Глава 1. Дифференциальные уравнения

Тема 2. Дифференциальные уравнения высших порядков

§1. Основные понятия и определения
§2. Уравнения, допускающие понижение порядка
§3. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Общие понятия и определения
§4. Линейные однородные уравнения n-го порядка
§5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами
§6. Уравнения Эйлера
§7. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами
§8. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных
§9. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

§1. Основные понятия и определения

Дифференциальными уравнениями высшего порядка *называют уравнения порядка выше первого.*

В общем случае ДУ высшего порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где $n > 1$.

Замечание. Функция F может и не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

ДУ высшего порядка, которое можно записать в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

называют ***уравнением, разрешенным относительно старшей производной***.

ДУ порядка n имеет множество решений (интегралов).

Чтобы выбрать одно из них, задают n условий, которым должно удовлетворять искомое решение.

Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до порядка $n-1$ включительно при некотором значении аргумента $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_{01}\,,\ y''(x_0) = y_{02}\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}\,. \quad (3)$$

Совокупность условий (3) называется ***начальными условиями*** для дифференциального уравнения n-го порядка.

Нахождение решения уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3), называется решением ***задачи Коши*** для этого уравнения.

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

выполняются два условия:

1) *функция* $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ *непрерывна как функция* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства*;

2) *функция* $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ *имеет в этой области* D *ограниченные частные производные по переменным* $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n-1}) \in D$ *существует, и притом единственное, решение* $y = \phi(x)$ *уравнения* (2), *определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$\phi(x_0) = y_0, \phi'(x_0) = y_{01}, \phi''(x_0) = y_{02}, \ \ldots, \ \phi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Замечание. Единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка $(n > 1)$ НЕ ОЗНАЧАЕТ, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy проходит одна интегральная кривая $y = \phi(x)$.

Кривых через точку M_0 проходит множество, а единственность означает, что они различаются набором значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$.

Из теоремы 1 $\Rightarrow$

1) ДУ (2) имеет множество решений.

2) Совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* $y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ (2)

в области D существования и единственности решения задачи Коши называется функция

$$y=\phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любых допустимых значениях* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *она удовлетворяет уравнению* (2);

2) *каковы бы ни были начальные условия*

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_{01}, y''(x_0)=y_{02}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{0n-1} \quad (3)$$

(*где* $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n-1}) \in D$), *можно найти единственный набор значений* $C_1=C_{01}, C_2=C_{02}, \ldots, C_n=C_{0n}$ *такой, что функция* $y=\phi(x, C_{01}, C_{02}, \ldots, C_{0n})$ *удовлетворяет заданным начальным условиям.*

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения*.**

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (2) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от n параметров.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***.

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных C_i (включая $C_i = \pm\infty$), является частным.

Решение (интеграл), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется ***особым***.

Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения.

§2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнение вида $F(x,y^{(n)}) = 0$

Возможны 2 случая:
1) уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$,
2) уравнение нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$.

1) Пусть уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$y^{(n)} = f(x)$, (4)

где $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$.

Общее решение уравнения (4) получается в результате n-кратного последовательного интегрирования правой части, т.е. имеет вид:

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} \cdot x + C_n .$$

2) Пусть уравнение $F(x,y^{(n)}) = 0$ не разрешено относительно $y^{(n)}$.

Если уравнение допускает параметрическое представление

$$x = \phi(t)\ , \qquad y^{(n)} = \psi(t)\ ,$$

то его решение можно найти в параметрическом виде.

Действительно,

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} \qquad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)} \cdot dx\ ;$$

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= \psi(t) \\ dx &= \phi'(t)dt \end{aligned}\right] \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \int \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$$

Аналогично найдем $y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \dots y', y$ и получим общее решение

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

2. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка (k – 1) включительно

Пусть уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0\,, \qquad (1 \le k < n)\,. \quad (5)$$

Уравнение (5) допускает понижение порядка на k единиц.

Действительно, сделаем замену $y^{(k)} = z(x)$.

Тогда $y^{(k+1)} = z'(x)\,,\quad y^{(k+2)} = z''(x)\,,\quad \dots,\quad y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$

и уравнение примет вид

$$F(x\,, z\,, z'\,, \dots, z^{(n-k)}) = 0\,.(5_1)$$

Пусть $z = \phi(x\,, C_1\,, C_2\,, \dots, C_{n-k})$ – общее решение (5_1).

Тогда $y^{(k)} = \phi(x\,, C_1\,, C_2\,, \dots, C_{n-k})\,.$

$\Rightarrow$ общее решение уравнения (5) получается k-кратным интегрированием функции $\phi(x\,, C_1\,, C_2\,, \dots, C_{n-k})\,.$

3. Уравнение не содержит независимой переменной

Пусть уравнение имеет вид $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, (6)

Уравнение (6) допускает понижение порядка на единицу.

Действительно, сделаем замену $y' = z(y)$.

Тогда $y'' = z' \cdot z$,

$$y''' = z'' \cdot z^2 + (z')^2 \cdot z,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = \omega(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}).$$

Подставляя эти выражения в (5), получаем уравнение $(n-1)$-го порядка.

Пусть $z = \phi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ – общее решение получившегося после замены уравнения.

Тогда $y' = \phi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = dx.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (6) будет иметь вид

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C.$$

4. Уравнение, однородное относительно неизвестной функции и ее производных

Уравнение $F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0$

называется ***однородным относительно*** $\boldsymbol{y, y', y'', \ldots, y^{(n)}}$, *если при всех* $t \neq 0$ *выполняется тождество*

$$F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) .$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу заменой $y' = yz$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

§3. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Общие понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*** *называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции* y *и ее производных* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, т. е. уравнение вида

$$p_0(x) \cdot y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) \cdot y' + p_n(x) \cdot y = g(x), \quad (7)$$

где $p_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и $g(x)$ – заданные функции.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (7) называется ***линейным однородным***.

Если $g(x) \not\equiv 0$, то уравнение (7) называется ***линейным неоднородным*** (или ***уравнением с правой частью***).

Так как $p_0(x) \not\equiv 0$, то уравнение (7) можно записать в виде:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) . \qquad (8)$$

Уравнение (8) называют ***приведенным***.

В дальнейшем будем работать только с приведенным уравнением.

Кроме того, будем предполагать, что $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a;b]$.

Тогда в области

$$D = \{(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \mid \forall x \in [a;b] , \ \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

для уравнения (8) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения.

Следовательно, $\forall x_0 \in [a;b]$ и $\forall y_0 , y_{0i} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения (8), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0 , y'(x_0) = y_{01} , y''(x_0) = y_{02} , \ \ldots , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} .$$

§4. Линейные однородные уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) порядка n, т.е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 . \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 1 (свойство решений ЛОДУ).

Если $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *являются решениями ЛОДУ* (9), *то*

$$y_1(x) + y_2(x) \ \text{и} \ C \cdot y_1(x) \ \ (\forall C \in \mathbb{R})$$

тоже является решениями уравнения (9).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – *решения уравнения* (9), *то их линейная комбинация*

$$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n$$

тоже является решением уравнения (9) *для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Обозначим: $S[a;b]$ – множество решений уравнения (9),
$C[a;b]$ – множество функций, непрерывных на $[a;b]$.

Имеем: $S[a;b] \subset C[a;b]$,

Из теоремы 1 $\Rightarrow$ $S[a;b]$ – линейное подпространство $C[a;b]$

ЗАДАЧА. Изучить $S[a;b]$ как линейное пространство.

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ – $(n-1)$ раз дифференцируемые на $[a;b]$ функции.

Запишем для них определитель порядка n вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Определитель W – функция, определенная на $[a;b]$.

Его обозначают $W(x)$ или $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ и называют ***определителем Вронского*** (***вронскианом***) функций $y_1, y_2, \dots, y_n$.

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие линейной зависимости функций).

Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ $n-1$ раз дифференцируемы и линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю.

ТЕОРЕМА 4 (достаточное условие линейной независимости решений ЛОДУ).

Если n решений ЛОДУ (9) линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.

СЛЕДСТВИЕ 5 (теоремы 3 и 4).

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ *решения ЛОДУ* (9). *Тогда*

1) *либо* $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv 0$ *и это означает, что решения линейно зависимы*;

2) *либо* $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$, *и это означает, что решения линейно независимы*.

ТЕОРЕМА 6 (о размерности пространства решений ЛОДУ).

Пространство решений $S[a;b]$ *ЛОДУ* (9) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком дифференциального уравнения, т.е.* $\dim S[a;b] = n$.

Система n линейно независимых решений ЛОДУ n-го порядка (базис пространства $S[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений*** (фср).

§5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0\,, \quad (10)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Уравнение (10) называется ***линейным однородным уравнением n–го порядка с постоянными коэффициентами*.**

Решения уравнения (10) будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторая постоянная.

Имеем:

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}\,, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}\,, \quad y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}\,, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}\,.$$

Подставляем $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (10) и получаем:

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0\,,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0\,. \quad (11)$$

Уравнение (11) называется ***характеристическим уравнением*** (для) уравнения (10).

Многочлен в левой части (11) называется ***характеристическим многочленом***,

Корни уравнения (11) называются ***характеристическими корнями*** уравнения (10).

Замечания.

1) Формально характеристическое уравнение (11) получается из (10) заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

2) Уравнение (10) – алгебраическое уравнение n-й степени.
$\Rightarrow$ оно имеет n корней, но

1) каждый корень считается столько раз, какова его кратность; 2) корни могут быть комплексными (причем, комплексные корни попарно сопряжены).

Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю ф.с.р. уравнения (10).

ТЕОРЕМА 6.

Пусть λ – *характеристический корень уравнения* (10). *Тогда*

1) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ – *простой корень уравнения* (11), *то решением уравнения* (10) *является функция* $e^{\lambda x}$;

2) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ – *корень кратности* k *уравнения* (11), *то решениями уравнения* (10) *являются функции*

$$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, x^2 \cdot e^{\lambda x}, \ \ldots, \ x^{k-1} \cdot e^{\lambda x};$$

3) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ – *простой корень уравнения* (11), *то* $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является простым корнем уравнения* (11), *а решениями уравнения* (10) *являются функции*

$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x;$$

4) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ – *корень кратности* k *уравнения* (11), *то* $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является корнем кратности* k *уравнения* (11), *а решениями* (10) *являются функции*

$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$$

$$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x.$$

Решения, относящиеся к различным характеристическим корням, линейно независимы и найденные таким образом n решений уравнения (10) *будут образовывать его ф.с.р.*

ПРИМЕР 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$$

ПРИМЕР 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$$

ПРИМЕР 3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$$

§6. Уравнения Эйлера

Линейное однородное уравнение вида

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_1 x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x \cdot y' + a_n \cdot y = 0\,, \qquad (12)$$

(где $a_i \in \mathbb{R}$) называется ***уравнением Эйлера***.

Уравнение Эйлера сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами заменой $x = e^t$.

$\Rightarrow$ фундаментальная система решений уравнения (12) состоит из функций вида

$$x^\lambda \leftrightarrow e^{\lambda t}\,;$$

$$\ln^\ell x \cdot x^\lambda \leftrightarrow t^\ell \cdot e^{\lambda t}\,;$$

$$x^\alpha \cdot \cos(\beta \ln x)\,,\ x^\alpha \cdot \sin(\beta \ln x) \leftrightarrow e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t\,,\ e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t\,;$$

$$\ln^\ell x \cdot x^\alpha \cos(\beta \ln x),\ \ln^\ell x \cdot x^\alpha \sin(\beta \ln x) \leftrightarrow t^\ell e^{\alpha t} \cos\beta t,\ t^\ell e^{\alpha t} \sin\beta t\,.$$

Замечание. На практике, при интегрировании уравнения Эйлера, можно сразу записать его характеристическое уравнение.

Действительно, характеристическое уравнение – это условие для λ, при котором $e^{\lambda t}$ является решением ЛОДУ.

Но $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$. Следовательно, то же самое условие для λ получится, если потребовать, чтобы функция $y = x^{\lambda}$ являлась решением уравнения (12).

§7. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0\,. \quad (13)$$

Пусть $y_1(x)$ любое ненулевое решение уравнения (13).
Тогда его общее решение можно найти по формуле Абеля:

$$y = y_1 u = y_1\cdot\left(\int\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx + C_2\right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$,

если известно, что его решением является функция

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

§8. Линейные неоднородные уравнения *n*-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f(x)\,. \quad (14)$$

Если известно общее решение соответствующего ЛОДУ

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = 0\,, \quad (15)$$

то можно найти и общее решение ЛНДУ (14).

Действительно, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ф.с.р. уравнения (15). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y = C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y_2 + \ldots + C_n\cdot y_n\,, \quad (16)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что РЕШЕНИЕ ЛНДУ ПО СТРУКТУРЕ совпадает с решением соответствующего ЛОДУ, т.е. имеет вид

$$y = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2 + \ldots + C_n(x)\cdot y_n\,, \quad (17)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые функции.

Потребуем, чтобы производные y', y'', …, $y^{(n-1)}$ функции (17) структурно совпадали с производными функции (16), т.е. чтобы они получались из соответствующих производных функции (16) заменой констант C_i функциями $C_i(x)$.

Получили, что $C_1(x)$, $C_2(x)$, … , $C_n(x)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \cdots + C_n'(x)y_n'' = 0, \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (18)$$

(18) – система n линейных уравнений с n неизвестными.
Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

Так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют ф.с.р. однородного уравнения, то по теореме 4 §4 $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]$.

$\Rightarrow$ система (18) совместна и имеет единственное решение:

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + \tilde{C}_i,$$

где $\tilde{C}_i$ – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

(19)
$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \tilde{C}_i\right) y_i .$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

§9. Линейные неоднородные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Раскроем скобки в (19) и сгруппируем слагаемые:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \tilde{C}_i\right) y_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y_i .$$

Первая сумма – общее решение соответствующего ЛОДУ, вторая сумма – частное решение ЛНДУ (получается из общего решения при $\tilde{C}_i = 0$).

ТЕОРЕМА 7 (О структуре общего решения ЛНДУ).

Общее решение ЛНДУ n–го порядка равно сумме общего решения соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения, т.е. имеет вид

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x) , \qquad (20)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ф.с.р. соответствующего ЛОДУ.

Пусть правая часть $f(x)$ ЛНДУ с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_s(x) \cdot \cos\beta x + P_k(x) \cdot \sin\beta x], \quad (21)$$

где $P_s(x)$, $P_k(x)$ – многочлены степени s и k соответственно, α и β – некоторые числа.

Функцию (21) принято называть ***функцией специального вида***.

ТЕОРЕМА 8 (о структуре частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой часть специального вида).

Если правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид (21), *то частным решением уравнения является функция вида*

$$\bar{y} = x^{\ell} \cdot e^{\alpha x} \cdot [R_m(x) \cdot \cos\beta x + T_m(x) \cdot \sin\beta x], \quad (22)$$

где $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ *–многочлены степени* m (неизвестные),

m *– большая из степеней многочленов* $P_s(x)$, $P_k(x)$,

ℓ *– кратность характеристического корня* $\alpha \pm \beta i$

($\ell = 0$, *если* $\alpha \pm \beta i$ *не характеристический корень*).

ПРИМЕРЫ. Записать структуру частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами, если его правая часть $f(x)$ имеет вид:

1) $f(x) = P_s(x)$;

2) $f(x) = a \cdot e^{\alpha x}$, где a – число;

3) $f(x) = P_s(x) \cdot e^{\alpha x}$;

4) $f(x) = a \cdot \cos\beta x + b \cdot \sin\beta x$, где a,b – числа;

5) $f(x) = a \cdot \cos\beta x$ (или $f(x) = a \cdot \sin\beta x$)

6) $f(x) = P_s(x) \cdot \cos\beta x + P_k(x) \cdot \sin\beta x$;

7) $f(x) = a \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + b \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$.

ТЕОРЕМА 9 (о наложении решений).

Если $\bar{y}_1(x)$ *и* $\bar{y}_2(x)$ – *решения соответственно уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_2(x),$$

то функция

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$$

будет являться решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_1(x) + f_2(x).$$