. $\log_{49} 1/7 = -0,5, 49^{-0,5} = 1/7;$
8. $\log_{0,1} 10000 = -4, 0,1^{-4} = 10000.$



Основные свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1;$
4. $\log_{a^k} a = \frac{1}{k};$
5. $\log_a a^m = m;$
6. $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k};$
7. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$
8. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
9. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$
10. $\log_a b^m = m \log_a b;$
11. $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b;$
12. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$
13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$
14. $\log_a b \cdot \log_c d =$
 $= \log_c b \cdot \log_a d$
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$



Понятие логарифмической функции

Функцию вида
 $y = \log_a x$, где $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$
называют
логарифмической функцией



Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$

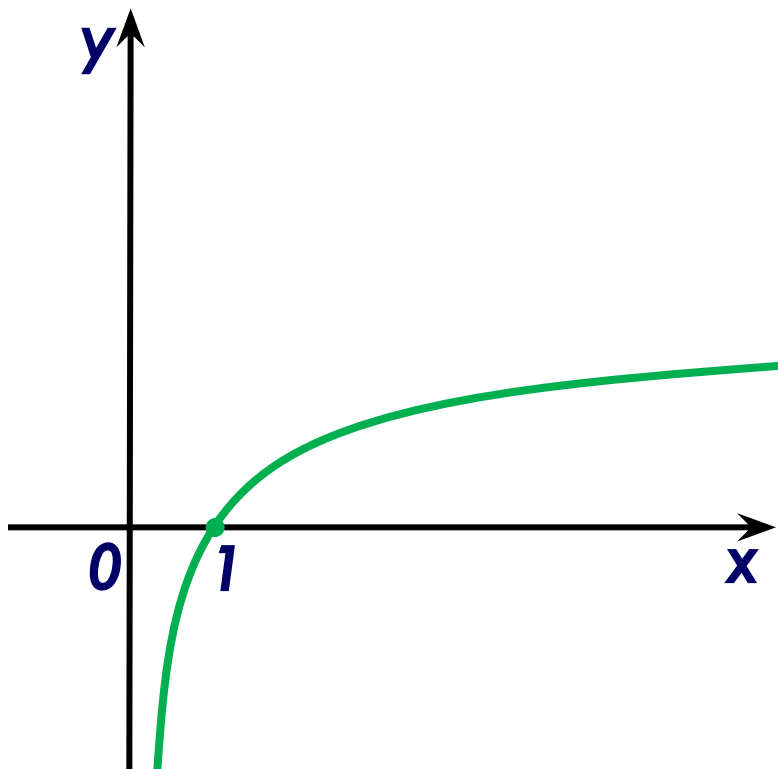
1. $D(y) = (0; +\infty)$,
 $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. а) Нули функции: $y = 0$ при $x = 1$;
б) точек пересечения с осью ординат нет.
3. а) При $a > 1$ функция возрастает на $(0; +\infty)$;
б) при $0 < a < 1$ функция убывает на $(0; +\infty)$.
4. Ни четная функция, ни нечетная.
5. Не ограничена сверху, не ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна.
8. а) При $a > 1$ функция выпукла вверх;
б) при $0 < a < 1$ функция выпукла вниз.
9. Ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции.



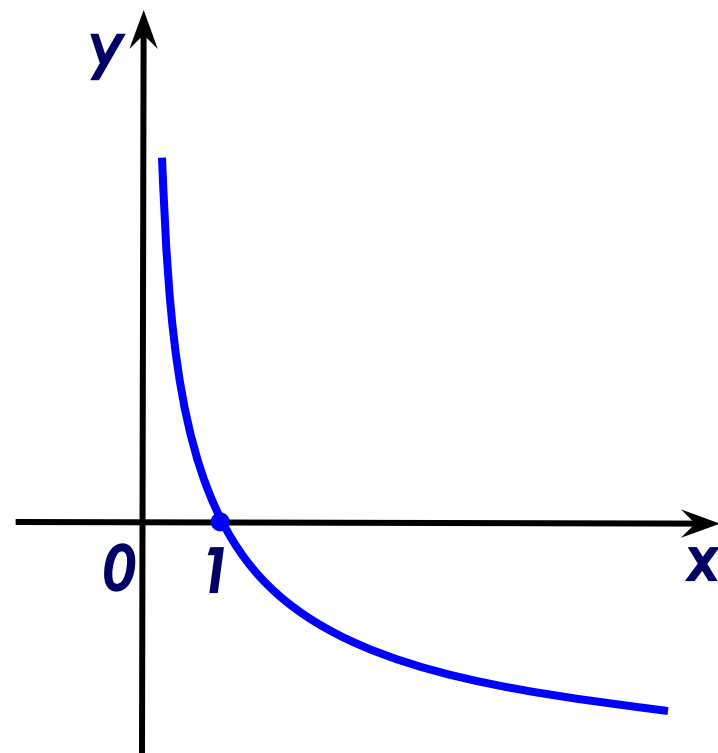
График логарифмической функции

$$y = \log_a x, a \neq 1, a > 0$$

$$y = \log_a x, a > 1$$

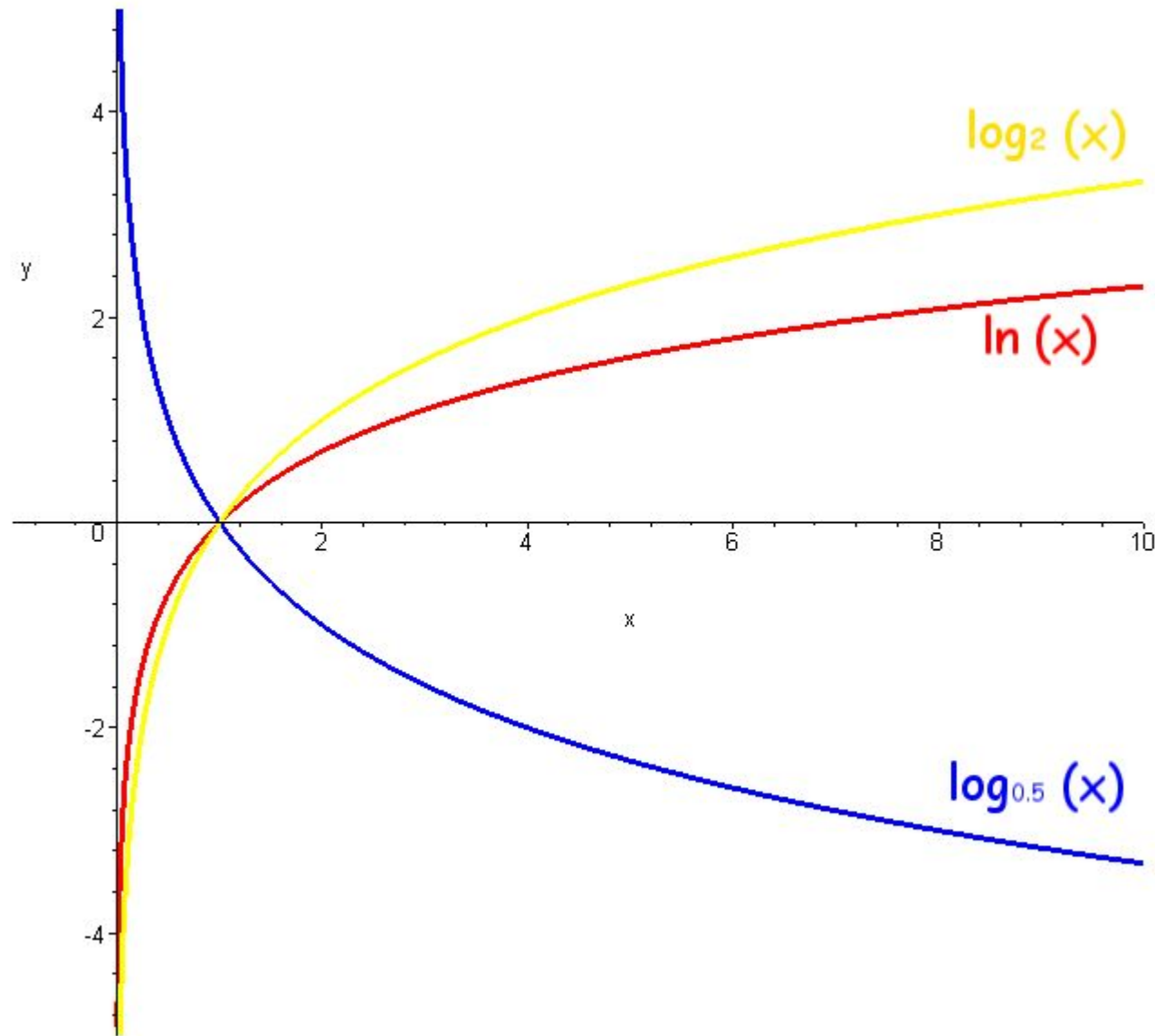


$$y = \log_a x, 0 < a < 1$$



Графики логарифмической функции

$y = \log_a x, a \neq 1, a > 0$



Свойства сравнения логарифмов при $a \neq 1, a > 0$

1. Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$.
2. Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$.
3. Если $1 < a < b$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.
4. Если $0 < a < b < 1$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.
5. Если $1 < a < b$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.
6. Если $0 < a < b < 1$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.
7. $\log_a b > 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0$ и $(a - 1)(b - 1) > 0$ (если положительные числа a и b лежат “по одну сторону от единицы”)
8. $\log_a b < 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0$ и $(a - 1)(b - 1) < 0$ (если положительные числа a и b лежат “по разные стороны от единицы”)



Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **логарифмическими уравнениями**

$$\log_a f(x) = \log_a h(x)$$



$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ x < 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{array} \right. \\ x < 3,5 \end{cases}$$

$$x = -3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x + 4) + \log_2(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$$

$$\log_2(x + 4)(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$$

$$\begin{cases} (x + 4)(2x + 3) = (1 - 2x) \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 13x + 11 = 0 \\ x > -4 \\ x > -1,5 \\ x < 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -5,5 \end{array} \right. \\ -1,5 < x < 0,5 \end{cases}$$

Ответ : -1.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ \begin{cases} x > 1, \\ x < -1; \end{cases} \\ -4 < x < 5, \\ x \neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ x \neq -3 \\ \begin{cases} -4 < x < -1, \\ 1 < x < 5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Ответ: 2.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 4

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg \frac{x}{10}}$$

$$\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1,$$

где $x > 0$, $x \neq 10$

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$$

пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1$, тогда

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t - 1}$$

$$(t - 1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$t^3 = 8$$

$$t = 2$$

Вернемся к исходной переменной

$$\lg x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

Ответ: 100.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\log_{0,1x} x + \log_{0,2x} x = 0$$

$$\text{ОДЗ : } \begin{cases} 0,1x \neq 1, \\ 0,2x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10, \\ x \neq 5, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\log_{0,1x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,1x} = \frac{\lg x}{\lg 0,1 + \lg x} = \frac{\lg x}{-1 + \lg x}$$

$$\log_{0,2x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,2x} = \frac{\lg x}{\lg 0,2 + \lg x} = \frac{\lg x}{\lg \frac{1}{5} + \lg x} = \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x}$$

$$\frac{\lg x}{-1 + \lg x} + \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x} = 0$$

Пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1, t \neq \lg 5$ тогда

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t-\lg 5} = 0$$



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t-\lg 5} = 0 \quad | \times (t-1)(t-\lg 5)$$

$$t(t-\lg 5) + t(t-1) = 0$$

$$t(t-\lg 5 + t - 1) = 0$$

$$t(2t - \lg 5 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\lg 5 + 1}{2} = \frac{\lg 5 + \lg 10}{2} = \frac{\lg 50}{2} = \lg \sqrt{50} \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\lg x = 0 \quad \text{или} \quad \lg x = \lg \sqrt{50}$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = 5\sqrt{2}$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ

Ответ : 1; $5\sqrt{2}$.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 6

$$x^{1-\log_5 x} = 0,04$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$$

$$(1 - \log_5 x) \log_5 x = \log_5 0,04$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

пусть $\log_5 x = t$, тогда

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\begin{cases} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25, \\ x = 0,2. \end{cases}$$

Ответ: 0,2; 25.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 7

$$\log_x (3x^{\lg x} + 4) = 2 \lg x$$

$$\text{ОДЗ : } \begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases}$$

По определению логарифма

$$x^{2 \lg x} = 3x^{\lg x} + 4$$

Пусть $x^{\lg x} = t$, где $t > 0$ тогда

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 - \text{не удовлетворяет} \\ t = 4 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$x^{\lg x} = 4$$

Прологарифмируем обе части по основанию 10 :

$$\lg (x^{\lg x}) = \lg 4$$

$$\lg x \lg x = \lg 4$$

$$\lg^2 x = \lg 4$$

$$\lg x = \pm \sqrt{\lg 4}$$

$$x = 10^{\pm \sqrt{\lg 4}}$$

Ответ : $10^{\pm \sqrt{\lg 4}}$.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 8

Решите систему уравнений :

$$\begin{cases} \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ 2\log_3(x - y) = \log_3(y + 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ \log_3(x - y)^2 = \log_3(y + 2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg((2x - y)10) = \lg((y + 2x)6), \\ (x - y)^2 = y + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x - y)10 = (y + 2x)6, \\ (x - y)^2 = y + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x - 10y = 6y + 12x, \\ (x - y)^2 = y + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ (2y - y)^2 = y + 2; \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ : } \begin{cases} 2x - y > 0, \\ y + 2x > 0 \\ x - y > 0, \\ y + 2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ y^2 - y - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ \begin{cases} y_1 = -1, \\ y_2 = 2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -1, \\ x_1 = -2; \end{cases} \quad \text{— не удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\begin{cases} y_2 = 2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Ответ : (4; 2)



Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **логарифмическими неравенствами**

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$a > 1$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

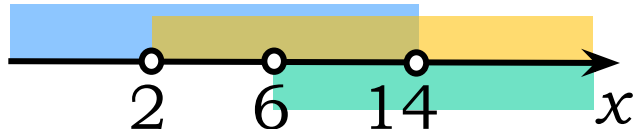
$$\log_3(2x - 4) > \log_3(14 - x)$$

т.к. $a = 3 > 1$, то

$$\begin{cases} 2x - 4 > 14 - x, \\ 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

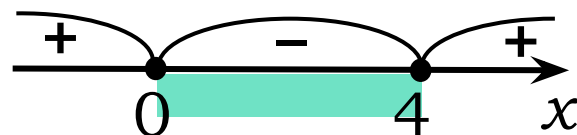
т.к. $a = \frac{1}{2} < 1$, то

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 \geq 16, \\ 16 + 4x - x^2 > 0; \text{— лишнее условие} \end{cases}$$

$$4x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 4x \leq 0$$

$$x(x - 4) \leq 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

$$\lg(x(45 - x)) < \lg 100 + \lg 2$$

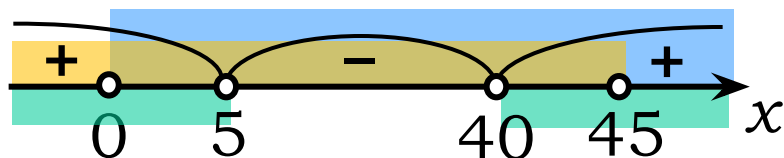
$$\lg(45x - x^2) < \lg 200$$

т.к. $a = 10 > 1$, то

$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases} \quad \text{н.ф.: } x^2 - 45x + 200 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 40; \end{cases} \quad t \leq 1$$



Ответ: $(0; 5) \cup (40; 45)$.

Пример 4

$$\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \leq 0 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$(2\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 1 \leq 0$$

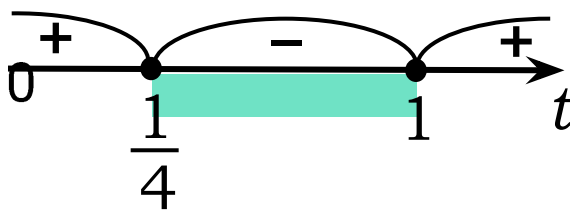
$$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \leq 0$$

пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$4t^2 - 5t + 1 \leq 0$$

$$\text{н.ф.: } 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{4}, \\ t_2 = 1; \end{cases}$$



Вернемся к исходной переменной

$$\frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq 1, \quad \text{т.к. } a = 2, \text{ то}$$

$$\sqrt[4]{2} \leq x \leq 2$$

Ответ : $[\sqrt[4]{2}; 2]$.

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 5

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$$

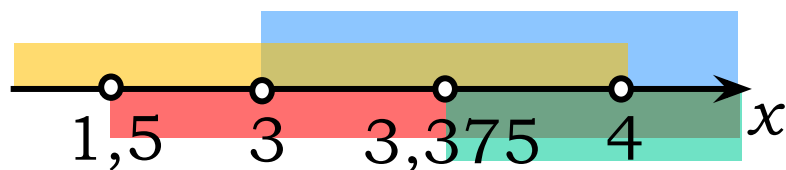
Возможны два случая :

$$1) \begin{cases} x-2 > 1, \\ 2x-3 > 24-6x, \\ 2x-3 > 0, \\ 24-6x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, & \text{blue square} \\ x > \frac{27}{8}, & \text{teal square} \\ x > 1,5, & \text{red square} \\ x < 4; & \text{yellow square} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ 2x-3 < 24-6x, \\ 2x-3 > 0, \\ 24-6x > 0; \end{cases}$$

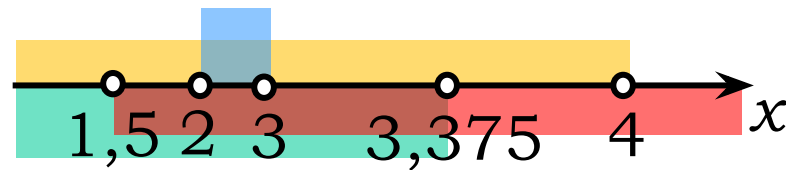
$$\begin{cases} 2 < x < 3, & \text{blue square} \\ x < \frac{27}{8}, & \text{teal square} \\ x > 1,5, & \text{red square} \\ x < 4; & \text{yellow square} \end{cases}$$



$$x \in (3,375;$$

4)

$$\text{Ответ: } (2; 3) \cup (3,375; 4)$$

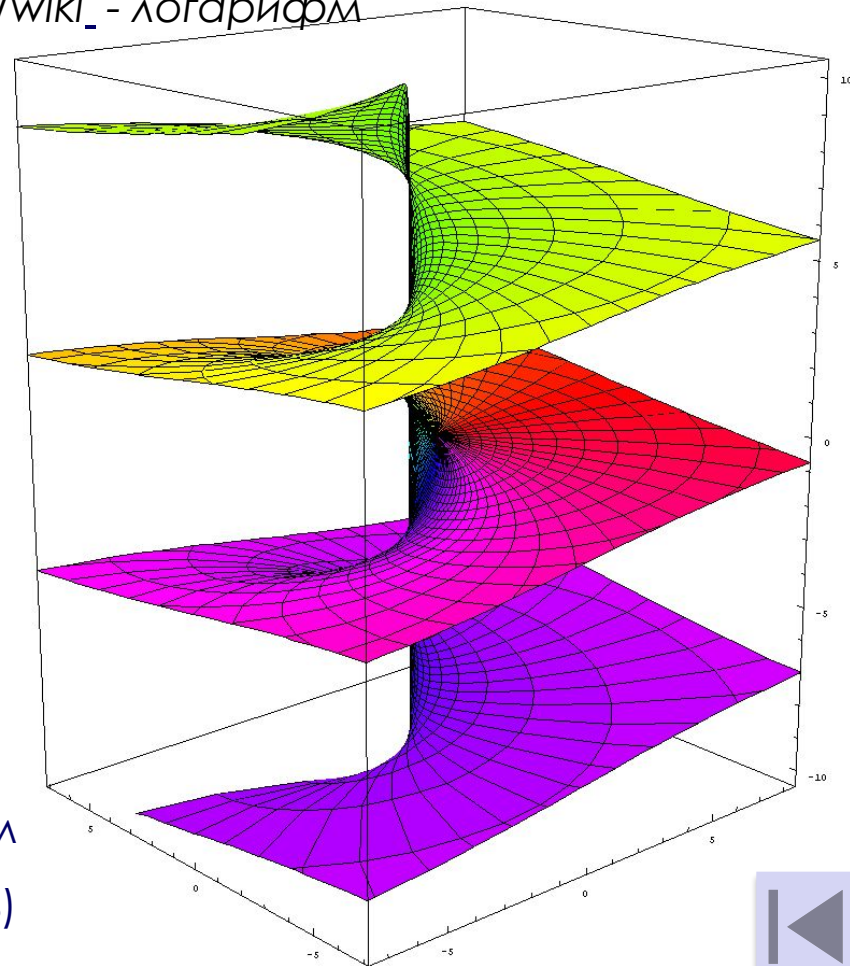


$$x \in (2;$$

3)

Используемые материалы

1. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008
2. <http://ru.wikipedia.org/wiki>http://ru.wikipedia.org/wiki_ - логарифмические линейки
3. <http://ru.wikipedia.org/wiki>http://ru.wikipedia.org/wiki_ - логарифм



Комплексный логарифм
(мнимая часть)

