Математический анализ

Лекция -3(ю)

Непрерывные функции

Предел функции

Определение Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c), содержащий точку a.

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a.

Определение Пусть $\varepsilon > 0$, ε-окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Проколотой ε-окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε-окрестность, из которой исключена сама точка a. Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon).$$

Определение (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принятые обозначения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена

Пример : $f(x) = \sqrt[3]{x}\ \sin\frac{1}{x}$ в точке x = 0 не определена , но $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Бесконечно малые, бесконечно большие функции
Неопределенности

.

Теорема 9. Если функция $f(x)$ — бесконечно малая в точке a и в некоторой окрестности этой точки $f(x) \neq 0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой в этой точке.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 10. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a}\{f(x) \pm \pm g(x)\} = A \pm B$, $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = A\cdot B$, $\lim\limits_{x\to a}\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\} = \dfrac{A}{B}$, если в последнем пределе $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0$.

Замечание. В некоторых случаях прямое применение теоремы 10 к вычислению пределов невозможно. Например, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, но нельзя утверждать, что $\lim\limits_{x\to a}\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\} = \dfrac{0}{0}$, поскольку выражение $\dfrac{0}{0}$ не имеет смысла. Здесь появляется так называемая неопределенность вида $[\frac{0}{0}]$. Аналогично возникают неопределенности $[\frac{\infty}{\infty}]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$. Раскрыть какую-нибудь неопределенность означает вычислить отвечающий ей предел; $[0^\infty] = 0$ не является неопределенностью.

.

Два замечательных предела

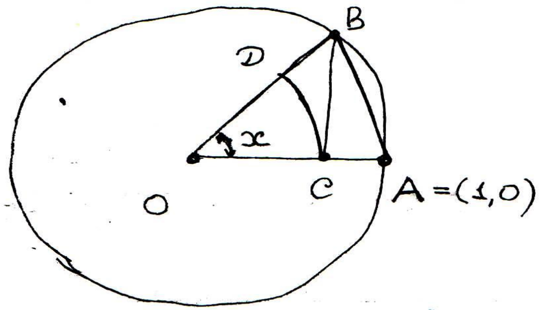
Рассмотренные свойства функций, имеющих предел в точке $a \in \mathfrak{R}$ расширенной числовой прямой, дают возможность проанализировать их поведение в окрестности этой точки a. Однако в ряде случаев этих свойств и установленных правил предельного перехода недостаточно. Одним из классических примеров подобного случая является поведение функции

$(\sin x) / x$ в окрестности точки $a = 0$.

Пусть x - центральный угол окружности единичного радиуса, причем $0 < x < \pi/2$ (см. следующий слайд).

Первый замечательный предел :

пусть x - центральный угол единичного круга, 0 < x < π/



$|OA| = |OB| = 1$

$S_{\measuredangle OCD} < S_{\Delta OAB} < S_{\measuredangle OAB}$

$S_{\measuredangle OCD} = \frac{\pi |OC|^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2} \cdot \cos^2 x$

$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \sin x$

$S_{\measuredangle OAB} = \frac{\pi |OA|^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{x}{2} \cos^2 x < \frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2}$

т.к. $0 < x$ $\Rightarrow$

$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

т.к. ф-ии чётные, это верно при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0}$

$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1 \Rightarrow |\sin x| < |x|$, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$\forall \varepsilon > 0$

$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon$ при $0 < |x - 0| = |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | первый замечательный предел.

Перейдём к пределу при $x \to 0$ в нер-ве $1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\lim (1 - \sin^2 x) = 1 - \lim \sin x \cdot \lim \sin x = 1 \Rightarrow 1 \le \lim \frac{\sin x}{x} \le 1 \Rightarrow$

Второй замечательный предел.

Теорема. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

• Теорема. Послед. $\{x_n\}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Док-во.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\} =$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

При этом $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ <u>возрастает</u> и она <u>ограничена :</u>

$$x_n < 2+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

следовательно $2 < x_n < 3$, $n\to\infty$

<u>Теорема.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

<u>Док-во.</u> $\forall x>0 \quad \exists\, n=n(x): \; n\le x<n+1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Переходим к пределу при $n\to\infty$, $x\to+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Следствие 1. Если $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to a}\left\{1+\frac{1}{\beta(x)}\right\}^{\beta(x)} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = y \to \infty$, $x \to a$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}\left\{1+\frac{1}{\beta(x)}\right\}^{\beta(x)} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e. \blacktriangleright$$

Следствие 2. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to a}\left\{1+\alpha(x)\right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$, $x \to a$

$$\lim_{x\to a}\left\{1+\alpha(x)\right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{x\to a}\left\{1+\frac{1}{\beta(x)}\right\}^{\beta(x)} = e. \blacktriangleright$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

Сравнение функций при $\longrightarrow *$

Сравнение функций (при данном стремлении аргум.

Для сравнения двух чисел а, в рассматривают их отношение а/в. Для сравнения двух функций $f(x)$, $g(x$ при $x \to a$ рассматривают $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

<u>Определение</u>. Пусть $f(x)$, $g(x)$ определены в некоторой $\dot{U}(a)$ если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то <u>$f(x)$ наз. беск. малой по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.</u>

<u>Обозначение</u>: $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$

или : $f = o(g)$, $x \to a$

<u>Замечание</u>: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) = \alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ - б. м. при $x \to a$

Определение Пусть f(x) и g(x) определены в $\acute{U}(a)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то функции f(x) и g(x) называются эквивалентными (асимптотически равными) при $x \to a$. Обозначение: $f \sim g$, $x \to a$.

Пример : $\sin x \sim x$, $x \to 0$.

Теорема (критерий эквивалентности функций)

$$f \sim g,\ x\to a \iff f = g + o(g),\ x \to a$$

Док-во. Пусть $f\sim g$, $x\to a$ $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x),\ \alpha(x) \text{ - б.м. при } x\to a \Longrightarrow$$

$$f(x) = g(x) + \alpha(x)\cdot g(x) = g(x) + o(g(x)),\ x\to a.$$

Пусть $f = g + o(g)$, $x \to a$ $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\left\{1+\frac{o(g)}{g}\right\} = 1 \Longrightarrow f\sim g,\ x\to a \ \blacksquare$$

список функций, эквивалентных x при $x \to 0$:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim$$

$$\sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0).$$

Замечани Заменять б.м. на эквивалентные или в суммах и разностях, вообще говоря, нельзя.

Пример. $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$

$\ln(1+x) \sim x$ $x \to 0$
$\ln(1-x) \sim -x$

Если заменить, то $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x}{x^2} = 0$, н

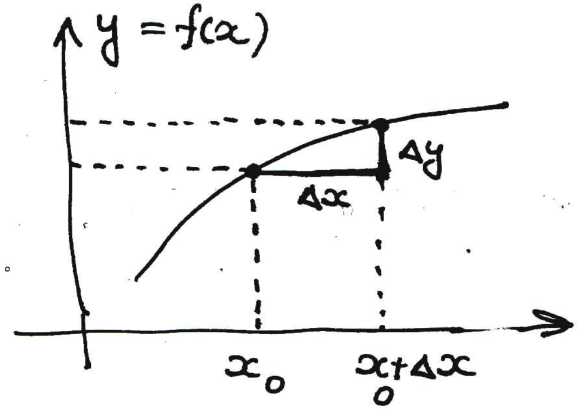
$A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1.$

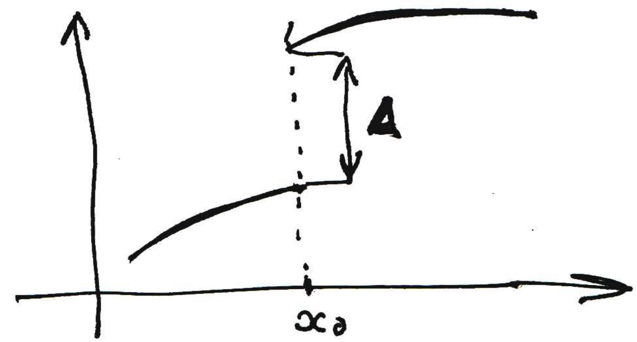
Непрерывные функции

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции.

Известно, что во многих наблюдаемых процессах и явлениях изменения происходят в основном постепенно, непрерывно. Например, поставили нагревать воду: время идет, температура воды повышается. Но как? Постепенно, без скачков, непрерывно, т.е. за малый промежуток времени температура изменяется мало. В этом примере, с точки зрения математика, температура воды есть функция времени, и эта функция такова, что при малом изменении аргумента (времени) мало изменяется функция (температура).

Непрерывность функций





$$\Delta f = \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$ | приращ. ф. в точке x_0

Определение. Функция $f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. **непрерывной в точке x_0**, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Подробно: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \{ f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \} = 0 \implies$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

$x_0 + \Delta x = x \to x_0$ при $\Delta x \to 0$

Равносильное определение непрерывности:

Определение. Функция $f(x)$, определённая в $\overset{\circ}{U}(x_0)$, наз. непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Точнее, $f(x)$ непрерывна в т. x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon):$$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

На языке последовательностей:

$f(x)$ непрерывна в т. x_0, если

$$\forall \{x_n\}: \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Иначе, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$

→

Определение 9.1 непрерывности функции можно сформулировать в иной форме. Изменение *аргумента* функции от значения $a \in \mathbb{R}$ к другому значению x можно представить как ***приращение аргумента*** (положительное или отрицательное) ***в точке*** $a \in \mathbb{R}$

$$\Delta x = x - a. \tag{9.3}$$

Тогда новое значение $f(a+\Delta x)$ функции $y = f(x)$ будет отличаться от прежнего значения $f(a)$ на величину

$$\Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a) = f(a+\Delta x) - f(a), \tag{9.4}$$

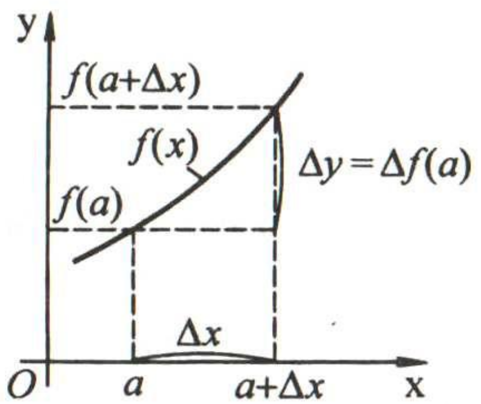


Рис. 9.3

называемую ***приращением функции в точке*** $a \in \mathbb{R}$. Геометрический смысл приращении ясен из рис. 9.3, на котором и Δx, и Δy положительны. В общем случае каждое из них может иметь любой знак.

Поскольку (9.1) означает, что $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$, то с учетом (9.3) и (9.4) это равносильно $\Delta f(a) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\Delta f(a)$ является функцией, *бесконечно малой* (б.м.) при $\Delta x \to 0$. Следовательно, определениям 9.1 и 9.2 эквивалентно следующее определение.

Определение 9.3. Функцию $f(x)$ называют ***непрерывной в точке*** $a \in \mathbb{R}$, если приращение функции в этой точке является функцией, б.м. при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0. \tag{9.5}$$

Пример 9.1. **а.** Функция $f(x) = c = \mathrm{const}$ непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, так как $\forall a \in \mathbb{R}$ $\Delta f(a) = f(x) - f(a) \equiv 0$ и выполнено (9.5).

б. Функция $f(x) = x$ также непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, поскольку $\forall a \in \mathbb{R}$ $\Delta f(a) = f(x) - f(a) = x - a = \Delta x$ и выполнено (9.5).

в. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$. Имеем

$$|\Delta f(x)| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left|2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|,$$

так как $|\cos(x + \Delta x/2)| \leqslant 1$, а $|\sin(\Delta x/2)| \leqslant |\Delta x|/2$.
Поэтому $\Delta f(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и выполнено условие определения 9.3 непрерывности данной функции в любой точке $a \in \mathbb{R}$. #

10

Теорема (о непрерывности сложной функции)

Если $y=f(x)$ непр. в т. x_0, а $g(y)$ непр. в т. $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в т. x_0.

Док-во. Пусть $\varepsilon>0$

$g(y)$ - непр. в т. $y_0 \Rightarrow \exists\, \mu=\mu(\varepsilon)$:

$$|g(y)-g(y_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |y-y_0|<\mu$$

$y=f(x)$ - непр. в т. $x_0 \Rightarrow \exists\, \delta=\delta(\mu)$:

$$|y-y_0|=|f(x)-f(x_0)|<\mu \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\delta$$

Таким образом, $\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta$:

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon$$

Следствие. Если $y=f(x)$ непр. в т. x_0, а $g(y)$ непр. в т. $y_0=f(x_0)$, то

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

Док. В силу непр-ти $f(x)$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

В силу непр-ти сл. функции $g(f(x))$ $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$. ■

Следовательно, для непрерывных функций операция предельного перехода перестановочна с операциями по вычислению значения функции в соответствующей точке. Теорема 10 позволяет при вычислении предела сложной непрерывной функции удобно чередовать эти операции.

Теорема. Если функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывна в т. x_0, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$: $g(x_0)\neq 0$ непрерывна в т. x_0.

Док-во. В силу непр. f и g по свойствам пределов:

$$\lim_{x\to x_0}\{(f+g)(x)\}=\lim_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0)=(f+g)(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\{(f\cdot g)(x)\}=\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)g(x_0)=(f\cdot g)(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f}{g}(x)\right\}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f}{g}(x_0),\quad g(x_0)\neq 0.$$

точке

Определение. Функция $f(x)$, определённая на $[x_0, x_0+\varepsilon)$ $\varepsilon>0$ наз. непрерывной справа в т. x_0, если

$$\exists \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \quad \text{и} \quad f(x_0+0) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$, определённая на $(x_0-\varepsilon, x_0]$, $\varepsilon>0$ наз. непрерывной слева в т. x_0, если

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} = f(x_0-0) \quad \text{и} \quad f(x_0-0) = f(x_0).$$

Определение. Функция $f(x)$ наз. непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой его точке.

Функция $f(x)$ наз. непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в любой его внутренней точке, непрерывна справа в т. a и непрерывна слева в т. b.

Классы функций $C(a, b)$, $C[a, b]$.

Свойства функций, непрерывных в точке

- Если функция f(x) непрерывна в точке $a \in \Re$, то она имеет конечный предел в ней, ограничена в окрестности т. a и при условии $f(x) \neq 0$ знакопостоянна. Из правил предельного перехода при арифметических операциях следуют свойства непрерывности:

1) *линейной комбинации* конечного числа $m \in \mathbb{N}$ функций, непрерывных в данной точке, т.е.

$$\exists \lim_{x \to a} f_k(x) = f_k(a) \in \mathbb{R} \ \forall k = \overline{1, m} \Rightarrow \lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \lim_{x \to a} f_k(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(a), \ \ c_k \in \mathbb{R} \ \forall k = \overline{1, m}; \quad (9.7)$$

2) *произведения* конечного числа $m \in \mathbb{N}$ функций, непрерывных в данной точке, т.е.

$$\exists \lim_{x \to a} f_k(x) = f_k(a) \in \mathbb{R} \ \forall k = \overline{1, m} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \prod_{k=1}^{m} f_k(x) = \prod_{k=1}^{m} f_k(a); \quad (9.8)$$

Продолжение

3) *частного* двух функций, непрерывных в данной точке, при условии, что значение делителя в этой точке отлично от нуля, т.е.

$$\left(\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}\right) \wedge \left(\exists \lim_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}. \qquad (9.9)$$

Свойство (9.8) можно распространить на натуральную *степень* $n \in \mathbb{N}$ функции, непрерывной в точке a, т.е.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = \left(f(a)\right)^n. \qquad (9.10)$$

Примеры непрерывных функций.

1 $y = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$

$\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y(x_0) = C \;\Big|\; \Delta y = 0 \Rightarrow \Delta y \to 0,\ \Delta x \to 0$

5 $y = \sin x$ непр. $\forall x_0 \in R$ $\Big\|$ $y = \cos x$ – для произвольн.

$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x) - \sin x| = \left|2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le$

$\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \Longrightarrow \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$

2 $y = x$ непр. $\forall x \in R$

$\Delta y = \Delta x \Rightarrow \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$

3 $y = x^n$ непрерывна как произведение непр. функций.

4 Многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

непрерывен как сумма произведений непр. ф-ций.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ

Пример

$$\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x}.$$

Функцию под знаком предела представим в виде

$$(1+\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x} = \left((1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}\right)^3$$

и рассмотрим ее как суперпозицию функций $y = f(x) = (1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}$ и $g(y) = y^3$. Если сделать замену $u = \operatorname{tg}x$, то нетрудно вычислить $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$. Действительно, с учетом *второго замечательного предела* имеем

$$\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}x = u, \\ u \underset{x\to\pi}{\to} 0 \end{matrix} \right| = \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e.$$

Тогда в силу непрерывности $g(y) = y^3$ получим

$$\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x} = \left(\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}\right)^3 = e^3.$$

Определение 21. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке выполняется соотношение

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это определение предъявляет к функции следующие требования:

а) функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0;

б) функция $f(x)$ должна иметь предел в точке x_0;

в) этот предел должен совпадать со значением функции $f(x)$ в этой точке.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0, а сама точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Если односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют и конечны, то точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. В частности, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т. е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел, то говорят, что x_0 есть точка устранимого разрыва. Разрыв в этом случае можно устранить, доопределяя или переопределяя значение функции $f(x)$ в точке x_0: $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Эта процедура называется продолжением функции по непрерывности.

Всякая точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва 1-го рода, называется точкой разрыва 2-го рода. Другими словами, в точке разрыва 2-го рода по крайней мере один из односторонних пределов функции не существует или бесконечен. Наиболее типичный случай разрыва 2-го рода — это именно бесконечный разрыв.

Точка разрыва первого рода – существование обоих односторонних конечных пределов

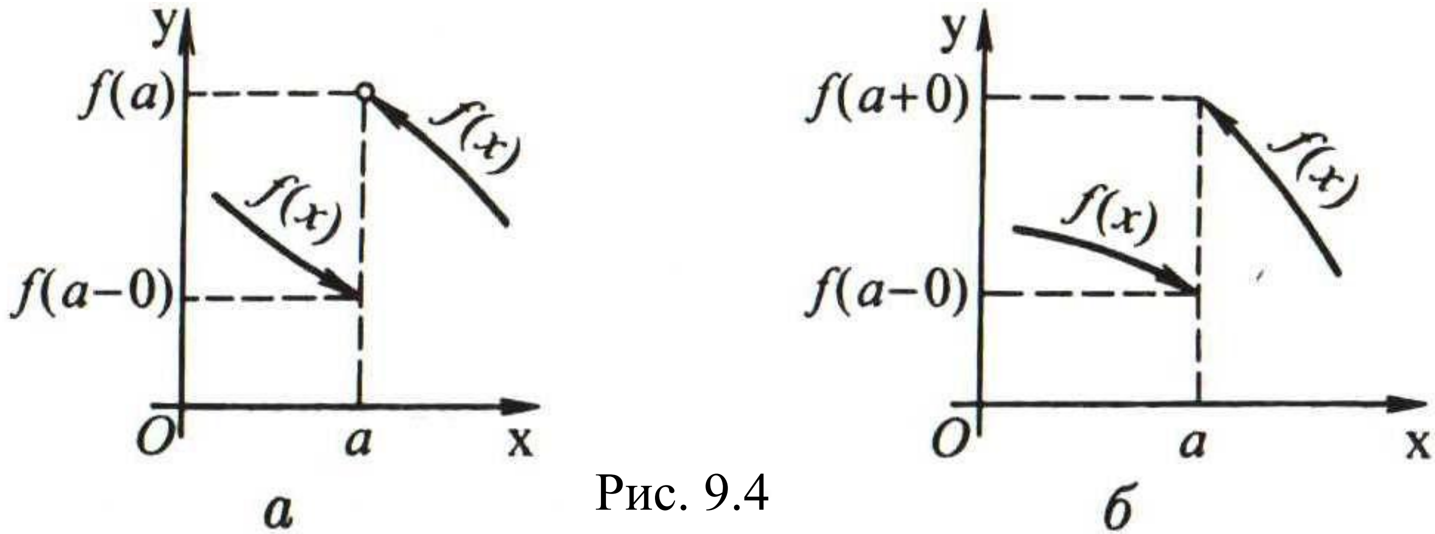


Рис. 9.4

Определение . ***Точкой разрыва первого рода*** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

Итак, для точки разрыва первого рода выполнено, по крайней мере, условие 2 непрерывности функции в точке (рис. 9.4). Разность $f(a+0)-f(a-0)$ конечна, и ее называют ***скачком функции*** в точке разрыва первого рода, а про функцию иногда говорят, что она терпит разрыв с конечным скачком.

Продолжение.

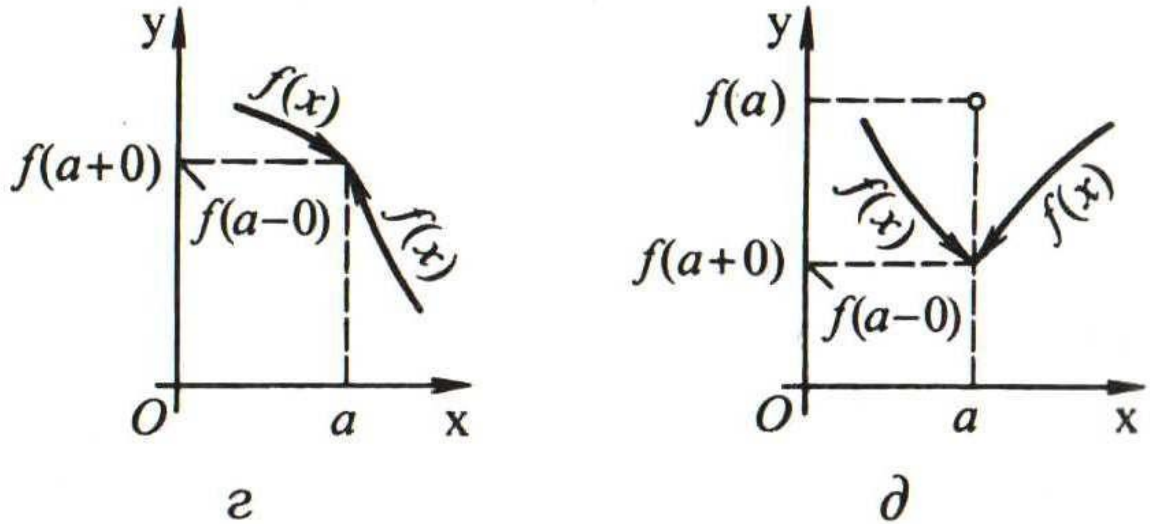


Рис. 9.4

Если скачок равен нулю (см. рис. 9.4, *г* и *д*), т.е. в точке a выполнено еще и условие 3 непрерывности функции, а поэтому существует конечный предел функции в этой точке, то имеем ***точку устранимого разрыва***. Если в этом случае для функции $g(x)$, совпадающей в некоторой проколотой окрестности точки a с $f(x)$, положить $g(a) = f(a+0) = f(a-0)$, то $g(x)$ будет непрерывна в точке a, поскольку все условия 1–4 непрерывности функции в точке a будут выполнены. Про возможность введения такой непрерывной функции $g(x)$ говорят, что разрыв непрерывности $f(x)$ в точке a можно устранить.

Точка разрыва первого рода – существование обоих односторонних конечных пределов

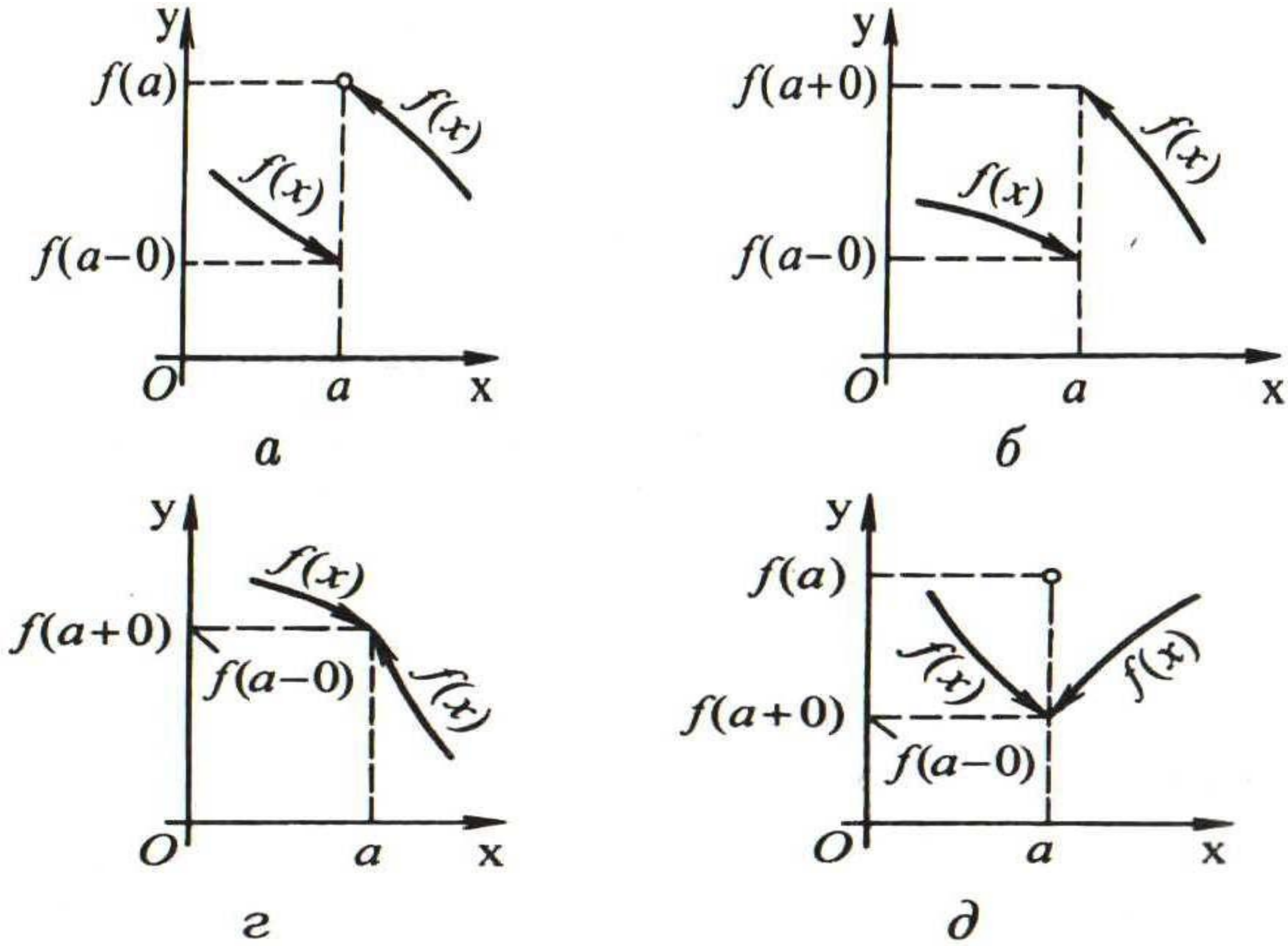


Рис. 9.4

Определение . ***Точкой разрыва второго рода*** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен или не существует.

Пример . Определим точки разрыва и выясним их характер для следующих функций.

а. $y = 1/x$. Эта функция непрерывна при любом $x \neq 0$. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Оба односторонних предела не являются конечными, т.е., по определению 9.8, $x = 0$ — точка разрыва второго рода (см. рис. 7.7).

б. $y = a^{1/x}$ при $0 < a < 1$. Функция непрерывна при любом $x \neq 0$ и в силу (7.17) $y \to +0$ при $x \to +0$, а при $x \to -0$ $y \to +\infty$. По определению 9.8, $x = 0$ является точкой разрыва второго рода

в. $y = \sin(1/x)$. В точке $x = 0$ не существуют ни двусторонний, ни односторонние пределы (см. пример 7.5). По определению 9.8, $x = 0$ является точкой разрыва второго рода (см. рис. 7.10).

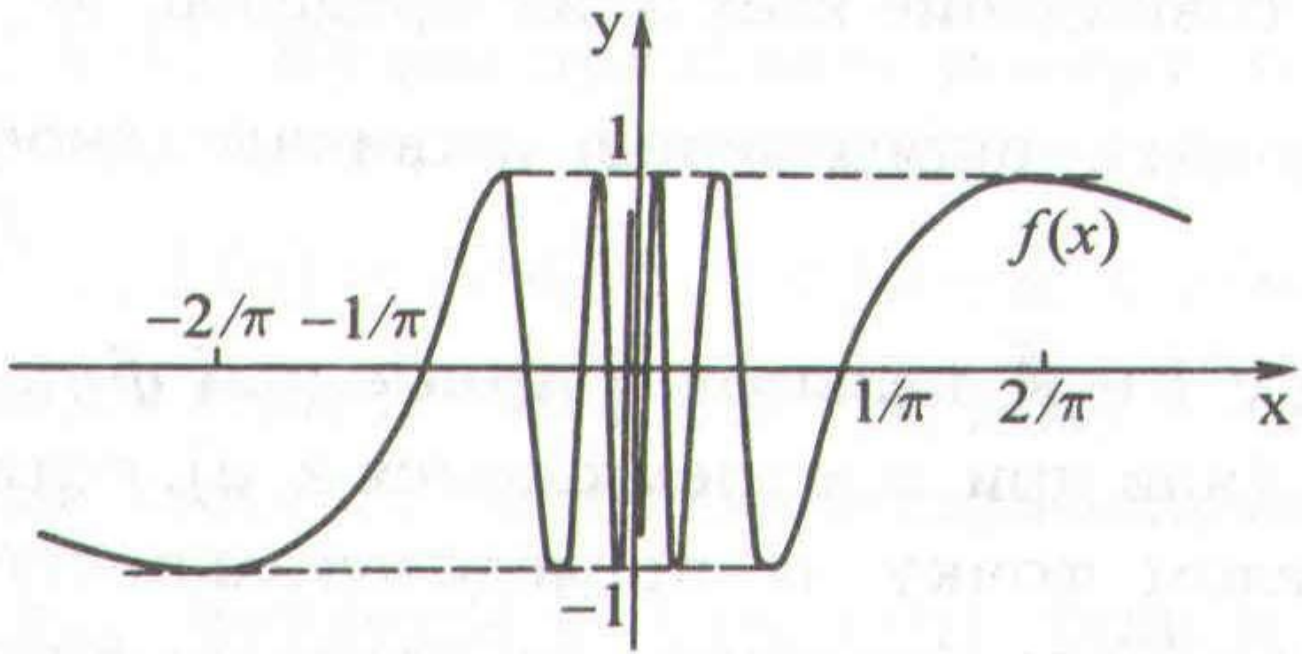


Рис. 7.10

Свойства непрерывных функций

Теорема (**первая теорема Больцано — Коши**). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется точка c, в которой функция обращается в нуль, т.е.

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a)f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in (a, b): \quad f(c) = 0.$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная линия *графика функции* лежит и ниже, и выше оси Ox, то эта линия пересекает ось Ox (рис. 9.6).

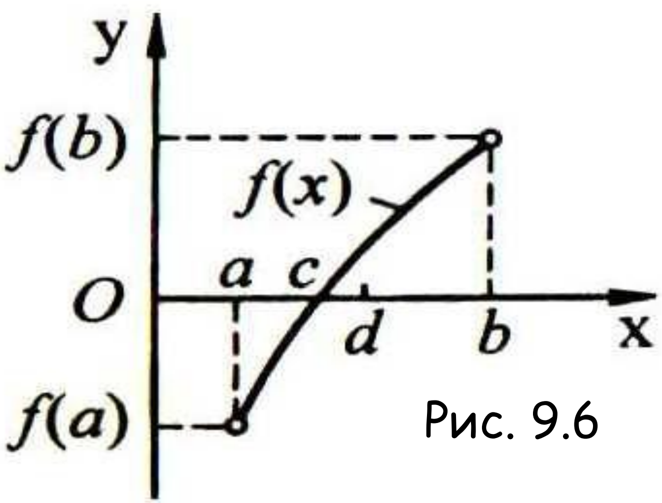


Рис. 9.6

Теорема о промежуточном значении непрерывной функции

Теорема **(вторая теорема Больцано — Коши).** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке X (замкнутом или нет, конечном или бесконечном). Если в двух точках a и b $(a < b)$ этого промежутка функция принимает неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = C$.

Теорема (*первая теорема Вейерштрасса*). Непрерывная на отрезке функция является *ограниченной* на этом отрезке, т.е. существуют числа m и M, такие, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$.

Существенным условием в этой теореме является непрерывность функции именно на отрезке. Непрерывность лишь на интервале не обеспечивает ограниченности функции. Так, при $x \in (0, \pi/2)$ функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна (см. пример 9.3), но не ограничена

Теорема (*вторая теорема Вейерштрасса*). Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке *наибольшее* и *наименьшее значения*, т.е.

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists x_*, x^* \in [a, b] : \forall x \in [a, b] \quad f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*).$$

На рис. 9.8 наименьшее и наибольшее значения обозначены соответственно m и M. Существенным условием в этой теореме (как и в предыдущей) является непрерывность функции именно на отрезке, а не вообще на промежутке любого типа. Даже сочетание непрерывности и ограниченности не гарантирует достижения функцией наименьшего и наибольшего значений: на $\mathbb{R}$ функция $1/(1+x^2)$ непрерывна как *дробно-рациональная* с не обращающимся в нуль знаменателем и ограничена, но не достигает наименьшего значения

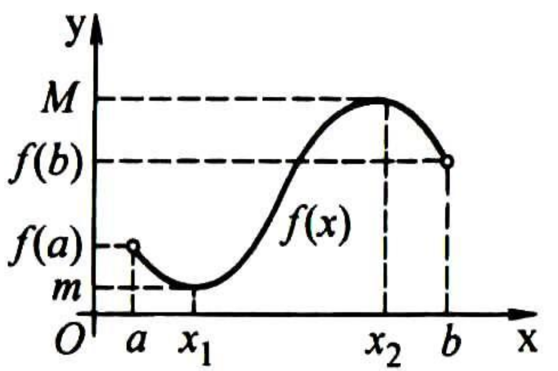


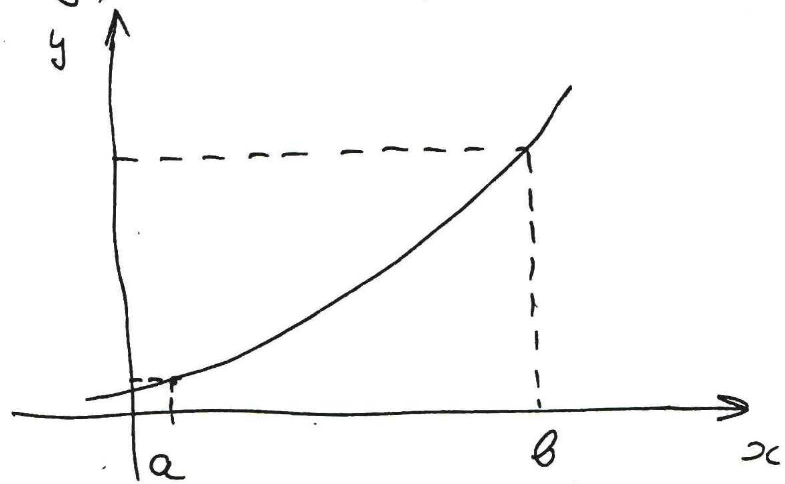
Рис. 9.8

=

Теорема **(об обратной функции).** Пусть функция $y = f(x)$ *монотонно возрастает* (*убывает*) и непрерывна в интервале (a, b). Тогда в соответствующем (a, b) интервале $\big(f(a+0),\ f(b-0)\big)$ (или $\big(f(b-0),\ f(a+0)\big)$) значений этой функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, также возрастающая (убывающая) и непрерывная.

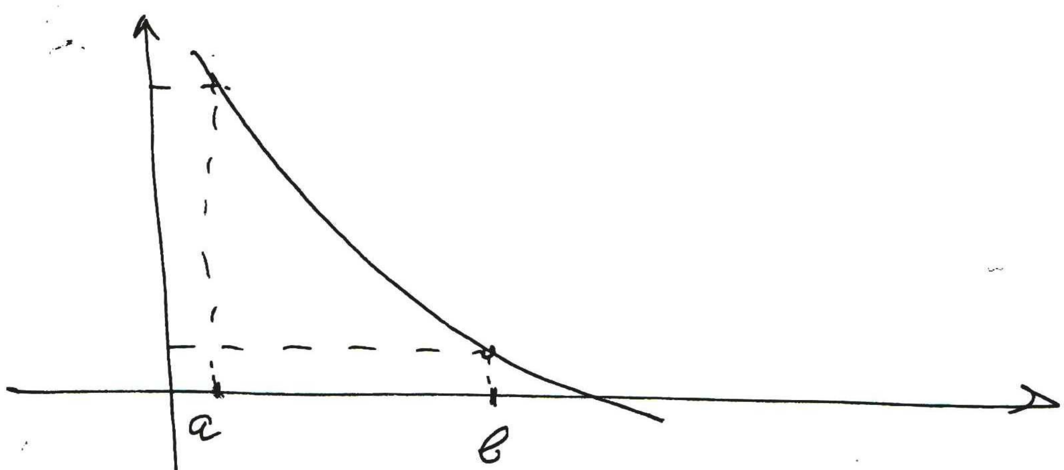
Если $y=f(x)$ монотонно возрастает и непрерывна на (a,b), то

$x=f^{-1}(y)$ монотонно возрастает и непр. на $(f(a+0), f(b-0))$



Если $y=f(x)$ монотонно убывает и непр. на (a,b), то

$x=f^{-1}(y)$ монотонно убывает и непр. на $(f(b+0), f(a+0))$



Асимптоты

Определение. Прямая $x = a$ наз. вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Пример. Прямая $x = 0$ – вертик. асимптота графиков $y = \frac{1}{x}$, $y = \ln x$, $y = \operatorname{ctg} x$

<u>Теорема</u>. Прямая $y = kx + b$ является двусторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только когда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b .$$

<u>Док-во</u>. Пусть $y = kx + b$ – асимптота, тогда

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0, \ x \to \infty \implies$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \longrightarrow k, \quad x \to \infty$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \longrightarrow b, \quad x \to \infty$$

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b \implies$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0, \ x \to \infty$$

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \implies y = kx + b \text{ – асимптота.} \ \blacksquare$$

<u>Замечание</u>. Для существования асимптоты достаточно лишь $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ наз. (двусторонней) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty$$

иначе, $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x) - (kx+b)\} = 0$

Если этот предел существует только при:
$x \to -\infty$, то асимптота наз. левосторонней,
$x \to +\infty$, — правосторонней.

односторонн асимптоты.

При $k = 0$ асимптота наз. горизонтальной.