

*Элементы
математической
ЛОГИКИ*



СОДЕРЖАНИЕ

1. Понятие «математическая логика»
 2. Из истории...
 3. Понятие «высказывание»
 4. Логические операции над высказываниями
 5. Построение отрицания
 6. Понятие «предикаты»
 7. Понятие «рассуждение»
-
-

1) $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$

2) A

3) B

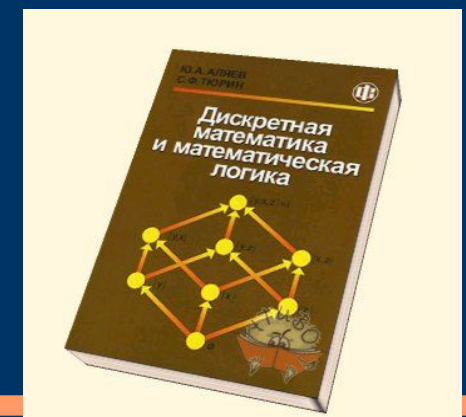
4) $(B \rightarrow C) = m.p(1,2)$

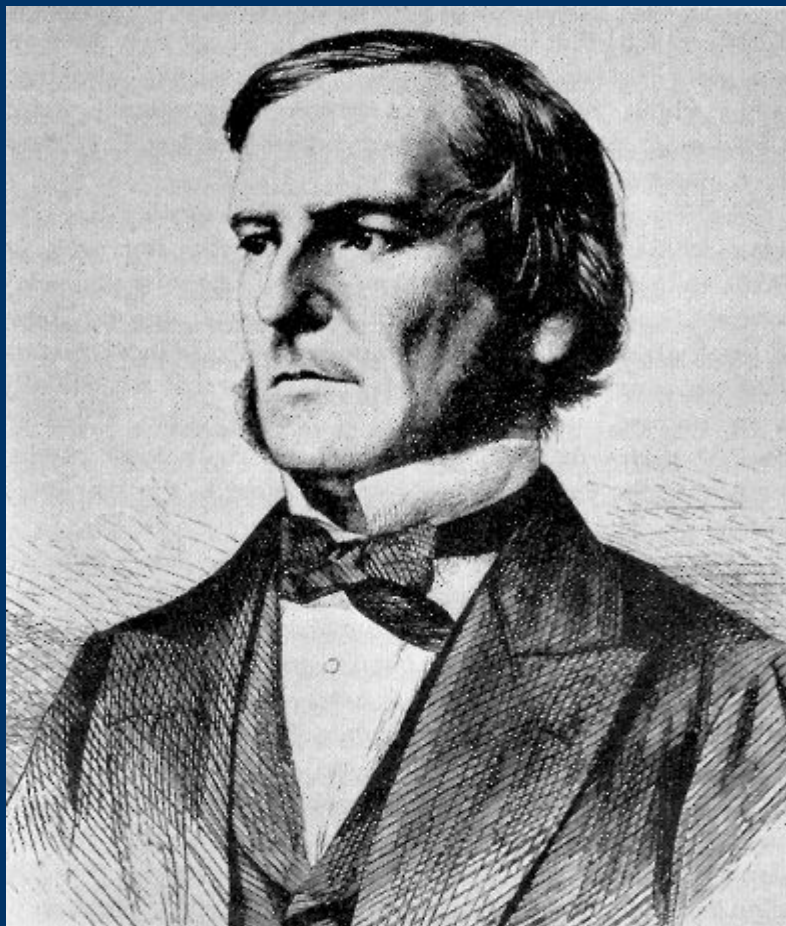
5) $C = m.p(4,3)$

математическая логика –

современный вид формальной логики, то есть науки, изучающей умозаключения с точки зрения их формального строения.

Математическая логика — это анализ методом рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т.е. математическая логика, исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения.





Вплоть до начала XIX века формальная логика практически не выходила за рамки силлогических умозаключений.

Однако, начиная с работ Дж.Буля, можно говорить о превращении ее в математическую логику.

***Математическая логика** — это обширная наука, которая кроме традиционной проблематики занимается вопросами оснований математики и теории алгоритмов и имеет целый ряд приложений.*

ВЫСКАЗЫВАНИЕ

Основным объектом, изучаемым математической логикой является высказывание.

Высказыванием

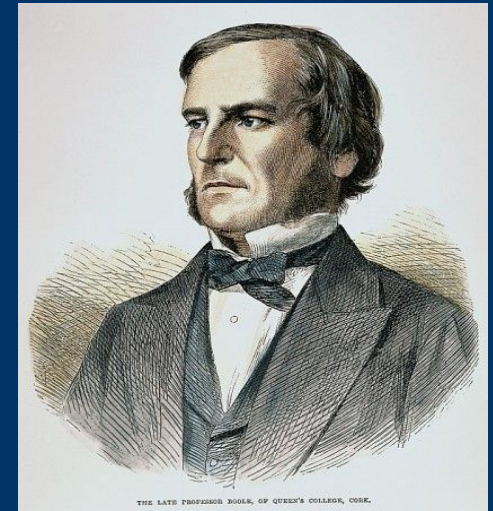
называется повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

1. Волга впадает в Каспийское море.
больше трех.

Первое высказывание является **истинным**, а второе — **ложным**.

Таким образом, высказывание обладает свойством представлять истину или ложь, поэтому на высказывание можно смотреть как на величину, которая может принимать двух значений: «**истина**», «**ложь**».

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



Пример

Пример 2. Два

Логическая связка	Названия логической операции	Обозначения
не	Отрицание, инверсия	$\bar{}, \neg, \neg$
и, а но, хотя	Конъюнкция, логическое умножение	$\&, \wedge, \cdot$
или	Дизъюнкция, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение	$\vee, +$
либо	Строгая или разделительная дизъюнкция, исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2	\oplus, Δ
если ..., то	Импликация, следование	\Rightarrow, \rightarrow
тогда и только тогда когда	Эквивалентность, эквиваленция, равнозначность	$\Leftrightarrow, \sim, \leftrightarrow$

Высказывание обозначаются прописными латинскими буквами A, B, C, \dots . Подобно тому, как в алгебре числа обозначаются буквами $a, b, c \dots$

Основные логи

- 1) отрицание;
- 2) конъюнкция;
- 3) дизъюнкция;
- 4) импликация;
- 5) эквивалентность.

Логическая связка	Наименование	Обозначение	
		Будем использовать	Встречаются в литературе
НЕ	ИНВЕРСИЯ	\bar{A}	$\neg A$
ИЛИ	ДИЗЪЮНКЦИЯ	$A \vee B$	
И	КОНЪЮНКЦИЯ	$A \& B$	$A \wedge B$
ЕСЛИ...ТО	ИМПЛИКАЦИЯ	$A \rightarrow B$	
РАВНОСИЛЬНО	ЭКВИВАЛЕНЦИЯ	$A \leftrightarrow B$	

Отрицанием высказывания X называется высказывание $\neg X$, которое истинно, когда X ложно, и ложно, когда X истинно.

Таблица истинности для отрицания.

X	$\neg X$
Л (0)	И (1)
И (1)	Л (0)

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание, которое истинно только в том случае, когда X и Y оба истинны.

Таблица истинности для конъюнкции.

X	Y	$X \wedge Y$
Л (0)	Л (0)	Л (0)
Л (0)	И (1)	Л (0)
И (1)	Л (0)	Л (0)
И (1)	И (1)	И (1)

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание, которое истинно, когда хотя бы одно из них истинно.

Таблица истинности дизъюнкции.

X	Y	$X \vee Y$
Л (0)	Л (0)	Л (0)
Л (0)	И (1)	И (1)
И (1)	Л (0)	И (1)
И (1)	И (1)	И (1)

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно, а Y ложно.

Таблица истинности для импликации.

X	Y	$X \Rightarrow Y$
Л (0)	Л (0)	И (1)
Л (0)	И (1)	И (1)
И (1)	Л (0)	Л (0)
И (1)	И (1)	И (1)

Эквивалентностью высказываний X и Y называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда X и Y оба истинны или ложны.

Таблица истинности для эквивалентности.

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
Л (0)	Л (0)	И (1)
Л (0)	И (1)	Л (0)
И (1)	Л (0)	Л (0)
И (1)	И (1)	И (1)

ПОСТРОЕНИЕ ОТРИЦАНИЯ

При построении отрицания к простому высказыванию используется простой речевой оборот «неверно, что...», либо отрицание строится к сказуемому, тогда к сказуемому добавляется частица «не», при этом слово «все» заменяется на «некоторые» и наоборот.

Пример 1. Отрицанием высказывания «Все натуральные числа — четные» будет высказывание «Неверно, что все натуральные числа — четные».

Пример 2. Отрицанием высказывания «Все целые числа являются отрицательными» будет высказывание «Некоторые целые числа не являются отрицательными».

ПРЕДИКАТЫ

Предикат — один из элементов логики первого и высших порядков. Начиная с логики второго порядка, в формулах можно ставить кванторы по предикатам.

Предикат называют *тождественно-истинным*, если на любом наборе аргументов он принимает значение 1.

Предикат называют *тождественно-ложным*, если на любом наборе аргументов он принимает значение 0.

Предикат называют *выполнимым*, если хотя бы на одном наборе аргументов он принимает значение 1.

Так как предикаты принимают только два значения, то к ним применимы все операции, например: *отрицание, импликация, конъюнкция, дизъюнкция и т.д.*

ПРИМЕР ПРЕДИКАТОВ

Обозначим предикатом $EQ(x, y)$ отношение равенства (« $x = y$ »), где x и y принадлежат R (множеству вещественных чисел). В этом случае предикат EQ будет принимать истинное значение для всех равных x и y .

Более житейским примером может служить предикат $ПРОЖИВАЕТ(x, y, z)$ для отношения « x проживает в городе y на улице z » или $ЛЮБИТ(x, y)$ для « x любит y », где множество M — это множество всех людей.

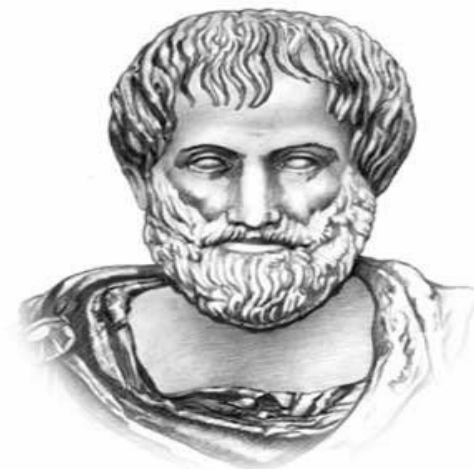
РАССУЖДЕНИЕ

Рассуждение — сопоставление мыслей, связывание их для соответствующих выводов.

Рассуждения является предметом *логики*.

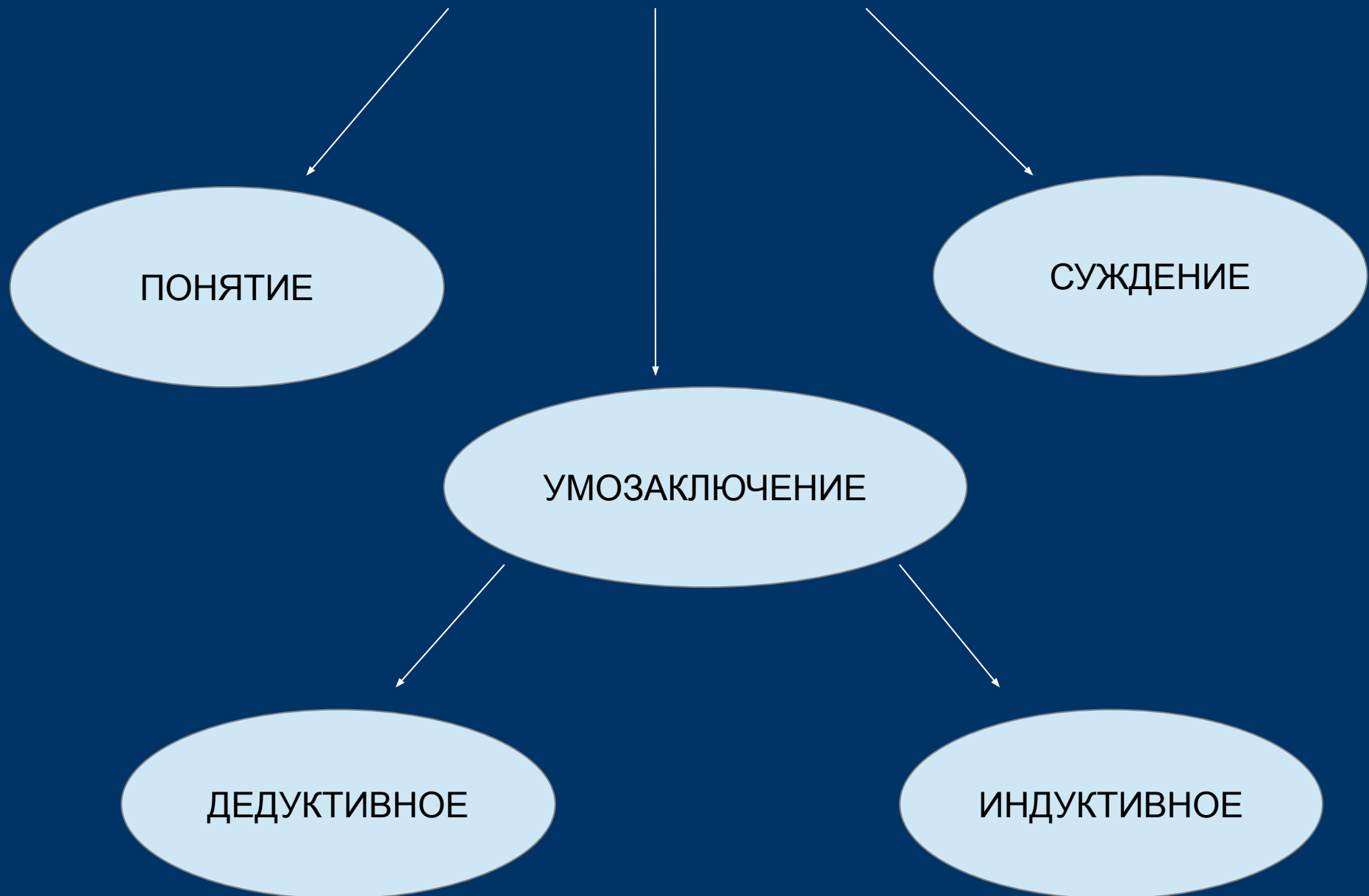
Логическое мышление — способность мыслить точно и последовательно, не допуская противоречий в своих рассуждениях, и умение вскрывать логические ошибки.

Правильное рассуждение — это рассуждение, в котором одни мысли с необходимостью вытекают из других мыслей.



АРИСТОТЕЛЬ
384-322 до н. э.

ОСНОВНЫЕ ФОРМЫ РАССУЖДЕНИЙ



Понятие — отображённое в мышлении единство существенных свойств, связей и отношений предметов или явлений.

Суждение — форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о предмете, его свойствах или отношениях между предметами.

УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ:

Дедукция (лат. *deductio* — выведение) — метод мышления, при котором частное положение логическим путём выводится из общего, вывод по правилам логики.

Индукция (лат. *inductio* — наведение) — процесс логического вывода на основе перехода от частного положения к общему.

- 1) $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
- 2) A
- 3) B
- 4) $(B \rightarrow C) = m.p(1,2)$
- 5) $C = m.p(4,3)$

Таблица 1

х	$\neg x$
и (1)	л (0)
л (0)	и (1)

Таблица 2

х	у	$x \wedge y$
и (1)	и (1)	и (1)
и (1)	л (0)	л (0)
л (0)	и (1)	л (0)
л (0)	л (0)	л (0)

Наше изложение математической логики было очень кратким, но все же достаточным, чтобы думающий читатель усомнился в её способности вычислять истину.

