Об авторах

Автор презентации:

- Котов Александр Ильич

Оформление презентации:

- Котова Нина Александровна

Системы случайных величин. (Краткое напоминание)

- **Совокупность двух случайных величин {X,Y}, определенных на одном и том же вероятностном пространстве {Ω,F,P} и рассматриваемых совместно называется <u>системой двух случайных величин или случайным вектором или двумерной случайной величиной</u>.**

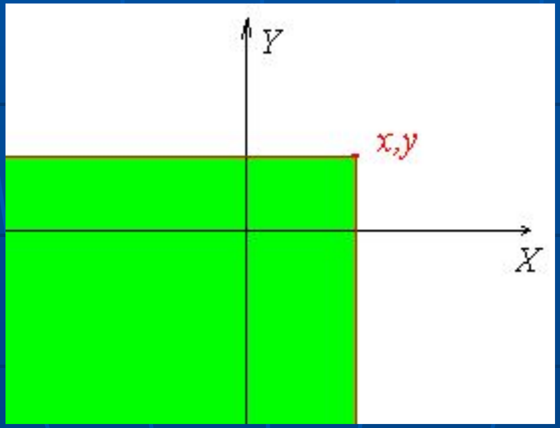
(аналогично определяется система трех и более случайных величин)

Функция распределения

Функцией распределения F(x,y) системы двух случайных величин {X,Y} называется вероятность совместного выполнения двух событий: (X<x) и (Y<y), то есть

$$F(x,y) = P((X<x)\cap(Y<y))$$

Геометрически F(x,y) характеризует вероятность попадания точки (X,Y) в область, закрашенную на рисунке в зелёный цвет (исключая границу, окрашенную красным цветом)



- **Дискретным случайным вектором** называется такой случайный вектор, который может принимать значения только из заранее известной таблицы – конечной или бесконечной.
- Двумерная случайная величина называется **непрерывной**, если она принимает любое значение из некоторой области D∊R2 и существует функция p(x,y)≥0 такая, что выполнены два условия:

$$\forall S \subset D \; P((X,Y) \in S) = \iint\limits_D p(x,y)\,dS$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx \right) dy = 1$$

- Функция p(x,y) называется **функцией плотности** распределения. Равносильным определением функции плотности является

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

где производные понимаются как обобщенные .

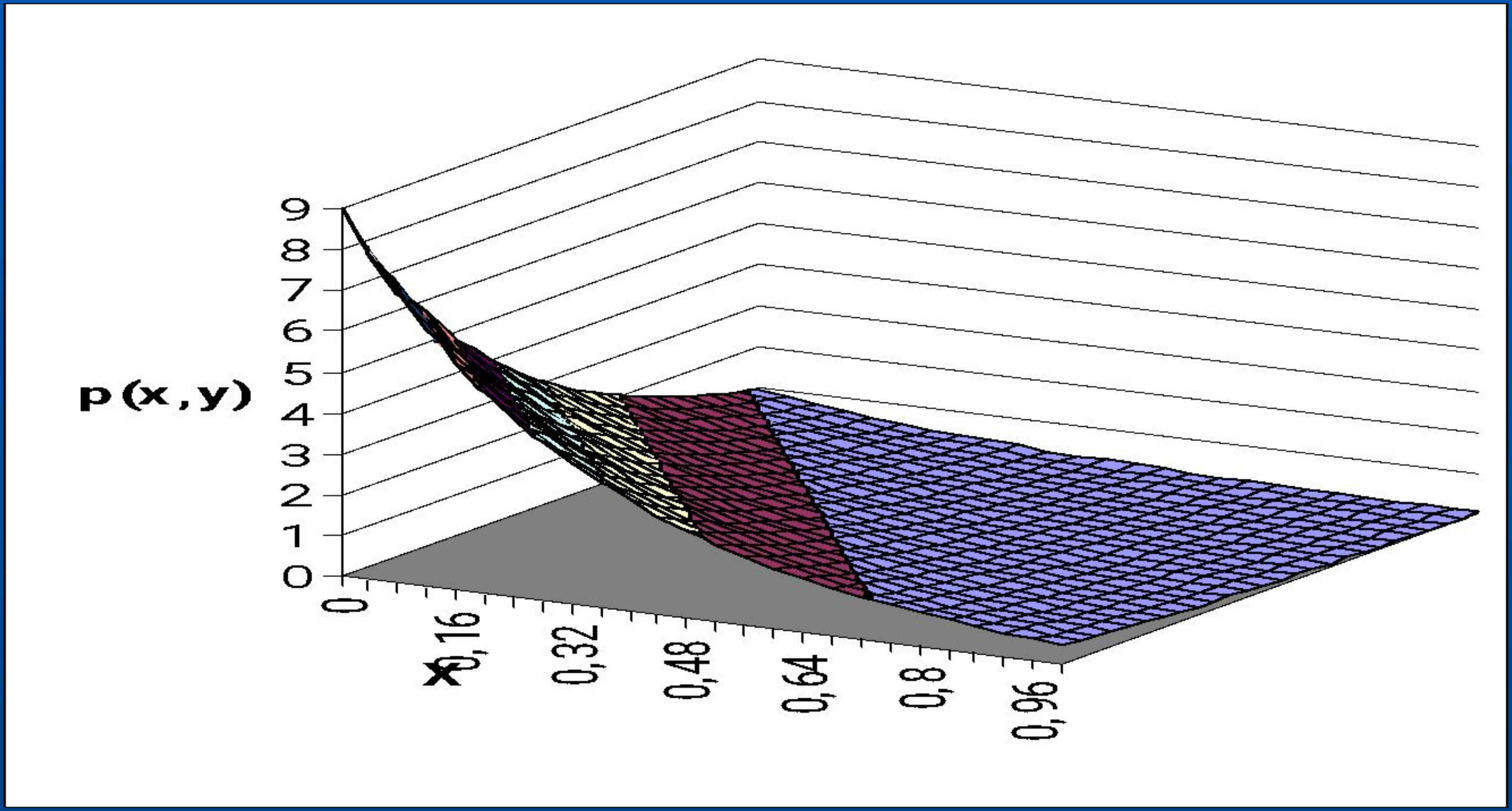
Условные обозначения:

- СВ – случайная величина.
- НСВ - непрерывная случайная величина.
- ДСВ – дискретная случайная величина.
- ССВ – система случайных величин.
- НССВ – система непрерывных случайных величин.
- ДССВ - система дискретных случайных величин.
- ФР – функция распределения.
- ПР – плотность распределения.

Пример непрерывного распределения случайного вектора.

Система двух независимых непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону:

$$p(x,y)=\begin{cases} 9e^{-3x}e^{-3y} & x\in(x\geq 0)\cap(y\geq 0) \\ 0 & x\notin((x\geq 0)\cap(y\geq 0)) \end{cases}$$

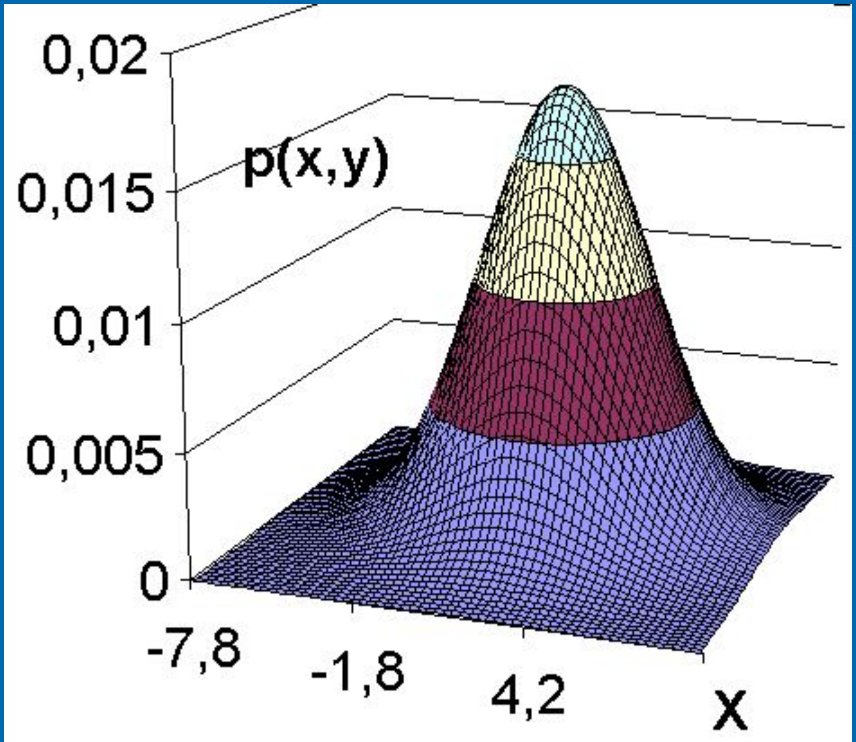


Еще один пример непрерывного распределения случайного вектора.

Система двух независимых нормально распределенных непрерывных случайных величин :

$X \in N(2,3) \quad Y \in N(2,3)$

$$p(x,y) = \frac{1}{18\pi} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}} e^{-\frac{(y-2)^2}{18}}$$



Пример распределения дискретного случайного вектора.

Система дискретных случайных величин задана таблицей распределения. В таблице указаны вероятности событий, заключающихся в том, что случайный вектор примет соответствующее значение.

Y \ X	2	4	6	8	10
3	0,0904	0,0565	0,0113	0	0
6	0,0452	0,113	0,0565	0,0226	0,0113
9	0,0226	0,0678	0,113	0,0791	0,0226
12	0	0,0113	0,0565	0,1356	0,0847

Сумма вероятностей в таблице точно равна единице.

- **Функции F1(x)=F(x,+∞) и F2(x)=F(+∞,y) называются частными (маргинальными) функциями распределения составляющих систему случайных величин.**
- **Для систем непрерывных случайных величин определяются частные (маргинальные) функции плотности:**

$$p_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} \quad p_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy}$$

- **Условными функциями распределения называются функции:**

Fy(x)=P((X<x)∩(Y=y)) и Fx(y)=P((Y<y)∩(X=x))

- **Для систем непрерывных случайных величин определяются условные плотности распределения:**

$$p_y(x) = \frac{\partial F_y(x)}{\partial x} \quad p_x(y) = \frac{\partial F_x(y)}{\partial y}$$

Имеют место следующие равенства:

- $p(x,y)=p_y(x)p_2(y)$
- $p(x,y)=p_x(y)p_1(y)$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y}p(\bar{x},\bar{y})d\bar{y}\right)d\bar{x}$$

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}p(\bar{x},y)dy\right)d\bar{x} \quad F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty}p(x,\bar{y})dx\right)d\bar{y}$$

Зависимость и независимость случайных величин, входящих в состав систем случайных величин.

- **Две случайные величины, входящие в систему случайных величин называются независимыми, если условная функция распределения одной из них не зависит от значения, принимаемого другой случайной величиной.**

Теорема: **Для того, чтобы две случайных величины были независимыми необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы случайных величин могла быть представлена в виде произведения двух частных функций распределения:**

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Зависимость и независимость случайных величин, входящих в состав систем случайных величин (продолжение)

Теорема: Для того, чтобы две непрерывные случайные величины были независимыми необходимо и достаточно, чтобы плотность распределения системы непрерывных случайных величин могла быть представлена в виде произведения двух частных плотностей распределения:

$$p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$$

В этом случае:

$$p_y(x) = p_1(x) \quad p_x(y) = p_2(y)$$

Числовые характеристики систем случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции.

- **Ковариацией cov(X,Y) (или Kxy) двух случайных величин называется их центральный смешанный момент:**

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(\,(X-EX)(Y-EY)\,) \quad = \quad E(X\cdot Y) - EX\cdot EY$$

- **Для систем непрерывных случайных величин имеют место формулы:**

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-Ex)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(y-EY)\,p(x,y)\,dy\right)dx$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}x\left(\int_{-\infty}^{\infty}yp(x,y)\,dy\right)dx - (EX)\cdot(EY)$$

Для **систем дискретных случайных величин** имеют место формулы:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum(x_i-EX)(y_j-EY)p_{ij}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum x_i y_j p_{ij}-EX\cdot EY$$

Здесь суммирование ведется по всем «клеткам» таблицы распределения. Индекс I – номер значения ДСВ X, а индекс j - номер значения ДСВ Y.

- Вспомните задачу номер 8 из контрольной работы по теории вероятностей!

Коэффициентом корреляции r(X.Y) двух случайных величин называется величина

$$r(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$$

Если ковариация равна нулю, то X и Y называются некоррелированными.

Если две случайные величины независимы, то они и некоррелированные. Обратное утверждение, в общем случае, неверно.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости.

Регрессия.

<u>Условным математическим ожиданием</u> случай ной величины Y – ExY называется ее математическое ожидание, вычисленное по условному закону распределения, при условии, что случай ная величина X приняла значение x. Например, для систем непрерывных случай ных величин X,Y имеет место формула:

$$E_x Y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_x(y) dy$$

Регрессия (продолжение).

- Условное математическое ожидание случайной величины У - ЕхУ при заданном значении х называется регрессией У на х.
- График зависимости ЕхУ от величины х называется линией регрессии, или кривой регрессии У на х.
- Регрессия Х на у определяется аналогично.
- Для независимых случайных величин линии регрессии параллельны координатным осям. Обратное утверждение неверно.
- Если случайная величина У есть неслучайная функция СВ Х, то линия регрессии У на х будет просто графиком этой неслучайной функции.

Литература.

- 1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М. Наука, 1976.
- 2. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М. Наука, 1988.
- 3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.:Высш.шк.,2001
- 4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш.шк.,2001
- 5. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей М.:Высш. шк.,2002
- 6. Курзенев В.А. Основы матеметической статистики для управленцев. СпБ, СЗАГС 2002.