Математический анализ

Лекция -5(ю)

Дифференциал функции

Повтор лекции 2

Предел функции

Определение Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c), содержащий точку a.

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a.

Определение Пусть $\varepsilon > 0$, ε-окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Проколотой ε-окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε-окрестность, из которой исключена сама точка a. Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon).$$

Определение (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

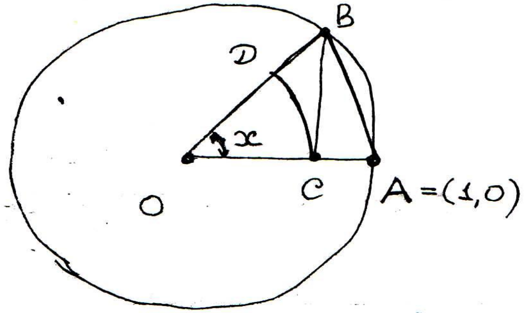
Здесь принятые обозначения $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена

Пример : $f(x) = \sqrt[3]{x}\ \sin\frac{1}{x}$ в точке x = 0 не определена , но $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Первый замечательный предел

Рассмотрим окружность единичного радиуса. x – центральный угол. $0 < x < \pi/2$



$$|OA| = |OB| = 1$$

$$S_{\measuredangle OCD} < S_{\triangle OAB} < S_{\measuredangle OAB}$$

$$S_{\measuredangle OCD} = \frac{\pi |OC|^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2} \cdot \cos^2 x$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \sin x$$

$$S_{\measuredangle OAB} = \frac{\pi |OA|^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} \cos^2 x < \frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} \\ \text{т.к. } 0 < x \Rightarrow \\ \cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \end{array} \right.$$

т.к. ф-ии чётные, это верно при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \sin x = 0}$$

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1 \Rightarrow |\sin x| < |x|$$

$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$\forall \varepsilon > 0$

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - 0| = |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ | первый замечательный предел.

Перейдём к пределу при $x \to 0$ в нер-ве $1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$$\lim (1 - \sin^2 x) = 1 - \lim \sin x \cdot \lim \sin x = 1 \Rightarrow 1 \le \lim \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Второй замечательный предел.

Теорема. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

- Теорема. Послед. $\{x_n\}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ сходится.

Док-во.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\} =$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

При этом $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ <u>возрастает</u> и она <u>ограничена :</u>

$$x_n < 2+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

следовательно $2 < x_n < 3\,,\quad n\to\infty$

список функций, эквивалентных x при $x \to 0$:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim$$

$$\sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0).$$

Замечани Заменять б.м. на эквивалентные им в суммах и разностях, вообще говоря, нельзя.

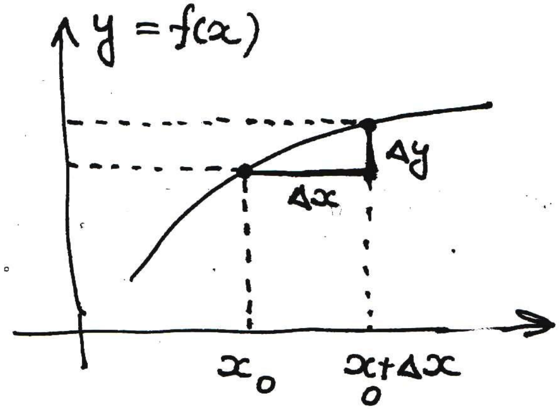
Пример. $A = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$.

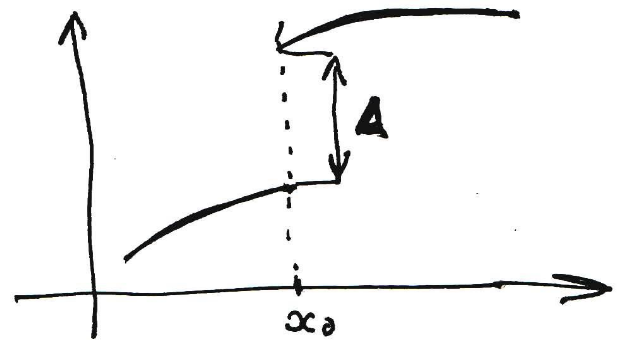
$\ln(1+x) \sim x$
$\ln(1-x) \sim -x$ $\quad x \to 0$

Если заменить, то $A = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - x}{x^2} = 0$, н

$A = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$

Непрерывность функции





$\Delta f = \Delta_{\mathbf{f}(} = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ | прираш. ф. в точке x_0

Определение. Функция $f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Подробно: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

$x_0 + \Delta x = x \to x_0$ при $\Delta x \to 0$

Следствие. Если $y=f(x)$ непр. в т. x_0, а $g(y)$ непр. в т. $y_0=f(x_0)$, то

10 $$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

Док. В силу непр-ти $f(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, в силу непр-ти сл. функции $g(f(x))$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$.

Следовательно, для непрерывных функций операция предельного перехода перестановочна с операциями по вычислению значения функции в соответствующей точке. Теорема 10 позволяет при вычислении предела сложной непрерывной функции удобно чередовать эти операции.

Примеры непрерывных функций.

1 . $y = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$

$\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y(x_0) = C$ | $\Delta y = 0 \Rightarrow$
$\Delta y \to 0,\ \Delta x \to 0$

5 $y = \sin x$ непр. $\forall x_0 \in R$ | $y = \cos x$ – для произв.

$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x) - \sin x| = \left|2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le$

$\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \Rightarrow \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$

2 $y = x$ непр. $\forall x \in R$

$\Delta y = \Delta x \Rightarrow \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$

3 $y = x^n$ непрерывна как произведение непр. функций.

4 Многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
непрерывен как сумма произведений непр. ф-ций.

.

Определение 21. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке выполняется соотношение

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это определение предъявляет к функции следующие требования:

а) функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0;

б) функция $f(x)$ должна иметь предел в точке x_0;

в) этот предел должен совпадать со значением функции $f(x)$ в этой точке.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0, а сама точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Точка разрыва первого рода – существование обоих односторонних конечных пределов

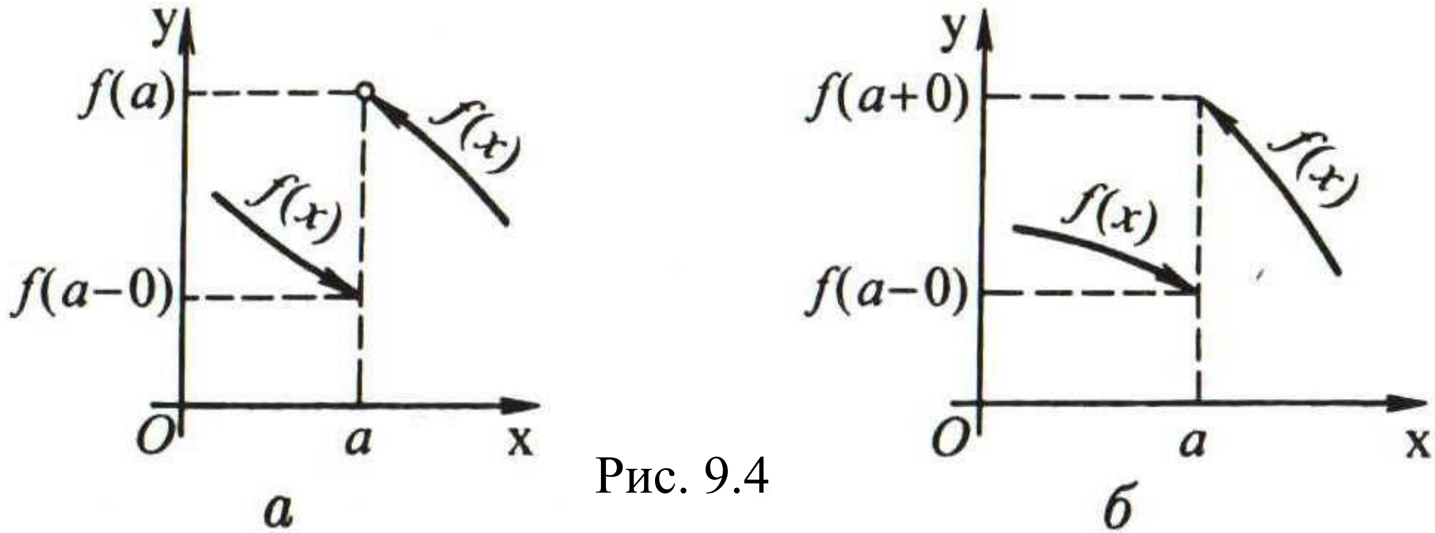


Рис. 9.4

Определение 9.7. ***Точкой разрыва первого рода*** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

Итак, для точки разрыва первого рода выполнено, по крайней мере, условие 2 непрерывности функции в точке (рис. 9.4). Разность $f(a+0)-f(a-0)$ конечна, и ее называют ***скачком функции*** в точке разрыва первого рода, а про функцию иногда говорят, что она терпит разрыв с конечным скачком. ~~Если~~

Продолжение.

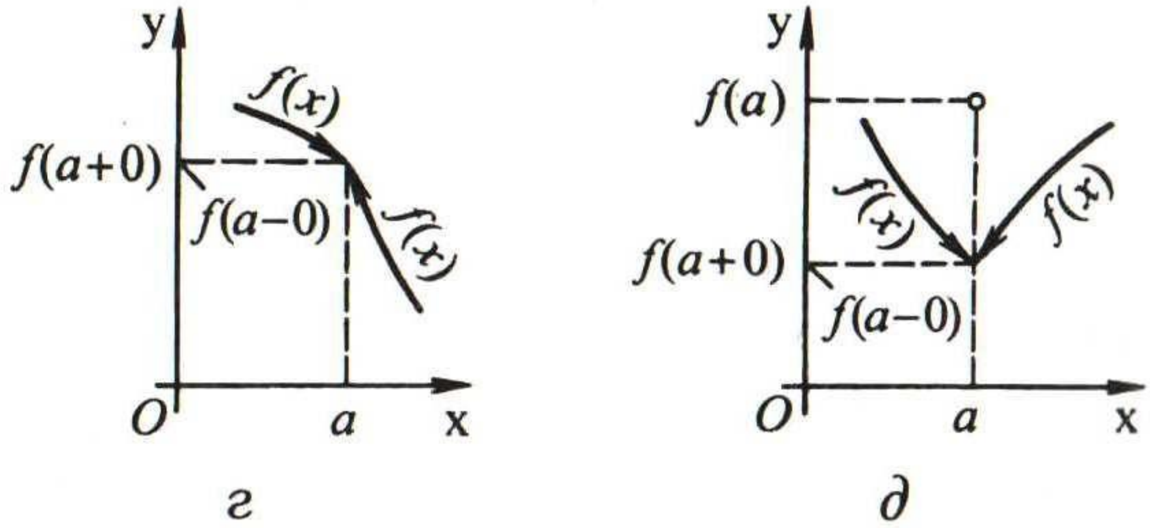


Рис. 9.4

Если скачок равен нулю (см. рис. 9.4, *г* и *д*), т.е. в точке a выполнено еще и условие 3 непрерывности функции, а поэтому существует конечный предел функции в этой точке, то имеем ***точку устранимого разрыва***. Если в этом случае для функции $g(x)$, совпадающей в некоторой проколотой окрестности точки a с $f(x)$, положить $g(a) = f(a+0) = f(a-0)$, то $g(x)$ будет непрерывна в точке a, поскольку все условия 1–4 непрерывности функции в точке a будут выполнены. Про возможность введения такой непрерывной функции $g(x)$ говорят, что разрыв непрерывности $f(x)$ в точке a можно устранить.

Определение 9.8. ***Точкой разрыва второго рода*** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен или не существует.

Примеры

Пример 81. Функция $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, поскольку $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(+0) = \frac{\pi}{2}$.

Пример 82. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, однако имеет в этой точке предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Следовательно, $x = 0$ — точка устранимого разрыва функции $f(x)$. После доопределения $f(0) = 1$ функция $f(x)$ станет непрерывной в этой точке.

Пример 83. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку $f(-0) = f(+0) = +\infty$.

Пример 84. Функция $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку $f(+0) = +\infty$. Заметим, что $f(-0) = 0$.

Асимптоты

Определение. Прямая $x = a$ наз. вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Пример. Прямая $x = 0$ – вертик. асимптота графиков $y = \frac{1}{x}$, $y = \ln x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Определение. Прямая $y = kx + b$ наз. (двусторонней) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

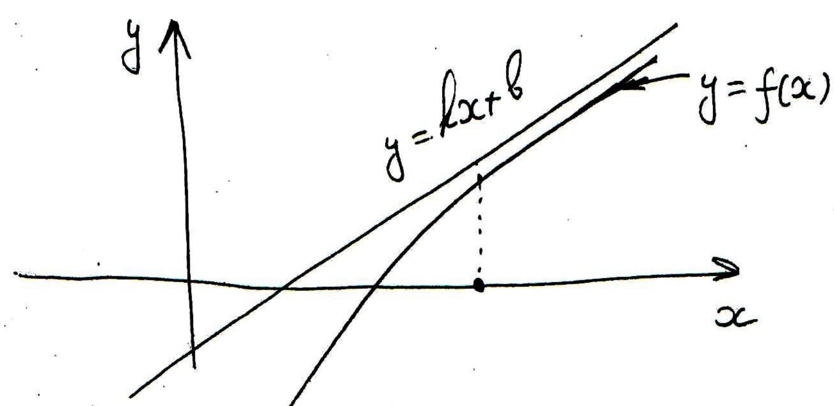
$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty$$

иначе, $\lim\limits_{x \to \infty} \{ f(x) - (kx + b) \} = 0$

Если этот предел существует только при:
$x \to -\infty$, то асимптота наз. левосторонней,
$x \to +\infty$, — правосторонней.

односторонние асимптоты.

При $k = 0$ асимптота наз. горизонтальной.



Теорема. Прямая $y = kx + b$ является двусторонней тогда асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только когда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b$$

Док-во. Пусть $y = kx + b$ – асимптота, тогда

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0, \ x \to \infty \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \longrightarrow k, \quad x \to \infty$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \longrightarrow b, \quad x \to \infty$$

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b \quad \Rightarrow$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0, \ x \to \infty$$

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad y = kx + b \text{ – асимптота.} \ \blacktriangleright$$

Замечание. Для существования асимптоты достаточно лишь $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b$.

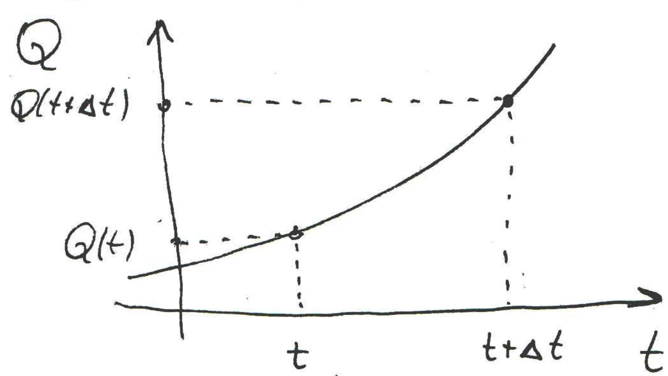
Производная функции

В основе дифференциального исчисления лежат фундаментальные понятия *производной* и *дифференциала функции в точке*. Термин „производная" был введен Ж. Лагранжем в 1797 г., тогда как термин „дифференциал" Г. Лейбниц использовал уже начиная с 1675 г. Но прежде чем говорить о производной и дифференциале, целесообразно предварительно рассмотреть отношение приращения функции к приращению ее аргумента.

Понятие производной

Пусть величина $Q = Q(t)$ изменяется во времени

За время от t до $t+\Delta t$ величина Q получит приращение $\Delta Q = Q(t+\Delta t) - Q(t)$



Как быстро меняется $Q(t)$

Какова скорость изменения

Средняя скорость изменения величины Q за время от t до $t+\Delta t$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Скорость изменения величины Q в момент времени t

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \dot{Q}(t)$$

Таким образом, приходим к важнейшему понятию :

<u>Определение.</u> Пусть ф. $f(x)$ определена в окр. т. x $U(x)$

Если существует предел

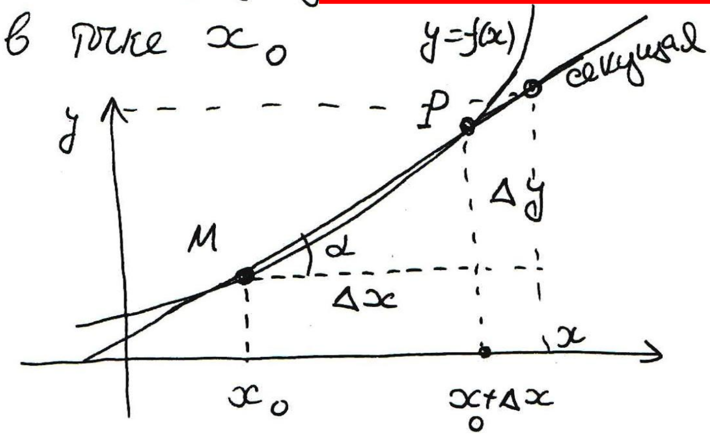
$$f'(x) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то он наз. <u>производной функции f в точке x</u>.

Наряду с обозначением производной $f'(x)$ использ. также: $\frac{df}{dx}(x)$, $\dot{f}(t)$

<u>Процедура вычисления производной наз. дифференцированием</u>

Рассм. задачу о касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0



Касательной наз. предельное положение секущей при $P \to M$

Ур-е секущей – ур-е прямой, проходящей через точку $M(x_0, f(x_0))$ с угловым коэфф. $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$k = f'(a)$$

Пусть (x, y) текущая точка секущей, где

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\alpha = k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0) \quad \Big|\ \text{ур-е секущей}$$

При $\Delta x \to 0$ $P \to M$ и ур-е секущей переходит

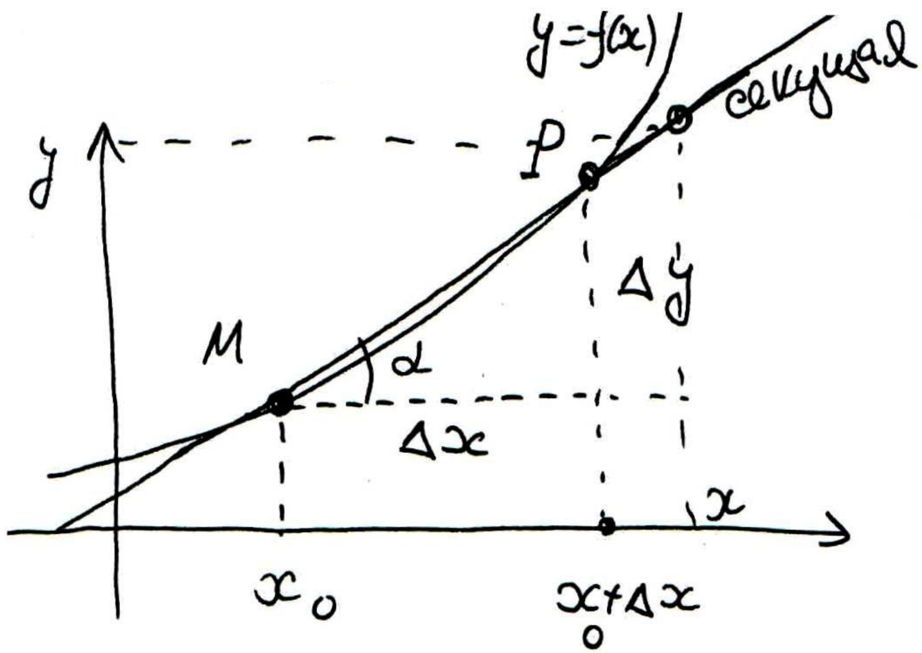
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \Big|\ \text{ур-е касательной}$$

19

Геометрический смысл производной

С геометрической точки зрения значение производной $f'(a)$ в данной точке $x = a$ равно *угловому коэффициенту касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$. Зная геометрический смысл производной, нетрудно написать уравнение касательной к плоской кривой $y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$, если касательная не параллельна оси Oy.

$$k = f'(a)$$



Основные правила дифференцирования

Теорема. Если функции u, v имеют конечные производные в т. x, то

а) $$\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x) + v'(x),$$

б) $$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

в) $$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

Док-во

а) $$\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

б) $$\Delta(uv) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= \left[u(x)+\Delta u\right]\left[v(x)+\Delta v\right] - u(x)v(x) = u(x)\Delta v + \Delta u\cdot v(x) + \Delta u\cdot\Delta v$$

$\lim \Delta u \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}$ | u-непр.

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + = u'(x)v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

в) $$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет произв. в т. x_0, а функция $z=g(y)$ имеет производную в т. $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $z(x)=g(f(x))$ имеет в т. x_0 производную $z'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Док-во.

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$\frac{g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))}{\Delta x}=\frac{g(f(x_0)+\Delta f)-g(f(x_0))}{\Delta f}\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0$

Производная обратной функции

Теорема 2.3. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет *конечную* и отличную от нуля *производную* $f'(a)$ и пусть, кроме того, для нее существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $y = b$, где $b = f(a)$. Тогда существует производная $g'(b)$ и она равна

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{2.18}$$

◀ Дадим значению $y = b$ приращение Δy. Тогда функция $x = g(y)$ тоже получит соответствующее приращение Δx.

Тогда

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}. \tag{2.19}$$

Если теперь $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$ ввиду непрерывности функции $x = g(y)$. Но тогда знаменатель в правой части (2.19) стремится к пределу $f'(a) \neq 0$, т.е. существует конечный предел правой части (2.19), равный $1/f'(a)$.

Производные элементарных функций.

1) $f(x) = C = const$

$\Delta f = C - C = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0 \Rightarrow C' = 0$

Следствие. Если $u = u(x)$, то $(Cu)' = Cu'$

2) $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$ (*)

$\Delta f = (x+\Delta x)^n - x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (\Delta x)^k - x^n =$

$= \cancel{C_n^0 x^n} + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + \dots \cancel{- x^n} = n x^{n-1} \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = n x^{n-1} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = n x^{n-1}$

3) $f(x) = \sin x$

$\Delta f = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2} \sin\frac{\Delta x}{2}$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2} \sin\frac{\Delta x}{2}}{2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = \cos x$ | непрерывность $\cos x$

4) $f(x) = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Док. аналогично 3)

---

*) $\Delta f = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right] \sim x^n n \frac{\Delta x}{x}$, $\Delta x \to 0$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = n x^{n-1}$ || $n = \alpha$

<u>Продолжение</u>

5) $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

6) $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

7) $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ — потом проверить отдельно

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \, \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

В частности, при $a = e$ $\quad (e^x)' = e^x$

Производная сложной функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет произв. в т. x_0, а функция $z=g(y)$ имеет производную в т. $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $z(x)=g(f(x))$ имеет в т. x_0 производную $z'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Док-во

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

$$\frac{g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))}{\Delta x}=\frac{g(f(x_0)+\Delta f)-g(f(x_0))}{\Delta f}\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0$

26

Таблица производных основных функций

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

II. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

III. $(\sin x)' = \cos x$.

IV. $(\cos x)' = -\sin x$.

V. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

VI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

VII. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

VIII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

IX. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

XI. $(a^x)' = a^x \ln a$.

XII. $(e^x)' = e^x$.

XIII. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

XIV. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$ $(x > 0,\ a > 0)$.

XV. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XVI. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XVII. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVIII. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{Arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

XX. $(\operatorname{Arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$.

XXI. $(\operatorname{Arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$.

XXII. $(\operatorname{Arcth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$ $(|x| > 1)$.

Дифференциал функции

Определение. Функция $y = f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. дифференцируемой в точке x_0, если

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0$$

Величина $A(x_0)\cdot\Delta x$ наз. дифференциалом функции f в точке x_0 и обознач. $df(x_0)$ или dy

Таким образом, $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$

т.е. дифференциал – это главная часть приращения при $\Delta x \to 0$, линейная относительно Δx.

Правила вычисления дифференциалов.

Теорема. Если функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы в т. x_0, то

1. $d(u+v) = du + dv$
2. $d(uv) = v\,du + u\,dv$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, $\quad v(x_0) \neq 0$

Док-во.

1. $d(u+v) = (u+v)'dx = (u'+v')dx = u'dx + v'dx = du + dv$
2. $d(uv) = (uv)'dx = (u'v+uv')dx = v(u'dx) + u(v'dx) = v\,du + u\,dv$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u'v-uv'}{v^2}dx = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

Следствие. $d(Cu) = C\,du$, $C = const$.

Экстремум функции

Основные теоремы дифференциального исчисления

Определение. Функция $y=f(x)$ имеет в т. x_0 :

а) локальный минимум, если $f(x_0)\le f(x)$ $\quad\forall x\in \overline{U}(x_0)$.

б) локальный максимум, если $f(x_0)\ge f(x)$ $\quad\forall x\in \overline{U}(x_0)$

Если неравенства строгие, то говорят о строгом минимуме или максимуме

Обобщённое название — локальный экстремум. (строгий экстремум)

· **Теорема (Ферма).** Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке её локального экстремума x_0, то $f'(x_0)=0$,

Док-во. Пусть ф. $y=f(x)$ имеет в т. x_0 лок. минимум $\Rightarrow$

$$\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta) \qquad f(x)-f(x_0)\ge 0$$

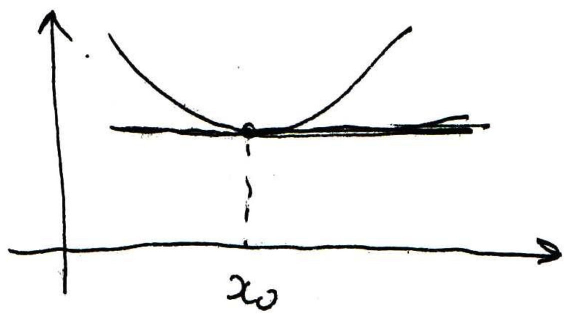
$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$$

док-во аналогичн
если $f(x_0)$ – лок. мак

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0) \quad\Rightarrow\quad f'(x_0)=0$$

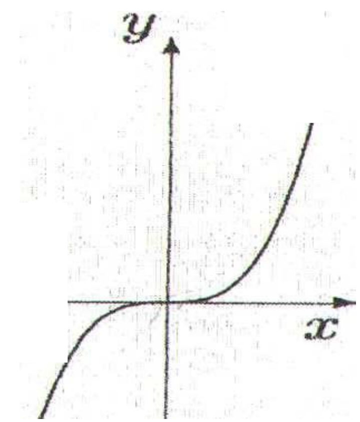
Замечание. 1)



касательная к графику ф. $y = f(x)$ горизонтальна

2) необх., но не достаточное условие лок. экстремума

например, $y = x^3$, $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$



нет локального экстремума!

2

Теорема 5.2 (Ролля). Если функция $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) *дифференцируема в интервале* (a, b);
3) на концах отрезка принимает равные значения $(f(a) = f(b))$,

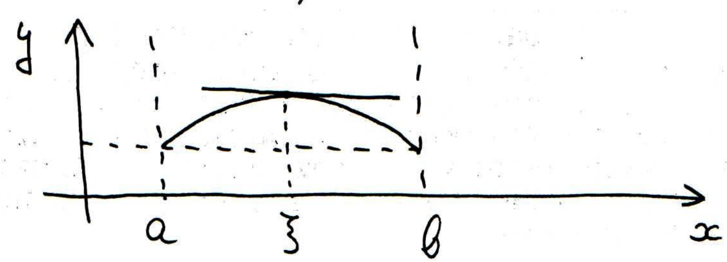
то между точками a и b найдется, по крайней мере, одна точка c $(a < c < b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Док-во. В силу непр-ти $f(x)$ на $[a, b]$ найдутся по 2-й т. Вейерштасса точки $c_1, c_2 \in [a, b]$: $f(c_1) = \min\limits_{[a,b]} f = m$, $f(c_2) = \max\limits_{[a,b]} f = M$

Если $m = M$, то $f(x) = const$ и $f'(\xi) = 0$ $\forall \xi \in (a, b)$

Если $m \neq M$, то $m < M \Leftrightarrow f(c_1) < f(c_2) \Rightarrow$ по т. Ферма (слайд №) одна из точек c_1, c_2 лежит на (a, b) (в силу $f(a) = f(b)$), её и примем за ξ, $\xi \in (a, b) \Rightarrow U(\xi) \subset (a, b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$

Замечание 1.



В частности, между двумя нулями дифференц. функции лежит хотя бы один нуль её производной.

3

Теорема (Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то $\exists\, \xi \in (a, b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Док-во. Рассм. лин. комбинацию функций f и g.

$$F(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

Число λ выберем так, чтобы $F(a) = F(b)$ $\Longleftrightarrow$

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \implies \lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$g(b) \neq g(a)$, в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка $\mu \in (a, b)$: $g'(\mu) = 0$, что противоречит условию теоремы.

Теперь ф. $F(x)$ удовл. всем условиям теоремы Ролля $\implies$

$$\exists\, \xi \in (a, b) : \quad F'(\xi) = f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0 \implies$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

4

Теорема (Лагранжа). Если ф. $f(x)$ непр. на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то $\exists\ \xi\in(a,b)$:

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)}$$

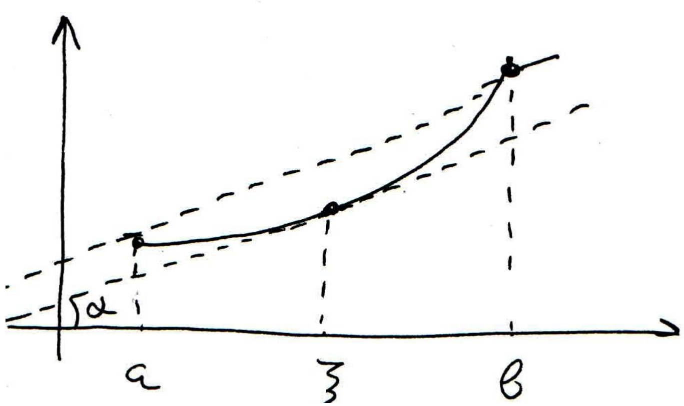
Док-во. Положим в усл. теоремы Коши $g(x)\equiv x$.

Следствие. При условиях теоремы Лагранжа имеет место формула конечных приращений:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\big(a+\theta(b-a)\big),\quad 0<\theta<1,$$

верная как при $a<b$, так и при $a\geq b$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



касательная $\parallel$ секущей

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)=\operatorname{tg}\alpha$$

5

Теорема

Правило Лопиталя-Бернулли

Если функции $f(x), g(x)$ дифференцир. на (a, b),

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0, \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

и существует (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \text{ **тогда** } \Rightarrow \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

<u>Док-во</u>. Продолжим $f(x), g(x)$ в точку a по непрерывности, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $\forall x \in (a, b)$ $f(x)$ и $g(x)$ непр. на $[a, x]$ и удовл. всем остальным условиям теоремы Коши (дифф. на (a, x) и $g'(t) \neq 0$ на (a,x))

поэтому $\exists\ \xi \in (a, x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \Bigg\| \quad \text{При } \begin{array}{l} x \to a+0 \\ \xi \to a+0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Теорема (при соответствующем изменении её условий) верна при $x \to a-0$ и $x \to a$, $a \neq \infty$ (конечная точка), при $a = \infty$ положим $x = 1/y$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'_y(1/y)}{g'_y(1/y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'(1/y)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'(1/y)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Неопределённость может быть раскрыта на n шаге, если до этого она сохраняется

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Важные примеры

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{c^{x}}$, $c>1$, $\alpha>0$ $\longrightarrow$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{c^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{c^{x}\ln c} = \dots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{c^{x}(\ln c)^{n}} = 0$$

при $n>\alpha$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$, $\alpha>0$ $\longrightarrow$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0$$

На $+\infty$:
Логарифмич. ф. растёт медленнее степенной, а степ. функция медленнее показательной c^{x}, $c>1$

Формула Тейлора (Taylor)

Формула Тейлора является одной из жемчужин математического анализа и широко используется и в теоретических исследованиях, и вычислительной практике. Эта формула позволяет адекватно заменить заданную сложным выражением функцию удобным для анализа <u>многочленом</u>.

Рассмотрим задачу приближения функции $f(x)$ в окрестн. некоторой точки x_0. В качестве приближений возьмём функции наиболее простого вида — многочлены различных порядков.

Простейший способ приблизить непрерывную в т. x_0 функцию

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x), \quad \text{где } \alpha(x) = f(x) - f(x_0) \to 0, \; x \to x_0$$

в силу непрерывности $f(x)$ в т. x_0. Итак, непрерывная в т. x_0 функция $f(x)$ приближается в $U(x_0)$ многочленом $P_0(x) \equiv f(x_0)$

Таким образом, для функции $f(x)$, имеющей в т. x_0 непрерывную производную n порядка, справедлива ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0$$

или локальная ф-ла Тейлора.

Возникает вопрос о единственности полученного решения, а именно: возможно ли представление

$$f(x) = Q_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0$$

с многочленом $Q_n(x)$, отличным от Тейлоровского.

Итак, установлено, что представление n раз непрерывно дифференц. функции $f(x)$ в т. x_0 в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0$$

единственно и даётся локальной ф-лой Тейлора. Эта формула определяет общий алгоритм выделения главной части функции $f(x)$ в окрестности т. x_0.

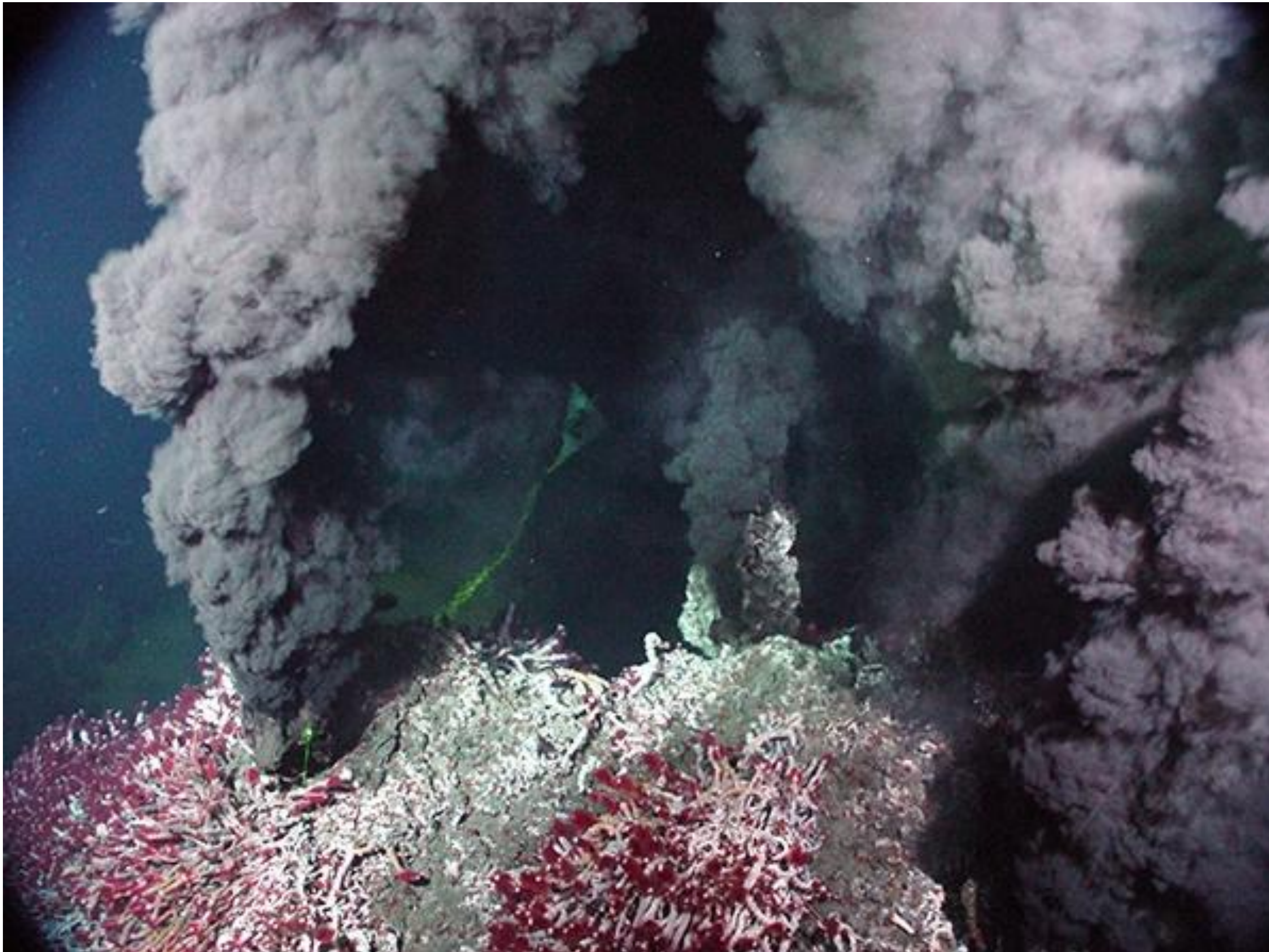
Многочлен Тейлора наилучшим образом среди всех многочленов порядка n приближает $f(x)$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ при $x \to x_0$.

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание

45


А.С. Монин, Н.Н. Корчагин
Десять открытий
в физике океана
Прикладная математика и
открытия в Мировом океане



Ранее (1959) специалисты по геоморфологии и тектонике дна Океана установили: САХ является частью срединно-океанских хребтов, образующих по всему дну Мирового океана причудливую структуру в виде непрерывной цепочки подводных гор, высотой 1500–4000 м и длиной 60 тыс. км с пересекающимися многочисленными поперечными разломами по всей ее длине.


высота цунами,
определённая по
следам на деревьях