

Численные решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$y'x - \cos x = 14x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее независимые переменные их функции, и производную этих функций.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$y'''x^2 - 4xy' + 3y = 0$$

- Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функций $y = y(x)$.
- Их можно записать в виде

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

где x — независимая переменная.

- **Решением** дифференциального уравнения (1) называется всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

- **Общее решение** обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка (1) содержит n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n :

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

- **Частное решение** дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

- задача Коши (дополнительные условия задаются в одной точке)
- краевая задача (дополнительные условия задаются в более чем одной точке)

- Пример:
- Задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \cos t, \quad t > 0, \quad x(0) = 1;$$

$$y'' = \frac{y'}{x} + x^2, \quad x > 1, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$$

Краевые задачи

$$y'' + 2y' - y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0;$$

$$y''' = x + yy', \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y'(3) = 2.$$

- Решение задачи Коши.

- **сущность метода конечных разностей.**
состоит в следующем:

- 1. область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек - узлами. Эти узлы составляют **разностную сетку.**

- 2. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке (**сеточной функцией**).
- 3. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции.

- Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его **аппроксимацией на сетке** (или разностной аппроксимацией).
- Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

Методы Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты обладают следующими отличительными свойствами:

- являются одноступенчатыми: чтобы найти значение функции в точке y_{i+1} нужна информация только о предыдущей точке (y_i, x_i) ;
- согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка h^k , где степень k определяет порядок метода;
- не требуют вычисления производных от $f(x, y)$, а требуют вычисления самой функции.

- Наивысший порядок n входящей в уравнение (1) производной называется **порядком** дифференциального уравнения.

Метод Эйлера

(метод Рунге-Кутты первого порядка)

Простейшим из численных методов решения дифференциальных уравнений является **метод Эйлера**. Это один из самых старых и широко известных и применяемых на практике методов.

Метод Эйлера

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0,$$

т.е. необходимо решить задачу Коши.

Метод Эйлера

В окрестности точки x_0 функцию $y(x)$ разложим в ряд Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} y''(x_0) + \dots \quad (1)$$

который можно применить для приближенного определения искомой функции $y(x)$. В точке $x_0 + h$ при малых значениях h можно ограничиться двумя членами ряда, тогда,

$$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + O(h^2), \quad (2)$$

где $O(h^2)$ – бесконечно малая величина порядка h^2 .

Метод Эйлера

Заменяем производную $y'(x_0)$, входящую в формулу (1), на правую часть уравнения (2)

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf(x_0, y_0),$$

Приближенное решение в точке $x_1 = x_0 + h$ можно вновь рассматривать как начальное условие и по формуле найти значение искомой функции в следующей точке $x_2 = x_1 + h$. В результате получен простейший алгоритм решения задачи Коши, который называется **методом Эйлера**.

Метод Эйлера

Метод Эйлера можно представить в виде последовательного применения формул:

для точки

$$x_1 = x_0 + h,$$

$$y_1 = y_0 + hy_0' = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

$$x_2 = x_1 + h,$$

$$y_2 = y_1 + hy_1' = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

.....

$$x_{i+1} = x_i + h,$$

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' = y_i + hf(x_i, y_i).$$

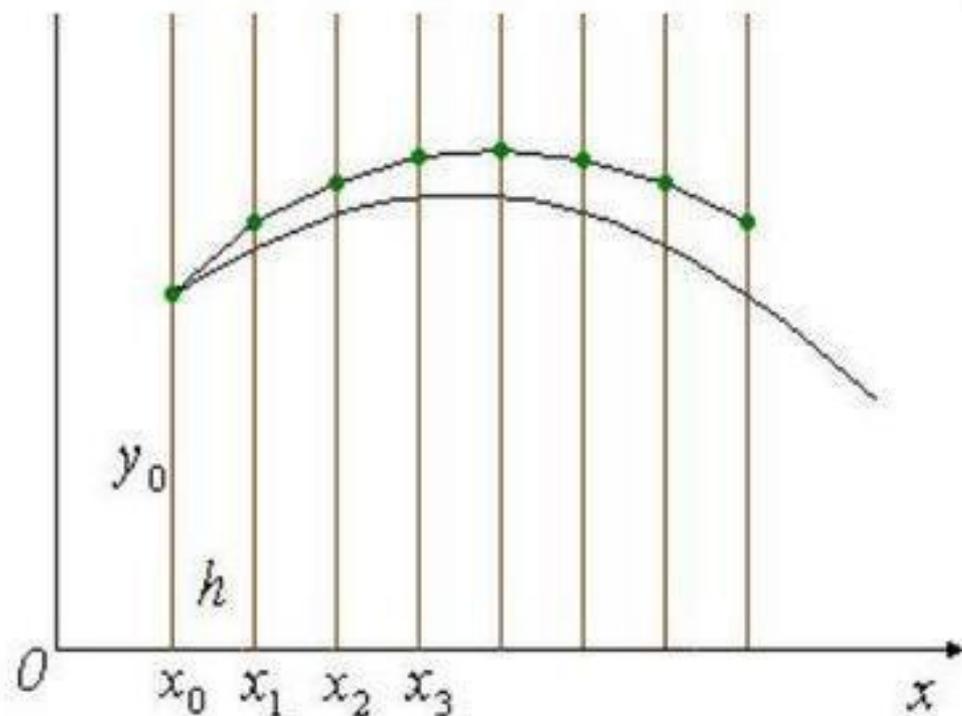
Метод Эйлера

Таким образом, формула Эйлера в общем случае имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad x_{i+1} = x_i + h$$

Метод Эйлера

Геометрически
искомая функция $y(x)$
заменяется ломаной
линией,
представляющей
собой отрезки
касательных к этой
функции в узлах
 x_0, x_1, \dots, x_n .



Многошаговые методы

- **Многошаговые методы** -основаны на том, что для вычисления значения y_{i+1} используются результаты не одного, а k предыдущих шагов, т. е. значения $y_{i-k+1}, y_{i-k+2}, \dots, y_i$.

- Многошаговые методы могут быть построены следующим образом.
- Запишем исходное уравнение

$$Y' = f(x, Y) \quad (1)$$

в виде

$$dY(x) = f(x, Y)dx \quad (2)$$

- Проинтегрируем обе части этого уравнения по x на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$
- Интеграл от левой части легко вычисляется:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dY(x) = Y(x_{i+1}) - Y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i \quad (3)$$

- Для вычисления интеграла от правой части уравнения (2) строится сначала интерполяционный многочлен P_{k-1} степени $k-1$ для аппроксимации функции $f(x, Y)$ на отрезке $[x_l, x_{l+1}]$ по значениям $f(x_{l-k+1}, y_{l-k+1}), f(x_{l-k+2}, y_{l-k+2}), \dots, f(x_l, y_l)$.

- Таким образом,

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, Y) dx \approx \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_{k-1}(x) dx. \quad (4)$$

- Приравнявая выражения, полученные в (3) и (4), можно получить формулу для определения неизвестного значения сеточной функции y_{i+1} в узле x_{i+1} :

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx.$$

- На основе предыдущей формулы можно строить различные многошаговые методы любого порядка точности.
- Порядок точности зависит от степени интерполяционного многочлена $P_{k-i}(x)$, для построения которого используются значения сеточной функции $u_i, u_{i-1}, \dots, u_{i-k+1}$, вычисленные на k предыдущих шагах.

- **Методы Адамса.**

- 1. метод Адамса, имеющий четвертый порядок точности и использующий на каждом шаге результаты предыдущих четырех.

- Пусть найдены значения $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ в четырех последовательных узлах ($k = 4$).
- При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$, где
$$f_i = f(x_i, y_i)$$

- В качестве интерполяционного многочлена $P_3(x)$ можно взять многочлен Ньютона.
- В случае постоянного шага h конечные разности для правой части в узле x_i имеют вид

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1},$$

$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$

$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

- Тогда разностную схему четвертого порядка метода Адамса можно записать после необходимых преобразований в виде

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2} \Delta f_i + \frac{5h^3}{12} \Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8} \Delta^3 f_i.$$

- Сравнивая метод Адамса с методом Рунге-Кутта той же точности, можно отметить его экономичность, поскольку он требует вычисления лишь одного значения правой части на каждом шаге (в методе Рунге-Кутта — четырех).

- **Но** метод Адамса неудобен тем, что невозможно начать счет по одному лишь известному значению y_0 .
- Расчет может быть начат только с узла x_3 , а не x_0 .

- Значения y_1 , y_2 , y_3 нужно получить каким-либо другим способом, что существенно усложняет алгоритм.
- Кроме того, метод Адамса не позволяет (без усложнения формул) изменить шаг h в процессе счета.

- **2. Метод прогноза и коррекции.**
- Суть метода:
- На каждом шаге вводятся два этапа, использующих многошаговые методы:
- с помощью явного метода по известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение $y_{i+1} = y_{i+1}^{(0)}$ в новом узле;
- используя неявный метод, в результате итераций находятся приближения $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(2)}, \dots$

- разностные соотношения для k -ого шага метода Адамса имеют вид:

$$y_k^{пред} = y_{k-1} + \frac{h}{24} (55y'_{k-1} - 59y'_{k-2} + 37y'_{k-3} - 9y'_{k-4}),$$

$$y_k^{кор} = y_{k-1} + \frac{h}{24} (9(y'_{k-1})^{пред} + 19y'_{k-1} - 5y'_{k-2} + y'_{k-3}),$$

$$(y'_k)^{пред} = f(x_k, y_k^{пред}).$$

- Точность вычислений оценивается по формуле:

$$\left| y_k^{\text{кор}} - y(x_k) \right| \approx \frac{1}{4} \left| y_k^{\text{кор}} - y_k^{\text{пред}} \right|.$$

- **Метод Милна.**

- Для предсказания используем первую формулу Милна

$$y_k^{пред} = y_{k-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{k-3} - y'_{k-2} + 2y'_{k-1}),$$

- Уточнение(коррекция) производится по второй формуле Милна

$$y_k^{кор} = y_{k-2} + \frac{h}{3} (y'_{k-2} + 4y'_{k-1} + (y'_k)^{пред}).$$

$$(y'_k)^{пред} = f(x_k, y_k^{пред}).$$

- Для оценки точности вычислений используется формула:

$$\left| y_k^{кор} - y(x_k) \right| \approx \frac{1}{29} \left| y_k^{кор} - y_k^{пред} \right|.$$