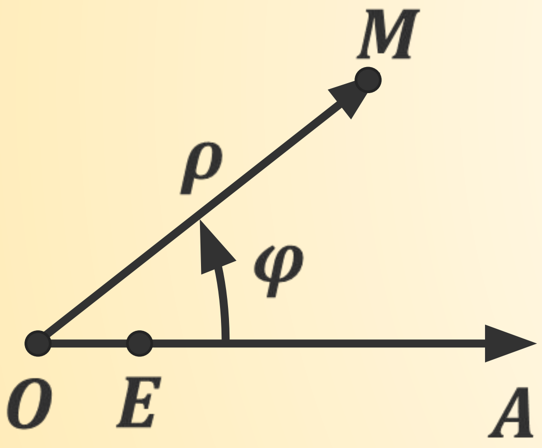
Лекция №10

Полярная система координат

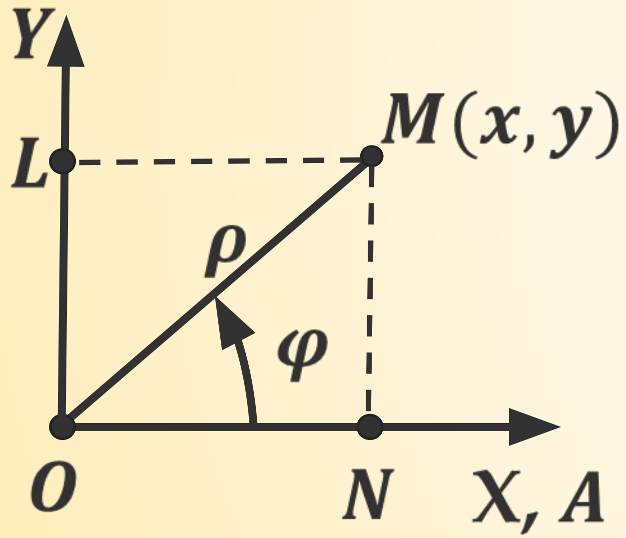
Возьмем на плоскости точку *O* и проходящую через нее ось *OA*. Назовем точку *O* – ***полюсом***, а полуось *OA* – ***полярной осью***.



Задание полюса *O*, полярной оси *OA* и единичного (масштабного) отрезка *OE* определяет на плоскости **полярную систему координат**

- Полярным радиусом $\boldsymbol{\rho}$ любой точки $\boldsymbol{M}$ плоскости называется ее расстояние от полюса $\boldsymbol{O}$, т.е. длина $|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}|$. Полярным углом $\boldsymbol{\varphi}$ точки $\boldsymbol{M}$ называется угол наклона вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ к полярной оси $\boldsymbol{OA}$. Угол $\boldsymbol{\varphi}$ определяется с учетом знака, положительное направление против часовой стрелки ($\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\varphi} < \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$). Угол $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ называются полярными координатами точки $\boldsymbol{M}$ (обозначаем $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$).

Рассмотрим на плоскости прямоугольную декартову систему координат XOY и полярную систему координат, у которой полюс совпадает с началом координат O, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси OX.



Пусть M произвольная точка с координатами $M(x, y)$ в декартовой системе координат.

Тогда $\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\rho}$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \quad (1)$$

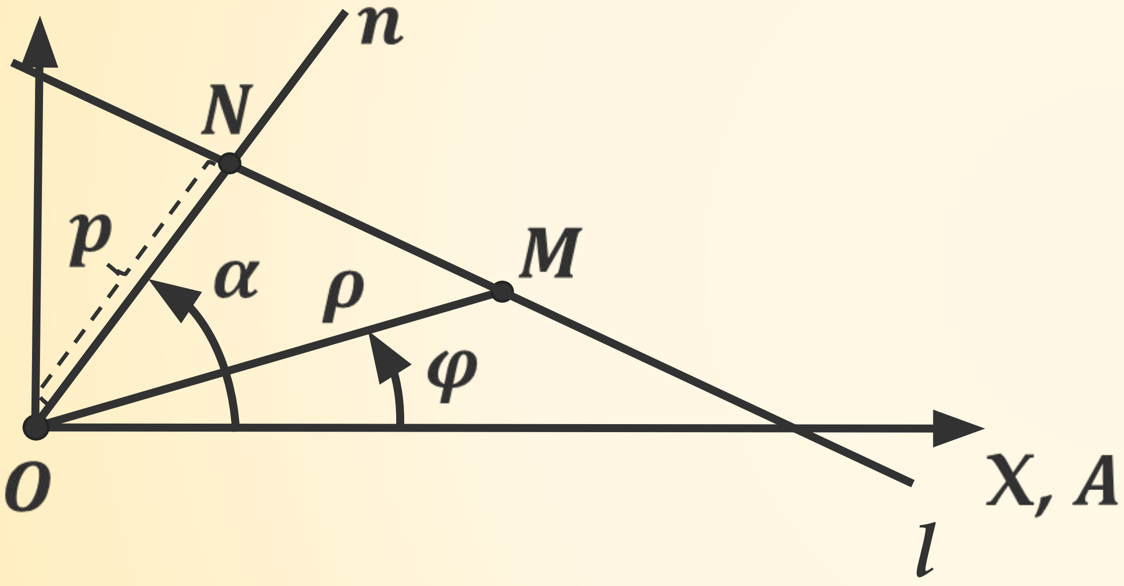
- Формулы (1) выражают декартовые координаты точки M, через полярные координаты.

С другой стороны.

$$\boldsymbol{\rho} = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Нормальное уравнение прямой

Выведем уравнение произвольной прямой l в полярных координатах.



$\mathbf{M(\rho,\varphi)}$ – произвольная точка прямой l

$$pr_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{ON}\right| = p$$

$$p = \rho\cos(\alpha - \varphi) = \rho\cos(\varphi - \alpha) \quad (2)$$

или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \ (3)$$

Уравнение (3) называется <u>**нормальным уравнением**</u> прямой в декартовой системе координат.

Переход от общего уравнения прямой к нормальному

- $$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

Необходимо домножить уравнение на множитель:

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}} \qquad (4)$$

Знак в формуле (4) перед корнем должен быть противоположен знаку $\boldsymbol{C}$.

Множитель $\boldsymbol{\lambda}$ называется нормирующим множителем.

<u>Пример.</u> Записать нормальное уравнение прямой:

$$\boldsymbol{3x + 6y + 2 = 0}$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть задано уравнение прямой $\boldsymbol{l}$ в нормальном виде:

$$\boldsymbol{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0}$$

и точка $\mathbf{M_0}\,(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ лежащая вне прямой. Требуется определить расстояние d от точки M до этой прямой

$$\boldsymbol{d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|}$$

Если уравнение прямой задано в общем виде $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, то

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

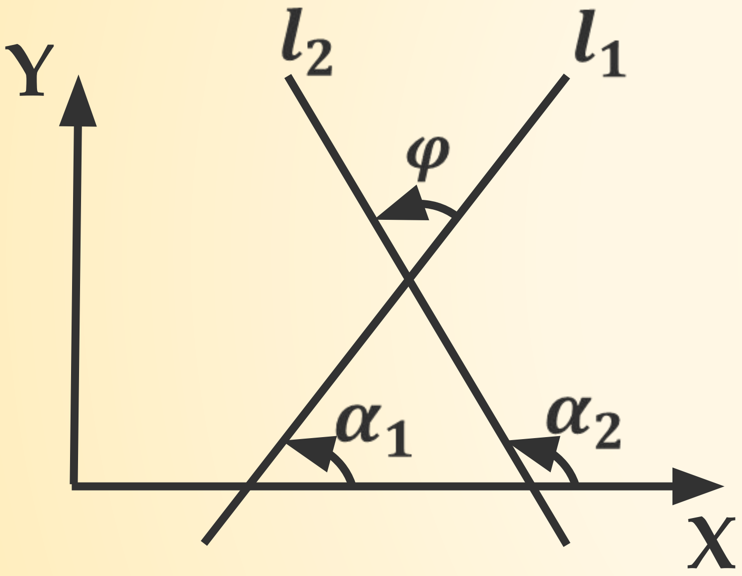
Пример. Найти расстояние от точек *A(4;3), B(2;1), C(1;0)* до прямой

$$\boldsymbol{3x - 4y - 10 = 0}$$

Угол между прямыми

- Рассмотрим две непараллельные прямые l_1 и l_2.

  Пусть уравнение $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$



$$k_1 = tg\,\alpha_1\,, k_2 = tg\,\alpha_2$$

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \quad (5)$$

Формула (5) служит для определения угла между двумя неперпендикулярными прямыми.

- Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и наоборот:

$$k_2 = k_1 \qquad (6)$$

Равенство (6) является условием параллельности двух прямых.

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (7)$$

Равенство (7) является условием перпендикулярности прямых.

<u>Пример.</u> Задан треугольник АВС вершинами ***А(6;4), В(-9;4), С(-9;-16). Найти уравнение высоты AD.***

Уравнения пучка прямых

- Возьмем на плоскости точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$. Совокупность всех прямых плоскости, проходящих через данную точку, называют ***пучком прямых***. Точка $\boldsymbol{M_0}$ называется центром пучка. Если заданы уравнения двух прямые $\boldsymbol{l_1}$ и $\boldsymbol{l_2}$, проходящих через точку M_0 : $\boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1 = 0}$, $\boldsymbol{A_2x + B_2y + C_2 = 0}$, тогда уравнение $\boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0}$,

где $\boldsymbol{\lambda}$ произвольное число, называется уравнением пучка прямых, заданного образующими.

Уравнение пучка прямых можно задать и в другом виде. Всякую невертикальную прямую, проходящую через точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ можно записать в виде:

$$\mathbf{y - y_0 = k(x - x_0)},$$

где $\boldsymbol{k}$ – параметр.

<u>Пример 1</u>. Показать, что прямые $\boldsymbol{2x - 3y = 6}$ и $\boldsymbol{4x - 6y = 25}$ параллельны и найти расстояние между ними.

<u>Пример 2</u>. Написать уравнение прямой проходящей через точку $\boldsymbol{M}$ пересечения прямых $\boldsymbol{2x + y + 6 = 0}$ и $\boldsymbol{3x + 5y - 15 = 0}$ и через точку ***N (1;-2)*** (не находя координаты т. ***M***).