СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Собственные значения матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n с постоянными действительными элементами a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Число λ называется собственным значением, а ненулевой вектор $\overline{h}$ называется соответствующим собственным вектором матрицы A если выполняется равенство:

$$A \cdot \overline{h} = \lambda \cdot \overline{h}. \quad (1)$$

Собственные значения матрицы

Определение. Множество всех собственных значений матрицы называется ***спектром матрицы.***

Замечание. Представим равенство (1) в сл. виде:

$$A\vec{h} - \lambda\vec{h} = 0;$$ или $$(A - \lambda E) \cdot \bar{h} = \bar{0}, \quad (2)$$

$E -$ единичная матрица порядка n. Равенство (2) является системой линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\vec{h}$.

Собственные значения матрицы

Система вида (2) всегда совместна, так как всегда имеет нулевое решение.

Система (2) имеет тривиальное (нулевое $\bar{h} = \bar{0}$) решение, если определитель матрицы $|A - \lambda E| \neq 0;$

Система (2) имеет ненулевые решения $\bar{h} \neq \bar{0}$, если

$$|A - \lambda E| = 0. \qquad (3)$$

Собственные значения матрицы

Уравнение (3) называется ***характеристическим уравнением матрицы*** A.

Решения уравнения (3) называются *собственными значениями* матрицы A.

Уравнение (3) можно представить в сл. виде

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Собственные значения матрицы

Вычислив определитель, разложив его по элементам первой строки, и сгруппировав подобные члены, получим алгебраическое уравнение степени n

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \qquad (*)$$

относительно λ, а где постоянные $b_1, b_2, \ldots, b_n -$ действительные числа $b_n = (-1)^n \cdot |A|$.

Многочлен $n-$ой степени относительно λ называется *характеристическим многочленом* матрицы $A.$

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

Согласно основной теореме алгебры характеристическое уравнение всегда имеет ровно n корней (с учетом их кратности), которые в общем случае являются комплексными числами.

Теорема. Любая постоянная квадратная матрица A порядка n имеет с учетом кратности ровно n собственных значений, совпадающих с корнями характеристического уравнения.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

Замечание. Задача нахождения собственных значений матрицы A сводится к решению характеристического уравнения $(*)$.

Пример. Найти собственные значения и векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0.$$

$$\lambda_1 = -5;$$

$$\lambda_2 = 7;$$

Найдем собственный вектор

соответствующий собственному

значению $\lambda_1 = -5;$

$$h^{(1)} = (h_1, h_2)$$

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

$$(A-\lambda E)\cdot\overline{h}=\overline{0},\quad (A-\lambda E)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1-(-5) & 4\\ 9 & 1-(-5)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}6 & 4\\ 9 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}6h_1+4h_2=0\\ 9h_1+6h_2=0\end{cases}\Rightarrow h_2=-1,5h_1.$$

Положив $h_1=c_1,$

получим

$$\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\-1,5c_1\end{pmatrix};\quad c_1\neq 0.$$

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -1,5c_1 \end{pmatrix}; \quad c_1 \neq 0$$

является собственным вектором матрицы A с собственным значением $\lambda_1 = -5.$

Аналогично для собственного значения $\lambda_2 = 7;$ получим следующее

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}; \quad c_2 \neq 0$$

Свойства собственных значений матрицы

- Произведение собственных значений матрицы A равно ее определителю

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n \cdot$$

- Число отличных от нуля собственных значений матрицы A равно ее рангу.
- Все собственные значения матрицы отличны от нуля только и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Свойства собственных значений матрицы

- Если $\lambda \neq 0$ – собственное значение невырожденной матрицы A, то $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$ – собственное значение матрицы A^{-1}.
- Если $\lambda \neq 0$ – собственное значение матрицы A, то λ^m – собственное значение матрицы A^m (***m*** – натуральное число).

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

1. Если из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}, & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

найдено собственное значение λ_1 кратности k_1 $1 \le k_1 \le n$,

то поиск соответствующих числу λ_1 собственных векторов $\overline{h} \ne \overline{0}$ матрицы A сводится к решению линейной системы $(A-\lambda_1 E)\cdot\overline{h}=\overline{0}$ с постоянной квадратной матрицей $A-\lambda_1 E$ порядка n.

Линейная зависимость векторов

- **Определение .** Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейного векторного пространства V называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, не все равные нулю, такие, что справедливо равенство:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0 \qquad (1)$$

Определение . Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейного векторного пространства называются ***линейно независимыми,*** если выполнение равенства (1) возможно только при условии:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

- .

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Система $(A - \lambda_1 E) \cdot \overline{h} = \overline{0}$

всегда имеет бесконечное множество решений,

в котором число базисных (то есть максимальное число

линейно независимых) решений равно $n - r_1$,

где $r_1 -$ ранг матрицы , то есть целое

неотрицательное число, $0 \leq r_1 \leq n - 1$.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Поэтому любому собственному значению квадратной матрицы A соответствует хотя бы один линейно независимый собственный вектор.

Более того, число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1 кратности k_1, не превосходит числа k_1.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

2. Если λ_1 – простое собственное значение матрицы А, тогда этому числу отвечает ровно один линейно независимый собственный вектор $\overline{h}_1 \neq \overline{0}$, который находим из системы $(A - \lambda_1 E) \cdot \overline{h} = \overline{0}$, например, с помощью метода Гаусса.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

3. Случай, когда характеристическое уравнение

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \qquad (*)$$

имеет комплексный корень λ_1 кратности $k_1 \geq 1$. Так как данное алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, то оно обязательно имеет корень λ_2 комплексно–сопряженный по отношению к λ_1.

.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Кратность корня λ_2 равна числу k_1. Поэтому следует найти собственные векторы , соответствующие собственному значению λ_1 .

Далее нужно построить к ним комплексно-сопряженные векторы, которые являются собственными векторами, соответствующими собственному значению λ_2 .

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

4. Пусть у матрицы A есть кратное собственное значение λ_1 кратности $k_1 \geq 2$. Тогда, решая систему будет найдено $n - r_1$ линейно независимых собственных векторов, отвечающих числу λ_1.

Причем число $n - r_1$ удовлетворяет двойному неравенству: $1 \leq n - r_1 \leq k_1$,

где $r_1 = r(A - \lambda_1 E)$.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Замечание. Если оказывается, что $n - r_1 = k_1,$ то для собственного значения λ_1 будет найдено столько линейно независимых собственных векторов, какова кратность рассматриваемого собственного значения λ_1

Примеры

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & -1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Примеры

$\lambda_1 = 3 -$ собственное значение кратности $k_1 = 2$.

$$(A - \lambda E) \cdot \bar{h} = \bar{0}, \quad (A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (4-3) & -1 \\ 1 & (2-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)(-1) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$h_1 = h_2 = C \quad \Rightarrow \quad h = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$