*Решение логарифмических неравенств

* # *Логарифмические неравенства

* ***Логарифмическими неравенствами*** называют неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a u(x)$, где $a \neq 1$; $a > 0$; $f(x)$, $u(x)$ - выражения, содержащие x.

* ***Если в неравенствах неизвестное находится под знаком логарифма, то неравенства относят к логарифмическим неравенствам.***

* *Свойства логарифмов, выраженные неравенствами*

* **1. Сравнение логарифмов:**

* А) Если $a > 1$, то $log_a x > log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x > y, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y < x$;

* Б) Если $0 < a < 1$, то $log_a x > log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$ $0 < x < y$.

* **2. Сравнение логарифма с числом:**

* А) Если $a > 1$, то $log_a x > z \Leftrightarrow x > a^z$;

* Б) Если $0 < a < 1$, то $log_a x > z \Leftrightarrow 0 < x < a^z$.

* Свойства монотонности логарифмов

* 1) Если $a > 1$, то $log_a u < c \Leftrightarrow 0 < u < a^c \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < a^c \end{cases}$ и $log_a u > c \Leftrightarrow u > a^c$.
* 2) Если $0 < a < 1$, то $log_a u < c \Leftrightarrow u > a^c$ и $log_a u > c \Leftrightarrow 0 < u < a^c \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < a^c. \end{cases}$
* 3) Если $a > 1$, то $log_a u > 0 \Leftrightarrow u - 1 > 0$.
* 4) Если $0 < a < 1$, то $log_a u > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - u > 0, \\ u > 0. \end{cases}$
* 5) Если $a > 1$, то $log_a u < log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < v \end{cases}$ и $log_a u - log_a v < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v < 0, \\ u > 0. \end{cases}$

* 6) Если $0 < a < 1$, то $log_a u < log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} v > 0, \\ u > v \end{cases}$ и $log_a u - log_a v < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v < 0, \\ v > 0. \end{cases}$
* 7) Если основание a логарифма – переменная величина, то $log_a u \le log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u-v}{a-1} \le 0, \\ u > 0; v > 0; a > 0; a \ne 1. \end{cases}$

* Методы решения логарифмических неравенств

* 1. Метод потенцирования.
* 2. Применение простейших свойств
* логарифмов.
* 3. Метод разложения на множители.
* 4. Метод замены переменной.
* 5. Применение свойств
* логарифмической функции.

* Решение логарифмических неравенств

* № 1. Решите неравенство

$$\mathbf{1 + log_6(4 - x) \leq log_6\left(16 - x^2\right)}\ .$$

* *Решение.*
* 1) Находим область определения данного неравенства
* $\begin{cases} 4 - x > 0, \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x \in (-4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 4)$.
* 2) Преобразуем данное неравенство
* $log_6(16 - x^2) \geq log_6(4 - x) + log_6 6 \Leftrightarrow$ $log_6(16 - x^2) \geq log_6\left(6(4 - x)\right) \Leftrightarrow 6 > 1$, следовательно, $16 - x^2 \geq 6(4 - x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) \leq 0$ $\Leftrightarrow x \in [2; 4]$.

* 3) Учитывая, что $x \in (-4; 4)$, получаем $x \in [2; 4)$.
* *Ответ*. $[2; 4)$.

* № 2. Решите неравенство
  * $\log_3 \frac{1}{x} + \boldsymbol{log_3(x^2 + 3x - 9) \leq log_3\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right)}$.
* *Решение*.
* 1) Находим область определения данного неравенства
* $$\begin{cases} \frac{1}{x} > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0, \\ x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \in \left(-\infty; \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \\ \frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0. \end{cases}$$

* Из первых двух неравенств:
* $x \in \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$.
* Прикидываем $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}85$.
* Рассмотрим неравенство $\frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0$.
* Должно выполняться условие:
* $x \neq 0$.
* Если $x \geq 2$, то $x^3 + 3x^2 - 10x + 1 > 0$, тогда
* $\frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0$.

- 2) Преобразуем данное неравенство
- $log_3\left(\frac{1}{x}(x^2+3x-9)\right) \le log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow$ $log_3\left(x+3-\frac{9}{x}\right) \le log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow 3>1,$ следовательно, $x+3-\frac{9}{x} \le x^2+3x+\frac{1}{x}-10 \Leftrightarrow$ $\frac{x^3+2x^2-13x+10}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ x^3+2x^2-13x+10=0. \end{cases}$
- Решаем уравнение $x^3+2x^2-13x+10=0$.
- Сумма коэффициентов $1+2-13+10=0$, следовательно один из корней $x=1$.
- Разделим четырёхчлен $(x^3+2x^2-13x+10)$ на двучлен $(x-1)$, получаем
- $(x^3+2x^2-13x+10):(x-1)=x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$.

* Тогда $x^3+2x^2-13x+10=(x-1)(x-2)(x+5)$,
* следовательно, $\frac{(x-1)(x-2)(x+5)}{x} \geq 0$, решая методом
* интервалов данное неравенство, определяем
* $x \in \left(-\infty; -5\right] \cup (0;1] \cup [2;+\infty)$.
* Учитывая, что $x > \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$, находим значения неизвестной величины $x \in [2;+\infty)$.
* *Ответ*. $[2;+\infty)$.