Кафедра ВМиИТ

СПЕЦ. ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Лектор к. ф.-м. н.
Фаустова И.Л.

Северск 2017

Глава 1. Дифференциальные уравнения

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

§1. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** (ОДУ) *называется уравнение, связывающее независимую переменную* x, *искомую функцию* $y = y(x)$ *и ее производные* $y'(x)$, $y''(x)$, … , $y^{(n)}(x)$.

$\Rightarrow$ в общем случае ОДУ имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0 .$$

Порядок старшей производной, входящей в ОДУ, называется ***порядком дифференциального уравнения***.

ПРИМЕР. Определить порядок уравнений:

$$y' + xy - x^2 = 0, \qquad x(y')^2 + e^x = 0, \qquad (y')^5 + e^{y^2} = 0,$$

$$xy'' - (y')^3 - y = 0, \qquad y'' - y' = 1, \qquad y^2 - y''' + x^5 = 0.$$

Замечание. Уравнение, связывающее неизвестную функцию n переменных, ее аргументы и ее частные производные, называется ***уравнением в частных производных***.

Функция $y = \phi(x)$ называется ***решением дифференциального уравнения*** на интервале $(a;b)$, если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала $(a;b)$.

ПРИМЕР.

1) $y = \cos x$ – решение ДУ $y'' + y = 0$ на $(-\infty, +\infty)$;

2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ – решение ДУ $y' = -\dfrac{x}{y}$ в интервале $(-1;1)$.

Уравнение $\Phi(x,y) = 0$, задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения, называется ***интегралом дифференциального уравнения***.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение называется ***интегрируемым в квадратурах***, если все его решения могут быть получены в результате конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрированием этих функций.

§2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,y)$

Общий вид ДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0\,, \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, y' - ее производная, F – заданная функция трех переменных.

Дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно записать в виде $y' = f(x,y)$ (2)

называется ***уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной***.

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения $y' = f(x,y)$ *выполняются два условия:*

1) $f(x,y)$ *непрерывна в некоторой области D плоскости* xOy,

2) $f'_y(x,y)$ *в области* D *ограничена.*

Тогда для любой точки $M_0(x_0,y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \phi(x)$ *уравнения* (2), *определенное в некотором интервале* $(a;b)$ *содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее условию* $y_0 = \phi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются ***начальными значениями (данными)*** для решения $y = \phi(x)$.

Условие $y(x_0) = y_0$ называется ***начальным условием***.

Геометрически, задание начального условия означает, что на плоскости xOy задается точка (x_0,y_0), через которую проходит интегральная кривая $y(x)$.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения $F(x,y,y')=0$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

Теорему 1 называют ***теоремой существования и единственности решения задачи Коши*** для ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной**.**

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***.

Решение (интеграл) $y = \psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т.е. через каждую точку кривой $y = \psi(x)$ проходит еще хотя бы одна, отличная от $y = \psi(x)$, интегральная кривая), называется ***особым***.

График особого решения называют ***особой интегральной кривой уравнения***.

Замечание. Теорема 1 дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

$\Rightarrow$ Возможно, что в точке (x_0, y_0) условия теоремы 1 не выполняются, а решение $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, существует и единственно.

Из теоремы 1 $\Rightarrow$

1) вся область D покрыта интегральными кривыми уравнения (2), которые нигде между собой не пересекаются;
2) ДУ (2) имеет множество решений. Совокупность решений зависит от произвольной постоянной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* $y' = f(x,y)$ *в области* D *существования и единственности решения задачи Коши называется функция*

$$y = \phi(x, C),$$

зависящая от x *и одной произвольной постоянной* C, *которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любом допустимом значении постоянной* C *она удовлетворяет уравнению* (2);

2) *каково бы ни было начальное условие* $y(x_0) = y_0$ *(где* $(x_0, y_0) \in D$), *можно найти единственное значение* $C = C_0$ *такое, что функция* $y = \phi(x, C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию.*

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения*.**

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной C (включая $C = \pm\infty$), является частным.

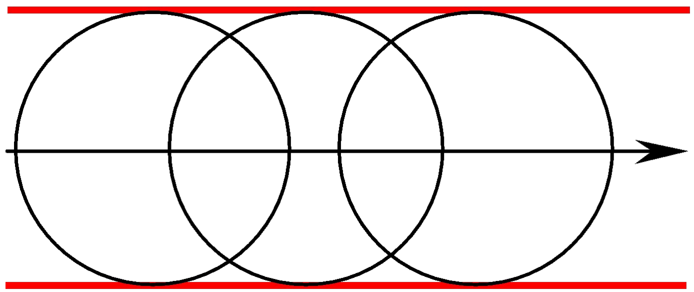
Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения.

Особое решение всегда «теряется» в процессе интегрирования и обладает тем свойством, что оно может быть включено в общее решение, если допустить $C = C(x)$.

С геометрической точки зрения особая интегральная кривая является огибающей семейства интегральных кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линия ℓ называется* ***огибающей*** *однопараметрического семейства кривых, если она в каждой своей точке касается одной кривой семейства, причем в различных точках она касается различных кривых.*

ПРИМЕР. Прямые $y = \pm R$ являются огибающими семейства окружностей $(x + C)^2 + y^2 = R^2$.



§3. Уравнения с разделенными переменными

ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно y', имеет две формы записи:

1) обычную, т.е. $y' = f(x,y)$,

2) ***дифференциальную***, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ . \qquad (3)$$

При этом, если уравнение записано в виде (3), то обычно предполагают, что переменные x и y равноправны.

Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$f(x)dx + \phi(y)dy = 0 \ , \qquad (4)$$

где $f(x)$ и $\phi(y)$ – непрерывные функции.

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$,
$\Phi(y)$ – первообразная функции $\phi(y)$.

Тогда общий интеграл уравнения (4) имеет вид:

$$F(x) + \Phi(y) = C\,,$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. В теории дифференциальных уравнений символом

$$\int f(x)dx$$

принято обозначать ОДНУ из первообразных функции $f(x)$ (а не все множество первообразных, как это принято в других разделах математического анализа).

Поэтому общий интеграл уравнения (4) принято записывать в виде:

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C\,,$$

где C – произвольная постоянная.

§4. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$f_1(x) \cdot \phi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \phi_2(y)dy = 0$, (5)

где $f_1(x), f_2(x), \phi_1(y), \phi_2(y)$ – непрерывные функции.

Разделим обе части уравнения на $\phi_1(y) \cdot f_2(x)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$

$\Rightarrow$ Общий интеграл уравнения (5) имеет вид:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C.$$

Замечания.

1) Деление на $\phi_1(y) \cdot f_2(x)$ может привести к потере решений. Поэтому чтобы получить полное решение, необходимо рассмотреть корни уравнений $\phi_1(y) = 0$, $f_2(x) = 0$.

2) Обычная форма дифференциального уравнения с разделяющимися переменными имеет вид:

$$y' = f(x) \cdot \phi(y) .$$

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(ax + by + c) , \qquad (6)$$

где a , b и c – некоторые числа.

Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x) = ax + by + c$ и его общий интеграл имеет вид:

$$\int \frac{dz}{bf(z) + a} = x + C .$$

§5. Однородные уравнения

Функция $M(x\,,y)$ называется ***однородной степени m*** (или ***измерения m***), если $\forall\, t \neq 0$ справедливо равенство

$$M(tx\,,ty) = t^m \cdot M(x\,,y)\,.$$

ПРИМЕРЫ однородных функций:

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 y\,, \qquad f(x,y) = \sqrt[4]{x^8 + y^8}\,,$$

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}\,, \qquad f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}\,,$$

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y} + \ln y - \ln x\,.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется ***однородным*** *относительно* x *и* y, *если функция* $f(x, y)$ *является однородной нулевой степени.*

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – *однородные функции одного и того же измерения.*

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$z(x) = \frac{y}{x}$$

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью замены

$$\frac{x}{y} = z(y)$$

§6. Уравнения, приводящиеся к однородным

1. Уравнения вида $$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

Рассмотрим уравнение (7) $$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (7) будет однородным, т.к.

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда уравнение (7) заменой переменных приводится либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному.

Это зависит от определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

а) ***Если*** $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$, ***то*** (7) ***приводится к однородному уравнению***.

Действительно, если $\Delta \neq 0$, то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = \alpha$, $y = \beta$.

Сделаем в (7) замену переменных: $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$.

Тогда: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt}; \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t+\alpha) + b_1(z+\beta) + c_1}{a_2(t+\alpha) + b_2(z+\beta) + c_2} \right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2 t + b_2 z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)} \right), \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z} \right).$$

б) ***Если*** $\mathbf{\Delta = 0}$, ***то уравнение*** (7) ***приводится к уравнению с разделяющимися переменными***.

Действительно, если $\mathbf{\Delta = 0}$, то строки определителя $\mathbf{\Delta}$ пропорциональны,

т.е. $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$.

Тогда

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \phi(a_1 x + b_1 y) .$$

Это уравнение (6) (см. §4). Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$z(x) = a_1 x + b_1 y .$$

2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение 1-*го порядка называется* ***обобщённо однородным***, *если существует такое рациональное число* α, *что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени т относительно* x, y, y' (относительно x, y, dx, dy), *если считать* x – *величиной измерения* 1, y – *величиной измерения* α, $y'(dy)$ – *величиной измерения* α – 1, dx – *величиной измерения* 0.

Иначе говоря, уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ – обобщенно однородное, если $\exists\,\alpha \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$P(tx, t^\alpha y)dx + Q(tx, t^\alpha y)\cdot(t^{\alpha-1}dy) = t^m\cdot[\,P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,].$$

Обобщенно однородное уравнение приводится к однородному уравнению заменой $y = z^\alpha$.

Обобщенно однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = zx^\alpha$.

§7. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка *называется ДУ 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y'.*

⇒ В общем случае линейное уравнение 1-го порядка можно записать в виде $y' + p(x) \cdot y = f(x)$,(8)

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***.
В противном случае уравнение называется ***неоднородным***.

Линейное однородное уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными.
Его общее решение:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad \forall C. \qquad (9)$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (8):

$$y' + p(x) \cdot y = f(x). \qquad (8)$$

Существуют два метода его интегрирования.

I) ***Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)***

1) Интегрируем однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$, соответствующее данному неоднородному уравнению.
Его общее решение имеет вид (9):

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

2) Полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения.

⇒ Оно имеет вид

$$y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Функцию $C(x)$ найдем, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (8).

Получим:

$$C(x) = \int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид:

(10)
$$y(x) = \left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Замечания.

1) Раскроем скобки в (10):

$$y(x) = C\cdot e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\cdot\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (11)$$

Заметим, что первое слагаемое в (11) – общее решение линейного однородного уравнения, а второе – частное решение линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C = 0$).

2) Так как $e^x \neq 0$, то любую функцию $y(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = \frac{y(x)}{e^x}\cdot e^x.$$

Это является основанием метода вариации постоянной.

II) *Метод Бернулли.*

Будем искать решение (8) в следующем виде:

$$y = u(x) \cdot v(x)\ .$$

Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Подставим y и y' в уравнение (8) и получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + puv = f(x)$$

или $u' \cdot v + u \cdot [\, v' + pv \,] = f(x)$.

Полагаем, что функция $v(x)$ такова, что

$$\left.\begin{array}{l} [\, v' + pv \,] = 0\ . \\ \text{Тогда} \quad u' \cdot v = f(x)\ . \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Условия (12) позволяют однозначно определить $v(x)$ и $u(x)$. При этом получим

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Замечание. Линейное неоднордное уравнение вида

$$y' + a \cdot y = b$$

проще интегрировать как уравнение с разделяющимися переменными

§8. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n, \quad (13)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции,

$n \neq 0$, $n \neq 1$ (иначе это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого надо

1) обе части уравнения (13) разделить на y^n,

2) сделать замену $z = y^{1-n}$.

Замечания.

1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x)\cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^{n-1}} = u(x)\cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1} = \frac{1}{u(x)}\cdot\frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot\left(\frac{1}{v(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \tilde{u}(x)\cdot\tilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.

§9. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (14)

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е. если

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y) .$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $u(x,y) = C$.

⇒ Задачи:

1) научиться определять, когда выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

является полным дифференциалом;

2) научиться находить функцию $u(x,y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 2.

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ *определены и непрерывны в области* D *плоскости* xOy *и имеют в ней непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* D *выполнялось условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Способы нахождения функции $u(x, y)$:

1) используя алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 2;
2) используя одну из следующих формул:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} \underbrace{N(x, y)}_{x - const}dy$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{M(x, y)}_{y - const}dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy$$

где (x_0, y_0) – любая точка области D непрерывности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$.

3) методом ***интегрируемых комбинаций***.

Суть метода интегрируемых комбинаций: выделить в

$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy$$

выражения, являющиеся дифференциалами известных функций («***интегрируемые комбинации***») и привести его таким образом к виду $du(x\,,y)$.

ПРИМЕРЫ интегрируемых комбинаций:

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln|x|\right),$$

$$xdy + ydx = d(xy), \qquad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

§10. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x,y)$ *называется* ***интегрирующим множителем*** *уравнения* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$ (14)
если после его умножения на $\mu(x,y)$ *левая часть уравнения становится полным дифференциалом некоторой функции.*

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ТЕОРЕМА 3 (о существовании интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$).

Пусть

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi, \qquad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\psi.$$

1) *Если* $\phi=\phi(x)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(x)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\varphi(x);$$

2) *Если* $\psi=\psi(y)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(y)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\psi(y).$$