

Лекція №12

Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана плоскость P своим уравнением в нормальном виде:

$$(\vec{n}, \vec{r}) - p = 0,$$

где $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с радиусом-вектором \vec{r}_0 .

Расстояние от точки M_0 до плоскости P определяется по формуле:

$$d = |(\vec{n}, \vec{r}_0) - p|.$$

Если уравнение плоскости задано в общем виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

▪ то расстояние от точки M_0 до плоскости P определяется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример. Найти расстояние от точки $M (5; -3; 2)$ до плоскости

$$2x - 3y + 6z + 4 = 0$$

Ответ: $d = 5$

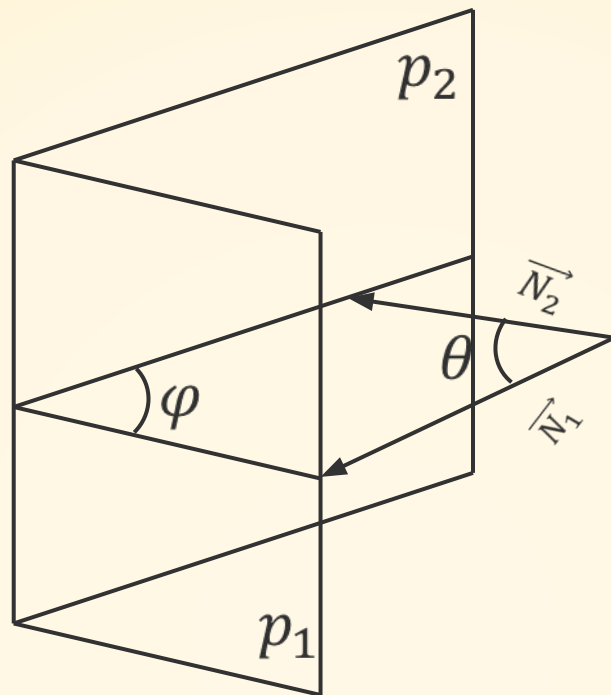
Угол между двумя плоскостями

Пусть даны две плоскости P_1 и P_2 уравнениями:

$$(\vec{N}_1, \vec{r}) + D_1 = 0 \text{ и } (\vec{N}_2, \vec{r}) + D_2 = 0,$$

где $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормали соответствующих плоскостей.

Обозначим угол между плоскостями через φ , а между векторами \vec{N}_1 и \vec{N}_2 через θ .



■

Тогда $\cos \varphi = \pm \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$

или в координатной форме: $\cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Условие параллельности плоскостей

▪ Для того, чтобы плоскости P_1 и P_2 были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ были коллинеарны, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Это равенство является условием параллельности двух плоскостей.

Условие перпендикулярности плоскостей

▪ Для того, чтобы плоскости P_1 и P_2 были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы векторы \vec{N}_1 и \vec{N}_2 были ортогональны друг другу, т.е.

$$(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0 \text{ или}$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Это равенство является условием перпендикулярности двух плоскостей.

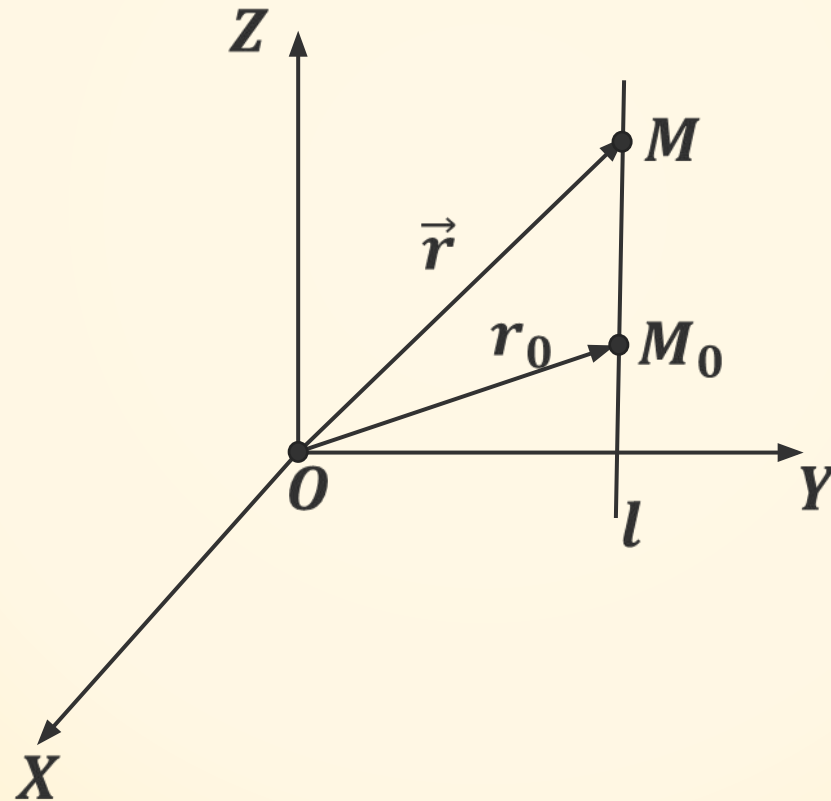
▪ Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -3; 1)$ параллельно плоскости $5x - 4y + 7z - 43 = 0$.

Ответ: $5x - 4y + 7z - 29 = 0$.

Прямая линия в пространстве

Параметрическое уравнение прямой

- Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S} = (m, n, p)$ параллельный данной прямой. Вектор \vec{S} называется направляющим вектором прямой.



Пусть точка M_0 с радиус-вектором \vec{r}_0 принадлежит прямой. Для произвольной точки M прямой $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S}$, где t – некоторый параметр. Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S} \quad (1)$$

параметрическое уравнение прямой в пространстве в векторной форме.

Если $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (2)$$

Равенство (2) является параметрическим уравнением прямой в пространстве в координатной форме.

Канонические уравнения прямой

Из равенств (2), выражая t , получим:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Это каноническое уравнение прямой в пространстве.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 , имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Общие уравнения прямой в пространстве

Пусть заданы уравнения двух пересекающихся плоскостей:

$$(\vec{N}_1, \vec{r}) + D_1 = 0 \text{ и } (\vec{N}_2, \vec{r}) + D_2 = 0,$$

где $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Тогда совокупность этих уравнений:

$$\begin{cases} (\vec{N}_1, \vec{r}) + D_1 = 0 \\ (\vec{N}_2, \vec{r}) + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Задаёт прямую как линию пересечения плоскостей. Уравнения (1)

называются общими уравнениями прямой в пространстве в векторной форме.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) называются общими уравнениями прямой в координатной форме.

Пример. Уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7 = 0 \\ x + 3y - 4z - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

привести к каноническому виду.

Находим координаты точки M_0 , принадлежащую прямой. Полагаем $z_0 = 0$, а x_0, y_0 - определяем из системы (3).

$$\vec{N}_1 = (2; -3; 5), \vec{N}_2 = (1; 3; -4)$$

Направляющий вектор прямой $\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$

Ответ: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{13} = \frac{z}{9}$.

Угол между двумя прямыми

- Пусть даны уравнения двух прямых:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{S}_1 t \quad (l_1), \text{ где}$$

$$\vec{r} = (x, y, z), \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1),$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{S}_2 t \quad (l_2), \text{ где}$$

$$\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2).$$

Обозначим угол между прямыми l_1 и l_2 через φ , тогда:

$$\cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Условие перпендикулярности прямых

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0.$$

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(9; -13; 15)$

перпендикулярно двум прямым l_1 и l_2 , если

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{5} \quad (l_1); \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-7}{1} = \frac{z}{-2} \quad (l_2).$$

Ответ. $\frac{x-9}{1} = \frac{y+13}{24} = \frac{z-15}{p}.$

Прямая и плоскость

Угол между прямой и плоскостью

- Пусть задано уравнение плоскости P .

$$(\vec{N}, \vec{r}) + D = 0,$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{N} = (A, B, C)$ - нормальный вектор и уравнение прямой l :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S}t,$$

где $\vec{S} = (m, n, p)$ - направляющий вектор.

Обозначим угол между плоскостью P и прямой l через φ .

$$\text{Тогда } \sin \varphi = \pm \frac{(\vec{N}, \vec{S})}{|\vec{N}| |\vec{S}|} \text{ или } \sin \varphi = \pm \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

▪ $(\vec{N}, \vec{S}) = 0$ или $Am + Bn + Cp = 0$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\vec{N} \parallel \vec{S} \quad \text{или} \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Пример. Найдите точку пересечения A прямой (l):

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 1}{1}$$

с плоскостью $P: x + 2y + z - 8 = 0$.

Ответ: $A(4; 1; 2)$.