



# СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Методи математичної статистики дозволяють перевірити:

- припущення про закон розподілу деяких випадкових величин (генеральної сукупності);
- про значення параметрів цього розподілу;
- про наявність кореляційної залежності між випадковими величинами, визначених на множині об'єктів однієї і тієї ж генеральної сукупності.

***Статистичною*** називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу, про параметри відомих розподілів.

Задача полягає в тому, щоб підтвердити або спростувати гіпотезу, ***використовуючи вибіркoві*** (експериментальні) ***дані***.

***Перевірити статистичну гіпотезу*** – це означає перевірити, чи узгоджуються вибіркові дані з цією гіпотезою.

Перевірка здійснюється за допомогою ***статистичного критерію***.

***Статистичний критерій*** – це випадкова величина, ***закон розподілу*** якої (разом із значеннями параметрів) відомий у випадку, якщо прийнята гіпотеза ***справедлива***.

Звичайно використовуються критерії Стьюдента, Фішера,  $\chi^2$  (Пірсона) та ін.

# Послідовність дій

**Крок 1.** Сформулювати основну та альтернативну гіпотези.

**Крок 2.** Задати рівень значущості  $\alpha$ .

**Крок 3.** Обираємо критерій для перевірки гіпотези

**Крок 4.** По таблиці знайти **критичні значення** та побудувати **критичну область**.

**Крок 5.** За вибіркою порахувати **значення статистики**.

**Крок 6.** Порівняти отримане значення з критичною областю. Зробити висновок

# 1. Сформулювати основну та альтернативну гіпотези.

**Нульовою (основною) гіпотезою** називають висунуту гіпотезу  $H_0$ . Разом з нульовою гіпотезою  $H_0$  висувається **альтернативна** або **конкуруюча** гіпотеза  $H_1$ , що суперечить нульовій.

**Наприклад :**

$$\begin{array}{lll} 1) H_0 : Q_1 = Q_2; & 2) H_0 : Q_1 = Q_2; & 3) H_0 : Q_1 = Q_2; \\ H_1 : Q_1 > Q_2; & H_1 : Q_1 < Q_2; & H_1 : Q_1 \neq Q_2. \end{array}$$

## 2. Задати рівень значущості $\alpha$ .

Виберемо деяку малу величину  $\alpha$  (0,05; 0,01; 0,001) – рівень значущості.

Ймовірність  $\alpha$  називають *рівнем значущості*.

Це ймовірність здійснення *помилки першого роду*, тобто відкидання гіпотези  $H_0$ , коли вона вірна.



### 3. Обираємо критерій для перевірки гіпотези

Нехай випадкова величина  $K$  – статистичний критерій перевірки деякої гіпотези  $H_0$ . При справедливості  $H_0$  закон розподілу випадкової величини  $K$  характеризується деякою *відомою* щільністю розподілу ймовірності  $p(K)$ .

## 4. Знайти критичні значення та побудувати критичну область.

Визначимо *критичне значення критерію*  $K_{кр}$  як розв'язок одного з трьох рівнянь залежно від *вигляду*  $H_0$  та  $H_1$ .

$$1) H_0 : Q_1 = Q_2;$$

$$H_1 : Q_1 > Q_2$$

$$P (K > K_{критичне}) = \alpha, \quad (1)$$

2)  $H_0 : Q_1 = Q_2;$

$H_1 : Q_1 < Q_2$

$$P (K < K_{\text{критичне}}) = \alpha, \quad (2)$$

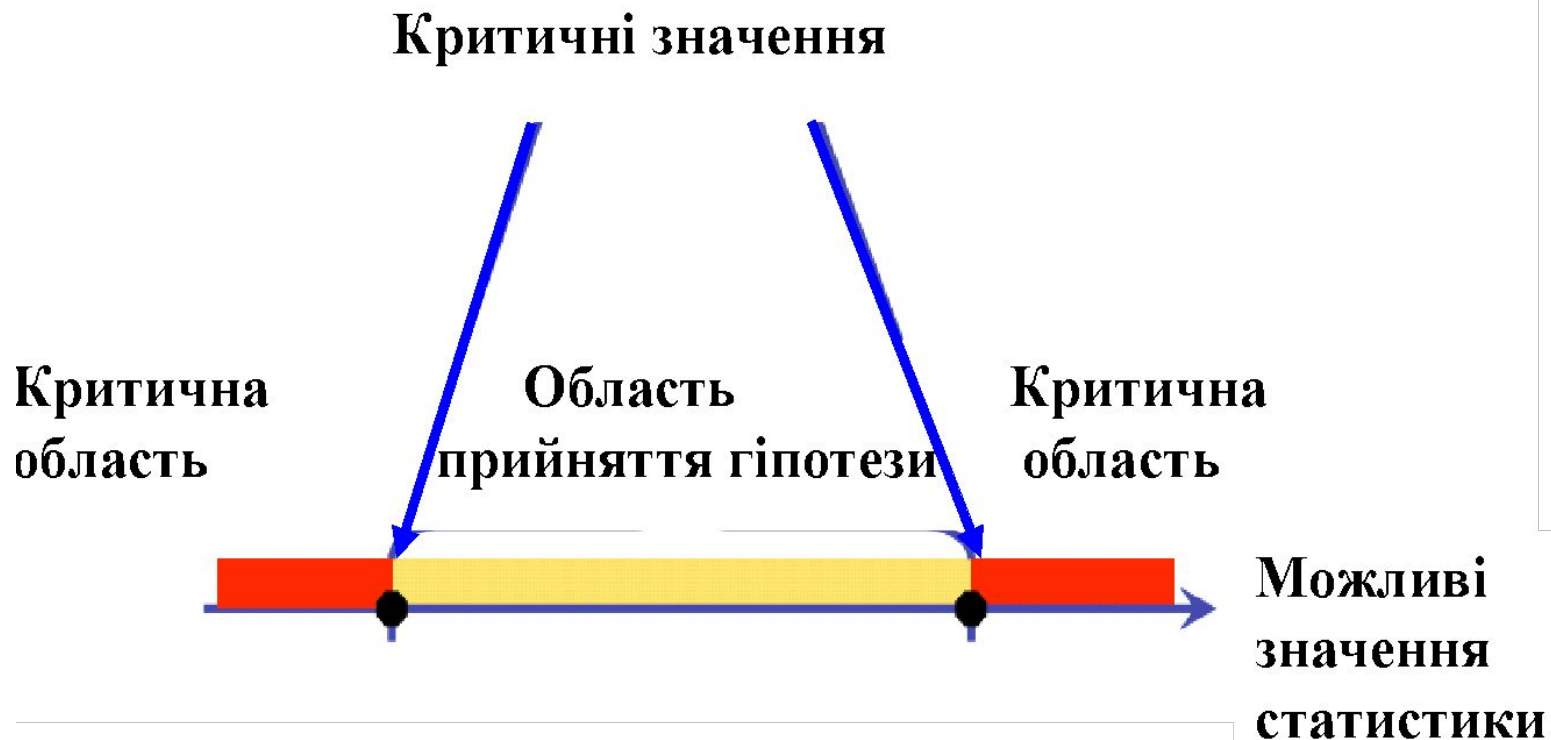
3)  $H_0 : Q_1 = Q_2;$

$H_1 : Q_1 \neq Q_2$

$$P (K < K_{\text{критичне}1}) + P (K > K_{\text{критичне}2}) = \alpha. \quad (3)$$

- Розв'язок рівнянь (1–3) полягає в такому: за заданою імовірністю  $\alpha$ , знаючи  $p(K)$ , **задану, як правило, у вигляді таблиць**, потрібно визначити критичне значення критерію ( **$K_{\text{критичне}}$** ).

- Критичні значення відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.



Множина значень статистики включає дві області:

- 1 **Область прийняття гіпотези**, тобто безліч тих значень статистики, при яких гіпотеза  $H_0$  приймається;
- 2 **Критичну область**, тобто безліч тих значень статистики, при яких гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається альтернативна гіпотеза  $H_1$ .

## 5. За вибіркою порахувати значення статистики.

Після побудови критичної області  
**обчислюють значення статистики по  
вибірці** і порівнюють його з критичною  
областю.

6. Порівняти отримане значення з критичною областю.

Зробити висновок

Якщо **значення статистики** потрапило в **область прийняття гіпотези**, то гіпотеза  **$H_0$  приймається**

Якщо **значення статистики** потрапило **в критичну область**, то гіпотеза  **$H_0$  відхиляється** і приймається альтернативна гіпотеза  **$H_1$**



Розглянемо рівняння

$$P (K > K_{\text{критичне}}) = \alpha \quad (1).$$

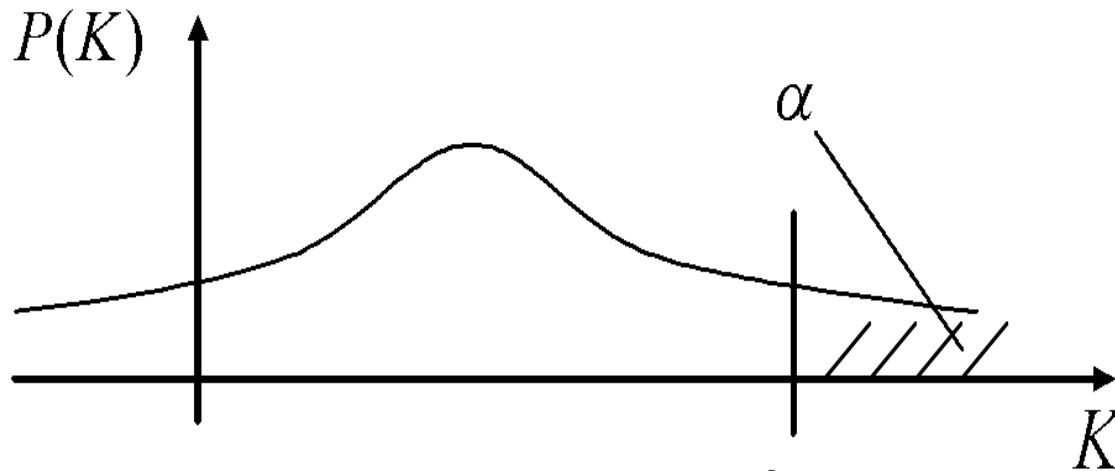
Розв'язавши його, знаходимо значення

$K_{\text{критичне}}$ , що розбиває числову вісь на дві області:

$K < K_{\text{критичне}}$ — область прийняття гіпотези;

$K > K_{\text{критичне}}$ — критична область.

$$P(K > K_{кр}) = \alpha$$



Область прийняття гіпотези

$K_{кр}$  (критична область)

Критична точка, що отримана з рівняння (1), називається *правобічною*.

Обчислюємо ***Кемпіричне*** – значення критерію  $K$ , ***розраховане за вибірковими даними***

# Правило:

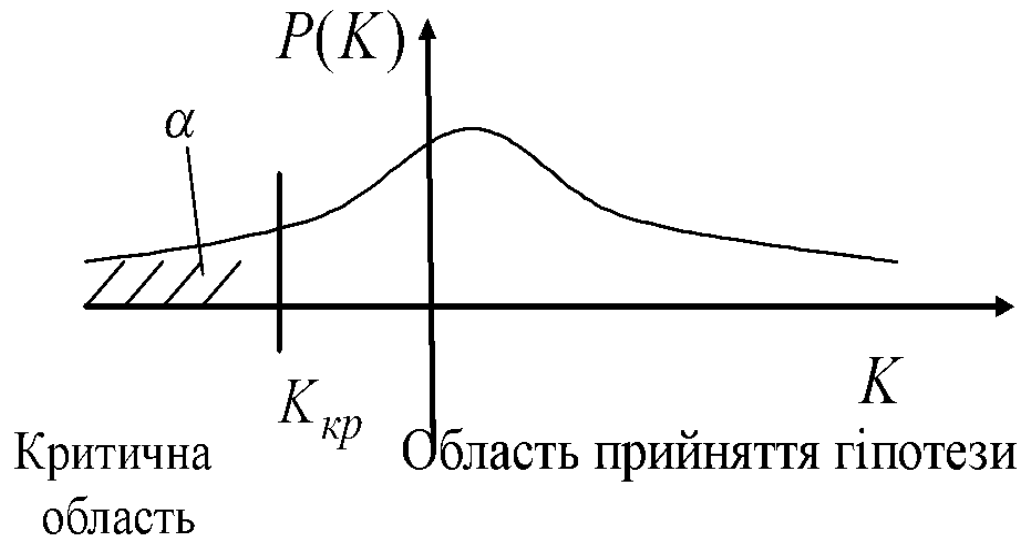
ЯКЩО

**$K_{\text{емпіричне}} > K_{\text{критичне}}$**  – У цьому випадку говорять, що *гіпотеза  $H_0$  не узгоджується з вибірковими даними.  $H_0$  відкидається;*

**$K_{\text{емпіричне}} < K_{\text{критичне}}$**  – вибіркові дані не суперечать гіпотезі  $H_0$ .  $H_0$  приймається.

$$P(K < K_{кр}) = \alpha,$$

Рівняння (2) визначає лівосторонню критичну область.



***Правило:***

**ЯКЩО**

**Кемпіричне  $<$  Ккритичне —  $H_0$   
відкидається;**

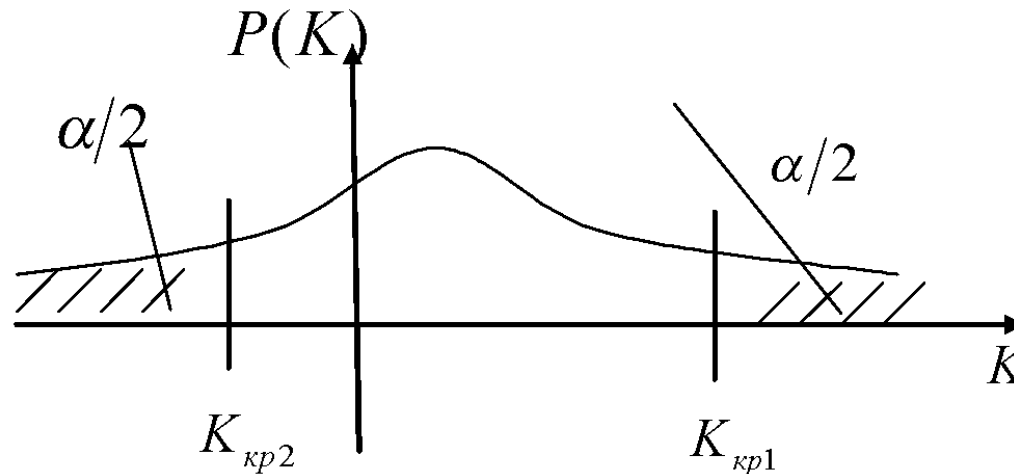
**Кемпіричне  $>$  Ккритичне —  $H_0$   
приймається.**

Рівняння (3) визначає двосторонню критичну область.

Звичайно  $K_{кр1}$  і  $K_{кр2}$  визначають таким чином, щоб виконувалася умова

$$P(K \leq K_{кр2}) = P(K \geq K_{кр1}) = \alpha/2$$

$$P(K \leq K_{кр2}) = P(K \geq K_{кр1}) = \alpha/2$$



**Правило:**

$|K_{емпіричне}| > K_{критичне} - H_0$  відкидається ,

$|K_{емпіричне}| < K_{критичне} - H_0$  приймається.

Як бачимо, вигляд критичної області залежить від того, яка гіпотеза висунута як конкуруюча.



# Перевірка гіпотези про закон розподілу

Нехай необхідно перевірити гіпотезу  $H_0$  про те, що вибірка підкоряється певному закону розподілу, заданому функцією  $F(x)$ . Під альтернативною гіпотезою  $H_1$  в цьому випадку будемо підрозумівати те, що просто не виконано основну гіпотезу.

Потрібно зробити висновок: чи погоджуються результати спостережень із висловленим припущенням. Для цього використаємо спеціально підібрану величину – критерій згоди.

**Критерій згоди Пірсона** – найбільш часто вживаний критерій для перевірки гіпотези про закон розподілу.

Для перевірки гіпотези про закон розподілу необхідно розрахувати **емпіричні** і **теоретичні** частоти.

## Емпіричні та теоретичні частоти. Безперервний розподіл

Нехай при дослідженні випадкової величини була отримана вибірка розміром  $n$ . Весь інтервал можливих значень поділяють на  $k$  інтервалів. Інтервали не перетинаються і рівні між собою. Потім обчислюють  $n_i$  – кількість значень, що потрапили в  $i$ -й інтервал. Емпіричними називають частоти  $n_i$ , що фактично спостерігаються .

# Теоретичні частоти

*Теоретичні* частоти безперервного розподілу знаходять за формулою

$$n_i' = NP_i,$$

де  $N$  – число випробувань;

$P_i$  – ймовірність влучення  $X$  у  $i$ -й частковий інтервал, обчислена при допущенні, що  $X$  має функцію розподілу  $F(x)$ .

## *Теоретичні частоти*

$$n_i' = N(F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Зокрема, якщо є підстави припускати, що випадкова величина  $X$  розподілена нормально, то теоретичні частоти, обчислюють таким чином

## Теоретичні частоти

$$n_i' = N(\text{НОРМРАСП}(x_i, \bar{x}, S, 1) - \text{НОРМРАСП}(x_{i-1}, \bar{x}, S, 1)),$$

де  $N$  – число випробувань;

$x_i$  – права границя  $i$ -го інтервалу;

– середнє значення;

$S$  – стандартне відхилення.

# Критерій згоди Пірсона

Нульова гіпотеза: генеральна сукупність розподілена за законом  $F(x)$ . В якості критерію обираємо випадкову величину

$$\chi^2_{\text{емпіричне}} = \sum_{i=1}^L \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

де  $n_i$  – емпіричні частоти;  
 $n_i'$  – теоретичні частоти.

Для рівня значущості  $\alpha$  знаходимо  $\chi^2_{кр}$ , розв'язуючи рівняння

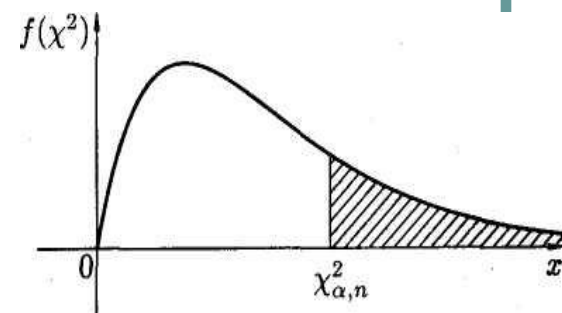
$$P(\chi^2 > \chi^2_{критичне}) = \alpha,$$

$$\chi^2_{критичне} = \text{ХИ2ОБР}(\alpha; K),$$

де  $K = L - 1 - r$ ;

$L$  – число часткових інтервалів;

$r$  – число параметрів розподілу. Для нормального закону  $r = 2$ .





Якщо  $\chi^2$  емпіричне  $<$   $\chi^2$  критичне – гіпотезу про закон розподілу **приймаємо**.

Якщо  $\chi^2$  емпіричне  $>$   $\chi^2$  критичне – гіпотезу  $H_0$  відкидаємо.

Обсяг вибірки повинен бути більше ніж 50.

# Приклад

У таблиці наведені значення частот. Розрахувати теоретичні частоти в припущенні, що вибірка має нормальний закон розподілу. Відомо, що  $\bar{x}=42,37$ ,  $S=0,94$ . З рівнем значущості  $\alpha=0,01$  перевірити гіпотезу про закон розподілу.

$i$	0	1	2	3	4	5
інтервали	$(-\infty;40]$	$(40;41]$	$(41;42]$	$(42;43]$	$(43;44]$	$(44;46]$
$n_i$ – емпіричні частоти	0	20	112	154	73	15

Оскільки  $\bar{x} = 42,37$ ,  $S = 0,94$ , нормальний закон розподілу для нашої вибірки можна записати у вигляді  $N(42,37; 0,94)$ .

# Перевірка гіпотези про закон розподілу

Інтервал	Кишені	Середні інтервалів	$n_i$	$F(X)$	$P_i$	$n'_i$	$\chi_i^2$
	$X_i$	$(X_i + X_{i-1})/2$	Емпіричні частоти	НОРМРАСП( $X_i$ , $X_{\text{ср}}$ , $S$ , $1$ )	$F(X_i) - F(X_{i-1})$	Теоретичні частоти $NP_i$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
$(-\infty; 40]$	40	39,5	0	0,0058			
$(40; 41]$	41	40,5	20	0,0724	0,066	24,92	0,97
$(41; 42]$	42	41,5	112	0,3469	0,274	102,63	0,85
$(42; 43]$	43	42,5	154	0,7486	0,401	150,23	0,09
$(43; 44]$	44	43,5	73	0,958	0,209	78,50	0,38
$(44; 46]$	46	45	15	0,999	0,0413	15,48	0,015
Сума			374	$\chi^2_{\text{емпіричне}} =$			2,32
36				$\chi^2_{\text{критичне}} = \text{ХИ2ОБР}(0,01; 2) =$			9,21

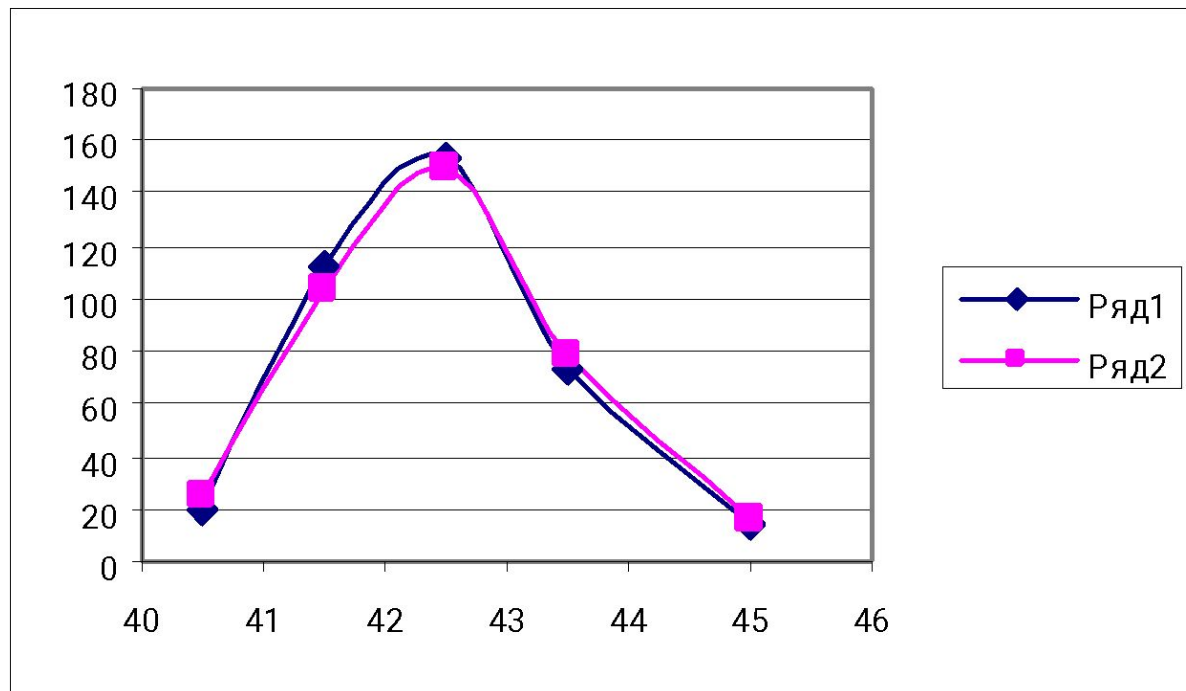
Для розглянутого прикладу  $\chi^2_{\text{емпіричне}} = 2,32$ .

$\chi^2_{\text{критичне}} = \chi^2_{\text{Обр}}(0,01; 2) = 9,210351$

( $K = 5 - 1 - 2 = 2$ ).

Оскільки  $\chi^2_{\text{емпіричне}} < \chi^2_{\text{критичне}}$ , гіпотеза про нормальний закон розподілу

$N(20,27; 1,96)$  приймається з рівнем значущості 0,01.



# Параметрична статистика

При перевірці будь-якої гіпотези необхідно спиратися на якусь сукупність припущень, з яких і виводяться формули, необхідні для цієї перевірки. При цьому серед інших завжди наявні *припущення про закон розподілу*.

**Невиконання цих передумов робить некоректним застосування відповідних методів.**



*Параметричні методи* припускають конкретний розподіл. Ці методи строго обґрунтовані і добре вивчені.

Надалі ми будемо розглядати критерії, в основі яких лежить *припущення про нормальний закон розподілу*.

# Перевірка гіпотези про нормальний розподіл вибірки

Точна перевірка (критерій Пірсона) досить трудомістка, і обсяг вибірки повинен бути досить великим ( $n > 50$ ), тому використовують перевірку умов, що є наслідком з нормального закону розподілу.

# I спосіб - $RS$ -метод

$RS$ -метод полягає в наступному:

- Розраховуємо величину розмаху  $R$  між рівнями ряду і їх стандартне відхилення  $S$ :  
 $R = X_{\max} - X_{\min}$ ;

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

- Тоді розрахункове значення величини  $RS$  дорівнює відношенню  $RS = R / S$ .

- Розраховане значення величини  $RS$  порівнюється з табличним  $RS$ -критерієм (а саме, з його нижньою і верхньою межею для рівня значущості  $\alpha$ ). Якщо ці значення не потрапляють в інтервал між критичними (табличними) межами, то гіпотеза про нормальний закон відхиляється.

Наведемо декілька табличних значень меж  $RS$ -критерію (для  $\alpha = 0,05$ ):

- для  $n = 10$  нижня межа: 2,67; верхня межа: 3,685;
- для  $n = 20$  нижня межа: 3,18; верхня межа: 4,49;
- для  $n = 30$  нижня межа: 3,47; верхня межа: 4,849.

## II спосіб

У випадку нормального розподілу оцінки дисперсії асиметрії  $As$  та ексцесу  $Ek$  дисперсії визначаються виразами

$$\sigma_{As}^2 = \frac{6n(n-1)}{(n+3)(n+1)(n-2)}$$

$$\sigma_{Ek}^2 = \frac{24n(n-1)^2}{(n+5)(n+3)(n-2)(n-3)}.$$

На практиці можна користуватися таким наближеним критерієм згоди :

$$|A_s| \leq 2\sigma_{As} \quad |E_k| \leq 2\sigma_{Ek}$$

Якщо ці нерівності виконуються, то можна вважати, що гіпотеза про нормальний розподіл не суперечить наявним даним.

# F-розподіл (розподіл Фішера)

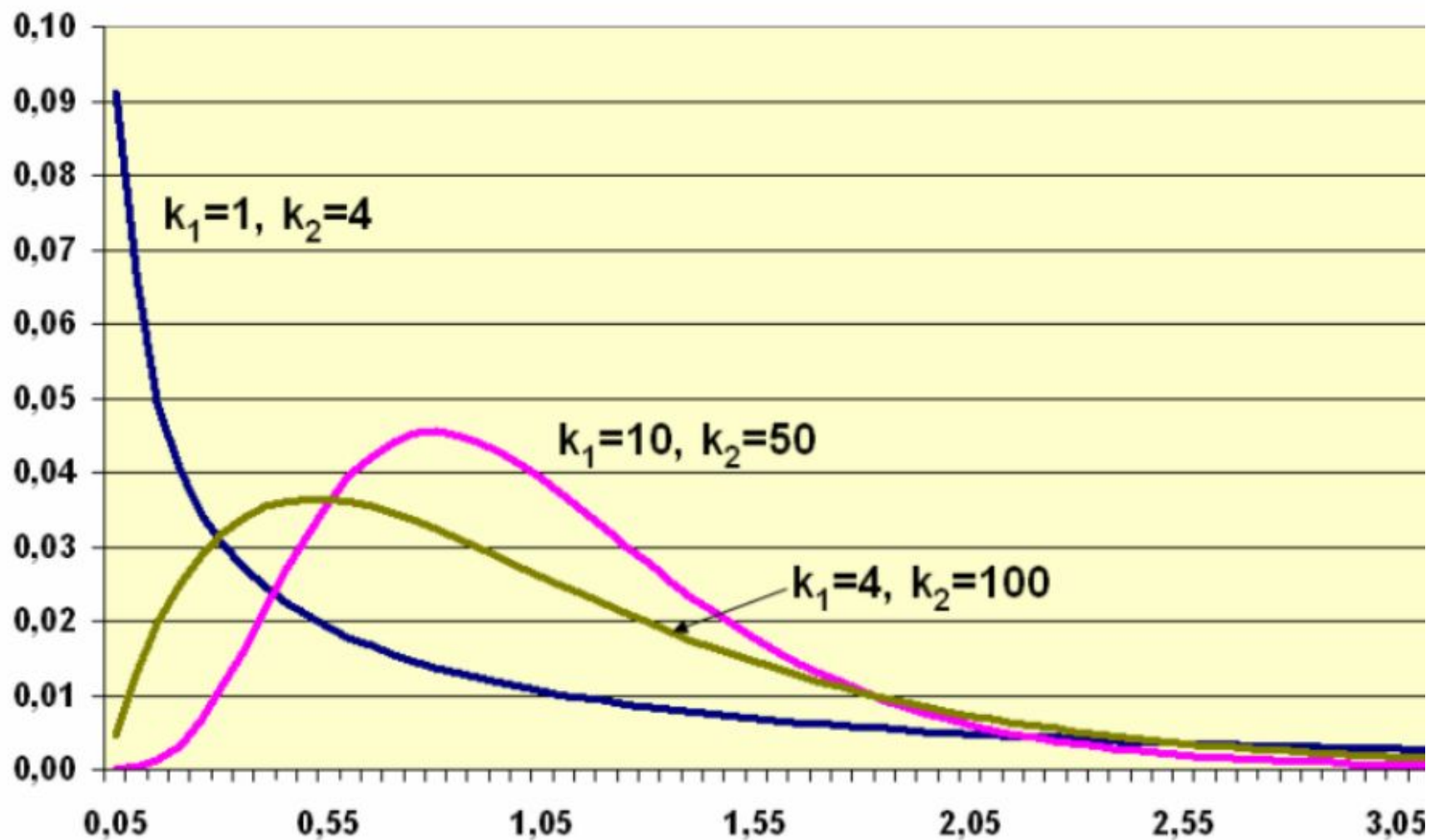
Випадкова величина  $F$  розподілена за законом розподілу **Фішера** з  $k_1$  і  $k_2$  ступенями вільності

$$F = \frac{\frac{\xi}{k_1}}{\frac{\eta}{k_2}} = \frac{k_2 \xi}{k_1 \eta},$$

де  $\xi$ ,  $\eta$  – випадкові величини, що розподілені за законом  $\chi^2$  з  $k_1$  та  $k_2$  ступенями вільності відповідно.



# График распределения Фишера



При заданих числах  $k_1$  і  $k_2$  та за ймовірністю  $\alpha$  за таблицею визначається значення  $F_\alpha$ , таке, що

$$P(F > F_\alpha) = \alpha.$$

# Excel

***FRASП***(  $F_\alpha$  ; ступені\_вільності\_1;  
ступені\_вільності\_2).

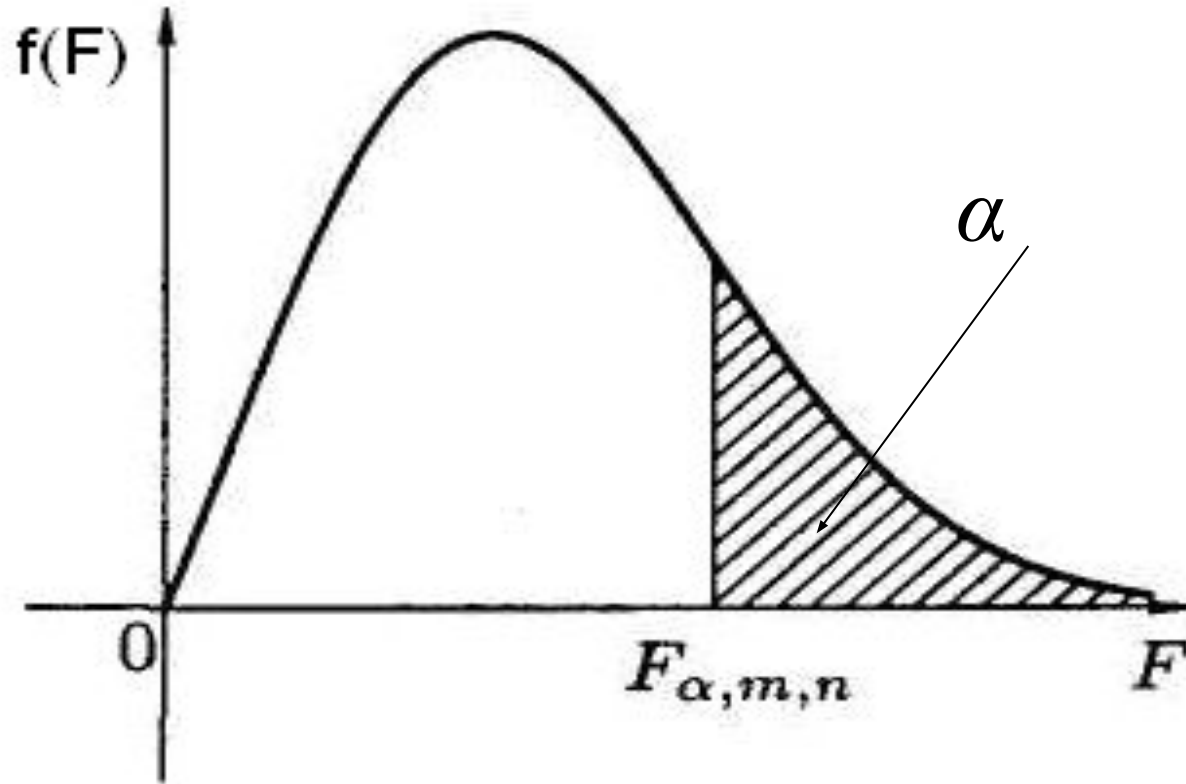
Повертає ймовірність  $\alpha$ , що є розв'язком  
рівняння

$$P(F > F_\alpha) = \alpha$$

***F******R******A******S******P******O******B******R*** (ймовірність;  
ступені\_вільності1; ступені\_вільності2)  
– обчислюється значення  $F_\alpha$ , що є розв'язком рівняння

$$P(F > F_\alpha) = \alpha$$

$\alpha$



## *Порівняння двох дисперсій нормальної генеральної сукупності*

На практиці задача порівняння дисперсій виникає, якщо потрібно порівняти точність приладів, інструментів, методів вимірювань та ін. Кращим є той прилад або метод, що забезпечує найменше розсіювання результатів, тобто меншу дисперсію.

# Критерій Фішера

- **Вимога до даних:** дані незалежні і розподілені нормально.
- **Призначення:** перевірка гіпотези про належність двох дисперсій до однієї генеральної сукупності і, отже, їхньої рівності.

- Отже, нехай генеральні сукупності ознак  $X$  і  $Y$  розподілені нормально. З двох незалежних вибірок обсягами  $n_1$  і  $n_2$  обчислені “виправлені” вибіркові дисперсії  $s_x^2$ ,  $s_y^2$ . Потрібно при даному значенні  $\alpha$  перевірити основну гіпотезу про рівність генеральних дисперсій
- $H_0: s_x^2 = s_y^2$ .



# Критерій Фішера

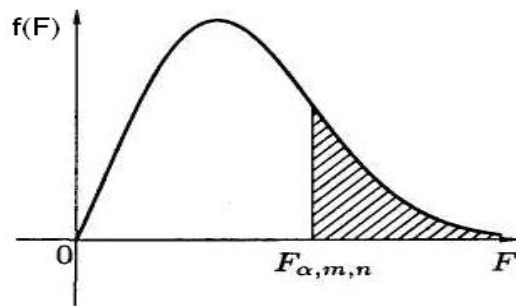
За критерій перевірки нульової гіпотези приймаємо відношення більшої “виправленої” дисперсії  $s_1^2$  до меншої  $s_2^2$ , тобто випадкову величину

$$K = F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- Величина  $F$  має розподіл Фішера з  $k_1=N_1-1; k_2=N_2-1$  ступенями вільності, де  $N_1$  і  $N_2$  – розміри вибірок ( $S_1^2 > S_2^2$ ).
- Критична область будується в залежності від виду конкуруючої гіпотези.



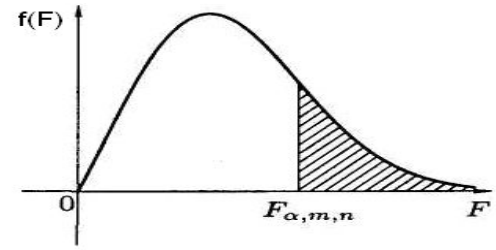
$$1) H_0 : S_1^2 = S_2^2 ; H_1 : S_1^2 > S_2^2$$



$F_{\text{критичне}}$  знаходимо з рівняння

$$P(F > F_{\text{критичне}}) = \alpha .$$

$F_{\text{критичне}}$  знаходять за таблицею по заданому рівню значущості  $\alpha$  та ступенях вільності  $k_1$  та  $k_2$ .



- Якщо  $F_{\text{розраховане}} < F_{\text{критичне}}$  – гіпотеза  $H_0$  приймається, тобто можна вважати, що вибіркові дисперсії різняться несуттєво.
- У протилежному разі –  $H_0$  відхиляється;

$$2) H_0 : S_1^2 = S_2^2 ; H_1 : S_1^2 \neq S_2^2 ;$$

$F_{кр}$  знаходимо з рівняння  $P(F > F_{кр}) = \alpha / 2 ;$

$F_p < F_{кр}$  – гіпотеза  $H_0$  – приймається;

$F_p > F_{кр}$  –  $H_0$  відкидається.

В *Excel*: функція ***FРАСПОБР***( $\alpha$ ;  $k$ ;  $k_2$ ) – повертає *Fкр. односторонне*.

Пакет **Анализ данных**:

*Сервис* – *Анализ данных* –  
*Двухвыборочный F-тест для дисперсии*.

# Приклад.

- У таблиці наведені показники продуктивності праці робітника на верстаті до і після удосконалення за 7 і 6 годин відповідно. Чи можна при рівні значущості  $= 0,05$  вважати удосконалення ефективним?

Старий	42	43	38	40	43	38	40
Новий	42	43	44	42	43	43	

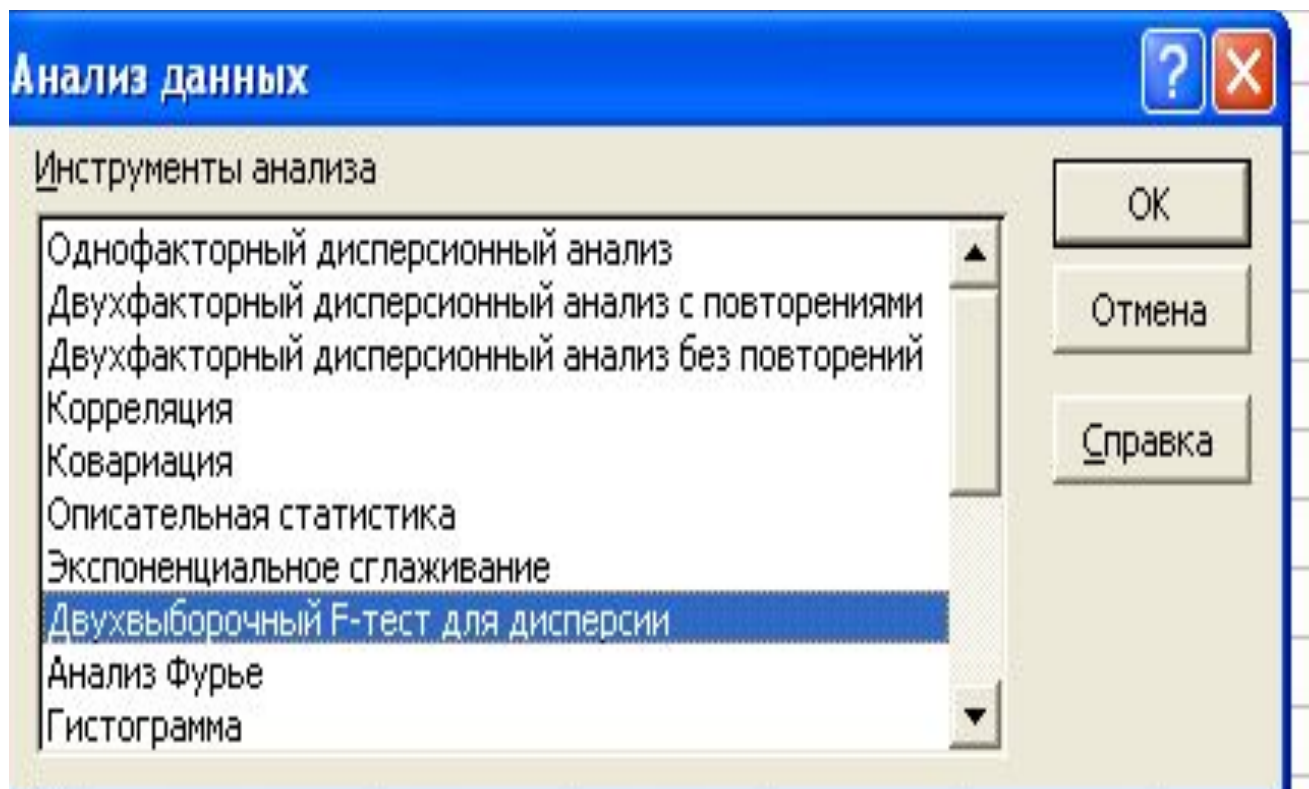
Ефективність верстата залежить від дисперсії. Завдання полягає в порівнянні двох дисперсій.

Висуваємо гіпотези:

$$H_0 : S_1^2 = S_2^2 \quad H_1 : S_1^2 > S_2^2$$



Розрахунки можна провести за допомогою пакета аналізу, обираємо: *Сервис – Анализ данных*.

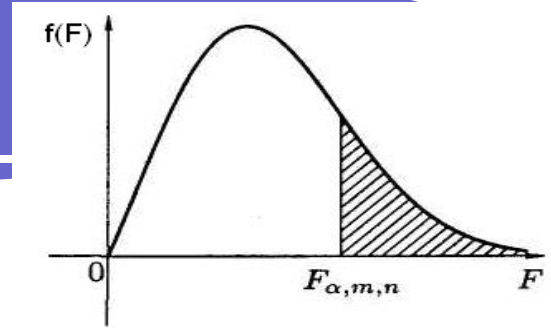


Обираємо *Двухвыборочный F-тест для дисперсии.*

The image shows a dialog box titled "Двухвыборочный F-тест для дисперсии" (Two-sample F-test for variance). The dialog is divided into two main sections: "Входные данные" (Input data) and "Параметры вывода" (Output parameters). In the "Входные данные" section, there are two text input fields for "Интервал переменной 1" and "Интервал переменной 2", both currently empty. Below these is a checkbox labeled "Метки" (Labels) which is unchecked, and a text input field for "Альфа:" (Alpha) containing the value "0,05". The "Параметры вывода" section contains three radio button options: "Выходной интервал:" (Output interval), "Новый рабочий лист:" (New worksheet), and "Новая рабочая книга" (New workbook). The "Новый рабочий лист:" option is selected. To the right of the input fields are three buttons: "ОК" (OK), "Отмена" (Cancel), and "Справка" (Help). The dialog box has a blue title bar with a question mark icon and a close button (X).



Двухвыборочный F-тест для дисперсий		
	<i>Переменная 1</i>	<i>Переменная 2</i>
Среднее	40,57142857	42,83333333
Дисперсия	4,619047619	0,566666667
Наблюдения	7	6
df	6	5
F	<b>8,151260504</b>	
P(F<=f) одностороннее	0,017997241	
F критическое одностороннее	<b>4,950294397</b>	



$df$  – кількість ступенів вільності,

$F$  – розраховане значення  $F_{\text{розраховане}}$ ,

$F_{\text{критическое одностороннее}}$  – відповідно  $F_{\text{критичне}}$ .

$F_{\text{розраховане}} > F_{\text{критичне}}$ , отже, приймаємо гіпотезу  $H_1: S_1^2 > S_2^2$ , тобто дисперсії різняться суттєво.

**Висновок:** можна вважати удосконалення верстата ефективним.



# *Порівняння виправленої вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральною дисперсією*

---

**На практиці ця гіпотеза перевіряється, якщо потрібно перевірити, чи відповідає точність приладів, інструментів, методів та ін. необхідному стандарту**

## *Критерій перевірки*

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

*розподіл Пірсона з  $k = n - 1$  ступенями вільності.*

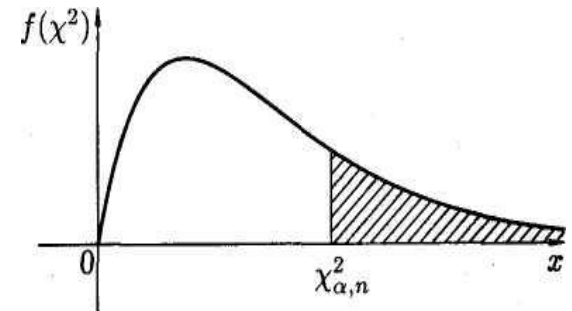
$$H_0: S^2 = \sigma_0^2,$$

$$H_1: S^2 > \sigma_0^2.$$

$\chi_{кр}^2$  обчислюємо, як розв'язок рівняння

$$P(\chi^2 > \chi_{кр}^2) = \alpha.$$

$$\chi_{кр}^2 = \text{ХИ2ОБР}(\alpha; n-1)$$



Якщо  $\chi_p^2 < \chi_{кр}^2$  –  $H_0$  приймається.

Можливі такі постановки задач:

1. Порівняння показників контрольної і експериментальної вибірок.

Можливі такі випадки:

**А) Вибірки невеликого обсягу ( $n < 30$ ):**

- дисперсії вибірок рівні;
- дисперсії вибірок не рівні;

**Б) без припущення про дисперсії (вибірки великі  $n > 30$ );**



2 Порівняння показників вибірки до і після експерименту. У цьому випадку ми маємо справу з так званими зв'язними вибірками.

**3 Чи можна вважати, що деяке значення показника дорівнює деякому нормальному значенню.**

## Перевірка гіпотези про рівність середніх при рівних дисперсіях (малі вибірки $n < 30$ )

### ***Умови:***

- Вибірки розподілені нормально.
- Дисперсії невідомі й однакові: .
- Дані незалежні.

Використовується *критерій Стьюдента* :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

з  $k = n_1 + n_2 - 2$  ступенями вільності,  
де  $n_1, n_2$  - обсяг вибірок;

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$  - середні значення;

$S_1^2, S_2^2$  - виправлені дисперсії.